Liczby zespolone

Definicja 9.1 (liczb zespolonych)
Liczbami zespolonymi nazywamy liczby postaci $a + bi$, gdzie i oznacza jednostkę urojoną, przyjmujemy, że $i^2 = -1$ zaś a i b są liczbami rzeczywistymi. Suma liczb zespolonych $z_1 = a + bi$ i $z_2 = c + di$ to $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$. Iloczyn liczb zespolonych $z_1 = a+bi$ i $z_2 = c+di$ to $z_1z_2 = (ac-bd)+(ad+bc)i$. Zbiór wszystkich liczb zespolonych oznaczany jest (na całym świecie z wyjątkiem większości polskich szkół średnich) przez $\mathbb{C}$. ■

Stwierdzenie 9.2 (przemienność działań)
Dla dowolnych liczb zespolonych z_1, z_2 zachodzą równości

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \qquad \text{oraz} \qquad z_1z_2 = z_2z_1,$$

czyli dodawanie i mnożenie są działaniami przemiennymi.

Dowód. Uzasadniamy to w następujący sposób:

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i = (c + a) + (d + b)i = z_2 + z_1,$$

bo wynik dodawania liczb rzeczywistych nie zależy od kolejności składników. Teraz mnożenie:

$$z_1z_2 = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i = (ca - db) + (cb + da)i = \\ = (c + di)(a + bi) = z_2z_1,$$

bo dodawanie i mnożenie liczb rzeczywistych są przemienne. ■

Zamiast pisać $a + 0i$ będziemy pisać a, zamiast pisać $0 + bi$ będziemy pisać bi. Liczby postaci bi, $b \in \mathbb{R}$ nazywać będziemy urojonymi. Dzięki tej umowie liczby rzeczywiste też są liczbami zespolonymi — „to te w których nie ma i". Liczbę a nazywamy częścią rzeczywistą liczby $z = a + bi$, piszemy $\mathrm{Re}\, z = a$; liczbę b – częścią urojoną liczby $z = a + bi$, piszemy $\mathrm{Im}\, z = b$.

Następne własności liczb zespolonych są opisane poniżej.

Stwierdzenie 9.3 (łączność, rozdzielność, istnienie różnicy i ilorazu)
Dla dowolnych liczb zespolonych z_1, z_2, z_3 zachodzą równosci:
$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ — dodawanie jest łączne,
$(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$ — mnożenie jest łączne,
$z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$ — mnożenie jest rozdzielne względem dodawania.

Dla dowolnych liczb zespolonych z_1, z_2 istnieje dokładnie jedna taka liczba zespolona z, że $z_1 + z = z_2$. Nazywana jest różnicą liczb z_2 i z_1 i oznaczana symbolem $z_2 - z_1$.

Dla dowolnych liczb zespolonych $z_1 \neq 0$ i z_2 istnieje dokładnie jedna liczba zespolona z taka, że $z_1 z = z_2$. Liczba ta zwana jest ilorazem liczb z_2 i z_1 i oznaczana symbolem $\frac{z_2}{z_1}$ lub z_2/z_1.

Dowód. Jedynie dowód istnienia ilorazu różni się nieco od dowodu przemienności działań. Przyjmijmy, że $z_1 = a+bi$, $z_2 = c+di$. Szukamy liczby zespolonej $z = x+yi$, dla której $z_2 = zz_1$, czyli $c + di = (a + bi)(x + yi) = (ax - by) + (ay + bx)i$. Ma więc być $c = ax - by$ i jednocześnie $d = ay + bx$. Otrzymaliśmy więc układ równań z niewiadomymi x, y. Mnożąc pierwsze z nich przez a, drugie przez b, następnie dodając stronami otrzymujemy $ac+bd = (a^2+b^2)x$, zatem $x = \frac{ac+bd}{a^2+b^2}$, dzielenie jest wykonalne, bo $0 \neq a+bi$, więc co najmniej jedna z liczb a, b jest $\neq 0$. Analogicznie otrzymujemy wzór $y = \frac{ad-bc}{a^2+b^2}$. ■

Wykazaliśmy wszystkie podstawowe własności działań. Jest oczywiste, że w zbiorze liczb zespolonych zachodzą równości $1 \cdot z = z$, $0 \cdot z = 0$ i $0 + z = z$ dla dowolnego $z \in \mathbb{C}$.

Na liczbach zespolonych możemy więc wykonywać działania tak, jak na liczbach rzeczywistych. Na przykład:

$$\frac{c+di}{a+bi} = \frac{(c+di)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{(c+di)(a-bi)}{a^2-(bi)^2} = \frac{(ac+bd)+(ad-bc)i}{a^2-b^2i^2} = \frac{(ac+bd)+(ad-bc)i}{a^2-b^2(-1)} =$$
$$= \frac{ac+bd}{a^2+b^2} + \frac{ad-bc}{a^2+b^2} i .$$

Niestety, nie wszystko jest tak jak w przypadku liczb rzeczywistych. W zbiorze $\mathbb{C}$ nie można w sensowny sposób wprowadzić nierówności. Nadamy temu zdaniu postać twierdzenia, a następnie udowodnimy je.

Twierdzenie 9.4 (o nieistnieniu nierówności w zbiorze liczb zespolonych)
W zbiorze $\mathbb{C}$ nie istnieje relacja $\prec$ taka, że

1. Jeśli $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, to zachodzi dokładnie jedna z trzech możliwości:
   $\mathbf{z}_1 = z_2$ albo $z_1 \prec z_2$ albo $z_2 \prec z_1$ (każde dwie liczby można porównać);
2. jeśli $z_1 \prec z_2$ i $z_2 \prec z_3$, to $z_1 \prec z_3$ (nierówność ma być przechodnia);
3. jeśli $z_1 \prec z_2$ i $z \in \mathbb{C}$, to $z_1 + z \prec z_2 + z$ (do obu stron nierówności wolno dodać dowolną liczbę $z \in \mathbb{C}$);
4. jeśli $z_1 \prec z_2$ i $0 \prec z$, to $zz_1 \prec zz_2$ (nierówność wolno pomnożyć obustronnie przez dowolną liczbę z większą od 0).

Dowód. Załóżmy bowiem, że udało nam się w jakiś sposób zdefiniować nierówność $\prec$ w taki sposób, że spełnione są warunki 1 — 4. Jeśli $0 \prec z$, to $0 = 0 \cdot z \prec z \cdot z = z^2$, czyli kwadraty liczb dodatnich są dodatnie. Mamy oczywiście $z^2 = (-z)^2$. Jeśli $z \prec 0$, to $0 = z + (-z) \prec 0 + (-z) = -z$, zatem $0 \prec (-z)^2 = z^2$, więc również w tym przypadku $0 \prec z^2$. Wobec tego kwadraty liczb różnych od zera muszą być dodatnie. Mamy $1^2 = 1$ i $i^2 = -1$, zatem $0 \prec 1$ i jednocześnie $0 \prec -1$. Dodając do obu stron pierwszej z tych nierówności liczbę -1 otrzymujemy $-1 \prec (-1) + 1 = 0$, co przeczy temu, że $0 \prec -1$. Dowód został zakończony. ■

Okazało się więc, że liczb zespolonych porównywać się nie da. Można oczywiście definiować jakieś nierówności między liczbami zespolonymi rezygnując z części warunków 1 — 4, ale takie nierówności nie są użyteczne, więc na ogół nikt tego nie robi.

Liczby zespolone można traktować jako punkty płaszczyzny. Przyjmujemy, że część rzeczywista liczby zespolonej to pierwsza współrzędna (czyli pozioma), a część urojona to druga współrzędna (pionowa) punktu płaszczyzny. Przy takiej interpretacji suma $z_1 + z_2$ liczb zespolonych może być potraktowana jako koniec wektora, który jest sumą wektorów $\overrightarrow{0z_1}$ i $\overrightarrow{0z_2}$.

Definicja 9.5 (wartości bezwzględnej)
Wartością bezwzględną $|z|$ liczby zespolonej $z = a + bi$ nazywamy liczbę $\sqrt{a^2 + b^2}$, argumentem $\mathrm{Arg}\, z$ liczby $z = a + bi \neq 0$ – dowolną liczbę φ taką, że $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ oraz $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. ■

Z definicji tej wynika, że $|z|$ to odległość punktu z od punktu 0 a argument liczby z, to kąt między wektorami $\overrightarrow{01}$ i $\overrightarrow{0z}$ mierzony w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

$\mathrm{Arg}\, 2 = 0$ lub $\mathrm{Arg}\, 2 = 2008\pi$, $\mathrm{Arg}\, i = \frac{\pi}{2}$ lub $\mathrm{Arg}\, i = -\frac{3\pi}{2}$, $\mathrm{Arg}(-1+i) = \pi - \frac{\pi}{4} = = \frac{3}{4}\pi$, $|2| = 2 = |-2| = |2i| = |-2i|$, $|1+i| = |-1+i+ = |1-i| = |-1-i| = \sqrt{2}$.

Twierdzenie 9.6 (Nierówność trójkąta)
Dla dowolnych liczb zespolonych z_1, z_2 zachodzi nierówność $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, jest ona równością jedynie wtedy, gdy punkty płaszczyzny odpowiadające liczbom $0, z_1, z_2$ leżą na jednej prostej, przy czym 0 nie leży między* z_1 i z_2. ■

Dowodu nie podajemy, bo wynika on ze znanych własności figur geometrycznych (np. trójkąta), a ci którzy ich nie pamiętają, mogą bez kłopotu wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a_1, b_1, a_2, b_2 zachodzi nierówność

$$\sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2},$$

staje się ona równością wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba rzeczywista $t \geq 0$ taka, że $z_1 = tz_2$ lub $z_2 = tz_1$.

* nieostro, jedna z liczb z_1, z_2 może być zerem

Z równości $z = a + bi$, $r = |z|$, $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ i $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ wynika, że

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,.$$

Zapisaliśmy liczbę z w *postaci trygonometrycznej.*

Załóżmy, że $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ i $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Wtedy

$$z_1z_2 = r_1r_2\big(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_2\sin\varphi_1)\big) =$$
$$= r_1r_2\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big)$$

– skorzystaliśmy tu ze znanych wzorów:

$$\cos(\varphi_1+\varphi_2) = \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 \text{ oraz}$$
$$\sin(\varphi_1+\varphi_2) = \cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_2\sin\varphi_1\,,$$

z którymi studenci spotykali się czasem w szkołach. Wykazaliśmy w ten sposób, że wartość bezwzględna iloczynu dwu liczb zespolonych równa jest iloczynowi ich wartości bezwzględnych, a argument iloczynu dwu liczb zespolonych równa jest sumie ich argumentów. Stosując otrzymany wzór wielokrotnie otrzymujemy

Twierdzenie 9.7 (Wzór de Moivre'a)

$$\big(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\big)^n = r^n\big(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\big)\,.\ \blacksquare$$

Z tego wzoru wynika, że dla każdej liczby zespolonej $w \neq 0$ i każdej liczby naturalnej n istnieje dokładnie n różnych liczb zespolonych z_1, $z_2,\ldots,z_n$ takich, że $z_j^n = w$ dla $j = 1,2,\ldots,n$. Załóżmy bowiem, że $w = \varrho(\cos\psi + i\sin\psi)$. Jeśli $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ i $w = z^n$, to muszą być spełnione równości $\varrho = r^n$ oraz $n\varphi = \psi + 2k\pi$ dla pewnej liczby całkowitej k. Wynika stąd, że $r = \sqrt[n]{\varrho}$, r jest więc wyznaczone jednoznacznie. Musi też być $\varphi = \frac{\psi}{n} + \frac{2k\pi}{n}$. Zastępując liczbę k liczbą $k+n$ zwiększamy kąt φ o 2π, co nie zmienia liczby z. Różne liczby z otrzymujemy przyjmując kolejno $k = 0$, $k = 1,\ldots$, $k = n-1$. Otrzymujemy więc dokładnie n różnych wartości. Łatwo zauważyć, że odpowiadające im punkty płaszczyzny są wierzchołkami n–kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu $r = \sqrt[n]{\varrho}$. Jeśli $w = 1$, to wśród tych liczb jest liczba 1.

Definicja 9.8 (pierwiastka algebraicznego z liczby zespolonej)
Algebraicznym pierwiastkiem n–tego stopnia z liczby zespolonej w nazywamy każdą liczbę zespoloną z, dla której $w = z^n$. $\blacksquare$

Przykład 9.1 Pierwiastkami algebraicznymi stopnia 2 z liczby $1 = \cos 0 + i\sin 0$ są dwie liczby:

$z_1 = \cos\frac{0\pi}{3} + i\sin\frac{0\pi}{3} = \cos 0 + i\sin 0 = 1$, $z_2 = \cos\frac{2\pi}{2} + i\sin\frac{2\pi}{2} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$.

Przykład 9.2 Pierwiastkami algebraicznymi stopnia 3 z liczby $1 = \cos 0 + i\sin 0$

są trzy liczby: $z_1 = \cos\frac{0\pi}{3} + i\sin\frac{0\pi}{3} = 1$, $z_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ oraz $z_3 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Przykład 9.3 Pierwiastkami algebraicznymi stopnia 3 z liczby $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$ są trzy liczby:
$z_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = \cos\frac{\pi+2\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+2\pi}{3} = -1$ oraz
$z_3 = \cos\frac{\pi+4\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+4\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Przykład 9.4 Ponieważ $\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 =$
$= \cos^2\alpha + 2i\cos\alpha\sin\alpha + i^2\sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 2i\cos\alpha\sin\alpha$, części rzeczywiste są równe i części urojone są równe, więc $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ i $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

Przykład 9.5 Zachodzą równości: $\cos 3\alpha + i\sin 3\alpha = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^3 =$
$= \cos^3\alpha + 3i\cos^2\alpha\sin\alpha + 3i^2\cos\alpha\sin^2\alpha + +i^3\sin^3\alpha =$
$$= \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha + i\big(3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha\big).$$
Wobec tego
$$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha,$$
$$\sin 3\alpha = 3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.$$
Widzimy więc, że za pomocą liczb zespolonych można powiązać wzory na $\cos n\alpha$ i $\sin n\alpha$ z dwumianem Newtona. Można przestać poszukiwać tych wzorów w tablicach. ■

Definicja 9.9 (sprzężenia)
Jeśli $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, to liczbę $\overline{z} = a - bi$ nazywamy sprzężoną do liczby z. ■

$\overline{2-3i} = 2 + 3i$, $\overline{13} = 13$, $\overline{i} = -i$. Liczba z jest rzeczywista wtedy i tylko wtedy, gdy , $z = \overline{z}$. Jeśli $z \notin \mathbb{R}$, to $\overline{z} \in \mathbb{C}$ jest jedyną liczbą taką, że $z + \overline{z} \in \mathbb{R}$ i jednocześnie $z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R}$. Prosty dowód tego stwierdzenia pozostawiam czytelnikom w charakterze ćwiczenia. Mamy też
$$z \cdot \overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 = |z|^2, \qquad z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}\, z \ \text{oraz}\ z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}\, z.$$
Możemy więc napisać $\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ i $\mathrm{Im}\, z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$. Punkty płaszczyzny odpowiadające liczbom z i $\overline{z}$ są symetryczne względem osi rzeczywistej.

Przypomnijmy, że argument iloczynu dwu liczb zespolonych równy jest sumie argumentów składników. Jest to własność przypominające nieco logarytm (logarytm iloczynu to suma logarytmów czynników). Logarytm to wykładnik potęgi. Zdefiniujemy teraz potęgę o podstawie e.

Definicja 9.10 (potęgi o wykładniku zespolonym)
$e^z = e^{x+iy} = e^x\big(\cos y + i\sin y\big)$ dla dowolnej liczby zespolonej $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. ■

Czytelnik może uznać tę definicję za dziwną. Zauważmy jednak, że rozszerza ona definicję potęgi o wykładniku rzeczywistym. $e^{\pi i} = e^0\big(\cos\pi + i\sin\pi\big) = -1$, $e^{\ln 2+\pi i} = e^{\ln 2}\big(\cos\pi + i\sin\pi\big) = -2$. Przykłady można mnożyć.Zauważmy jeszcze, że jeśli $z = x + iy$, $w = u + iv$ ($x, y, u, v \in \mathbb{R}$), to
$e^{z+w} = e^{(x+u)+i(y+v)} = e^{x+u}\big(\cos(y+v) + i\sin(y+v)\big) =$
$= e^x e^u\big(\cos y + i\sin y\big)\big(\cos v + i\sin v\big) = e^x\big(\cos y + i\sin y\big)e^u\big(\cos v + i\sin v\big) = e^z e^w$.
Widzimy więc, że właśnie zdefiniowanej potędze liczby e przysługuje podstawowa własność potęg. Definicja potęgi była stopniowo rozszerzana: najpierw uczniowie poznają potęgi o wykładnikach naturalnych, potem o całkowitych ujemnych, potem o dowolnych wymiernych. Potęga o wykładniku rzeczywistym jest określana tak, by zachować monotoniczność i równość $e^{a+b} = e^a e^b$. Ponieważ zajmujemy się liczbami zespolonymi, więc nie można mówić o monotoniczności — w zbiorze liczb zespolonych nie ma nierówności. Zamiast monotoniczności można zażądać istnienia pochodnej w punkcie 0.

Twierdzenie 9.11 (charakteryzujące funkcję e^z)
Funkcja e^z jest jedyną funkcją $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ taką, że spełnione są warunki

1° $f(z + w) = f(z)f(w)$ dla dowolnych liczb zespolonych z, w oraz

2° $\lim\limits_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z} = 1$. ■

Drugi warunek wymaga wyjaśnienia. Mówimy, że $\lim\limits_{z\to z_0} h(z) = G \in \mathbb{C}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{|z-z_0|\to 0}\big|h(z) - G\big| = 0$, w ostatnim wyrażeniu liczby zespolone występują tylko pozornie, więc to ostatnie pojęcie nie jest nam obce. Ta definicja jest prostym uogólnieniem pojęcia granicy funkcji znanego z przypadku rzeczywistego — chodzi o to, że jeśli odległość między z i z_0 jest dostatecznie mała, to odległość między wartością funkcji h w punkcie z i granicą G też jest mała. Rozpatrywana granica $\lim\limits_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z}$ ma być pochodną funkcji f w punkcie 0. Nasza funkcja ma być rozszerzeniem funkcji wykładniczej o podstawie e i wykładniku rzeczywistym, więc jej pochodna w punkcie 0, powinna być równa pochodnej funkcji e^x w punkcie 0, czyli powinna być równa 1.

Tego, że warunki 1° i 2° definiują funkcję wykładniczą nie będziemy dowodzić. Wcześniej wykazaliśmy, że warunek 1° jest spełniony. Naszkicujemy dowód tego, że funkcji e^z przysługuje własność 2°. Można dowieść, np. za pomocą reguły de l'Hospitala*, że $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x}=0$, $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\cos y-1}{y}=0$ i $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y-y}{y}=0$. Niech $r(x)==\frac{e^x-1-x}{x}$ dla $x\neq 0$ i $r(0)=0$, $\hat{r}(y)=\frac{\cos y-1}{y}$ dla $y\neq 0$ i $\hat{r}(0)=0$ oraz $\tilde{r}(y)==\frac{\sin y-y}{y}$ dla $y\neq 0$ i $\tilde{r}(0)=0$. Mamy więc $e^x-1=x[1+r(x)]$, $\cos y-1=y\hat{r}(y)$ oraz $\sin y=y[1+\tilde{r}(y)]$. Wobec tego

$$\frac{e^z-1}{z}=\frac{e^{x+iy}-1}{x+iy}=\frac{e^xe^{iy}-1}{x+iy}=\frac{(e^x-1)(e^{iy}-1)+(e^x-1)+(e^{iy}-1)}{x+iy}=$$

$$=\frac{x[1+r(x)]\cdot y[\hat{r}(y)+i+i\tilde{r}(y)]+x[1+r(x)]+y[\hat{r}(y)+i+i\tilde{r}(y)]}{x+iy}=$$

$$=1+\frac{xy}{x+iy}[1+r(x)][i+\hat{r}(y)+i\tilde{r}(y)]+\frac{x}{x+iy}r(x)+\frac{y}{x+iy}\big(\hat{r}(y)+i\tilde{r}(y)\big).$$

Zachodzą równości $\lim\limits_{x\to 0}r(x)=0$, $\lim\limits_{y\to 0}\hat{r}(y)=0$ oraz $\lim\limits_{y\to 0}\tilde{r}(y)=0$. Prawdziwe są też wzory $\left|\frac{x}{x+iy}\right|=\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq 1$, $\left|\frac{y}{x+iy}\right|=\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq 1$ i $\left|\frac{xy}{x+iy}\right|\leq\frac{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=$ $=\sqrt{x^2+y^2}=|z|\xrightarrow[z\to 0]{}0$. Stąd wynika, że $\lim\limits_{z\to 0}\frac{e^z-e^0}{z}=1$. ■

Z wzoru $\lim\limits_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=1$ wynika, że $\lim\limits_{z\to 0}\frac{e^{w+z}-e^w}{z}=e^w$ dla każdej liczby zespolonej w. Ostatnią równość z oczywistych powodów zwykle zapisujemy tak: $(e^w)'=e^w$.

Rozszerzając więc dziedzinę funkcji wykładniczej otrzymaliśmy funkcję, która z formalnego punktu widzenia ma własności podobne do funkcji wykładniczej w dziedzinie rzeczywistej. Są jednak istotne różnice. Nie możemy wgłębiać się w nie z braku miejsca i czasu, ale o jednej coś powiemy. Funkcja wykładnicza o podstawie e i wykładniku **rzeczywistym** jest ściśle rosnąca: jeśli $x_1<x_2$, to $e^{x_1}<e^{x_2}$. W szczególności potęgi o różnych wykładnikach są różne. To twierdzenie w zespolonym przypadku w ogóle nie ma sensu, bo nie porównujemy liczb zespolonych.

Mamy $e^{2\pi i}=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$, zatem dla każdego $z\in\mathbb{C}$ zachodzi równość $e^{z+2\pi i}=e^ze^{2\pi i}=e^z$. Funkcja wykładnicza w dziedzinie zespolonej jest więc okresowa, jej okresem jest $2\pi i$ — liczba czysto urojona. Wartościami tej funkcji są wszystkie liczby zespolone (w tym rzeczywiste) z jednym wyjątkiem: $0\neq e^z$ dla $z\in\mathbb{C}$. Wynika to natychmiast z tego, że każdą liczbę dodatnią $r=|w|$ można zapisać w postaci e^x, $x\in\mathbb{R}$. Wystarczy przyjąć $x=\ln r$ (jest to oczywiście jedyny wybór). Następnie przyjmujemy $y=\mathrm{Arg}w$ i otrzymujemy równość $w=e^z$, gdzie $z=x+iy=\ln|w|+i\mathrm{Arg}w$. Piszemy wtedy $z=\ln w$ jednak trzeba pamiętać o tym, że w dziedzinie zespolonej symbol $\ln w$ może oznaczać którąkolwiek z nieskończenie wielu liczb z, dla których zachodzi równość $w=e^z$. Można więc napisać $\ln(-1)=\pi i$ albo $\ln(-1)=-5\pi i$ itp. Logarytmów zespolonych używać nie będziemy, natomiast w niektórych przypadkach będziemy stosować potęgi o podstawie e i wykładniku

* Właściwie z definicji pochodnej i wzorów $(e^x)'=e^x$, $(\cos y)'=-\sin y$, $(\sin y)'=\cos y$.

nierzeczywistym.

Informacja:
Liczby zespolone są używane, bo w niektórych sytuacjach nie sposób się bez nich obejść. Historycznie pierwszym przypadkiem tego rodzaju był wzór na pierwiastki równania trzeciego stopnia:

$$\text{jeżeli } x^3 + px + q = 0\,, \text{ to } x = \sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} + \sqrt{\tfrac{p^3}{27} + \tfrac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} - \sqrt{\tfrac{p^3}{27} + \tfrac{q^2}{4}}}\,.$$

Wyprowadzenie tego wzoru nie jest długie, ale opuścimy je. Można przecież po prostu sprawdzić, że zdefiniowana za jego pomocą liczba jest pierwiastkiem równania $x^3 + px + q = 0$ wstawiając ją w miejsce x do tego równania. Pokażemy natomiast, że stosowanie tego wzoru może być kłopotliwe. Niech $p = -63$, $q = -162$, zajmujemy się więc równaniem $x^3 - 63x - 162 = 0$. Mamy $\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = (-21)^3 + 81^2 = -2700 < 0$. Teraz z tej liczby należy wyciągnąć pierwiastek kwadratowy. Ten pierwiastek nie jest liczbą rzeczywistą! Można pomyśleć, że to dlatego, że nasze równanie nie ma rozwiązań rzeczywistych. Tak jednak nie jest. Mamy bowiem $(-3)^3 - 63\cdot(-3) - 162 = 0$, $(-6)^3 - 63\cdot(-6) - 162 = 0$, $9^3 - 63\cdot 9 - 162 = 0$, więc nasze równanie ma trzy pierwiastki rzeczywiste! Otrzymujemy więc wzory $-3 = \sqrt[3]{81 + \sqrt{-2700}} + \sqrt[3]{81 - \sqrt{-2700}}$, $-6 = \sqrt[3]{81 + \sqrt{-2700}} + \sqrt[3]{81 - \sqrt{-2700}}$, $9 = \sqrt[3]{81 + \sqrt{-2700}} + \sqrt[3]{81 - \sqrt{-2700}}$. Wygląda to nieco podejrzanie: prawe strony są równe, a lewe różne. To jednak tylko pozór. Są dwie wartości pierwiastka kwadratowego z danej liczby zespolonej $\neq 0$ i trzy wartości pierwiastka trzeciego stopnia. Przy tej interpretacji można się spodziewać do trzydziestu sześciu pierwiastków tego równania. To jednak nie jest możliwe. Równanie stopnia trzeciego ma najwyżej trzy pierwiastki (po prostu nie można wybierać wartości pierwiastków zespolonych dowolnie). Udowodniono, że nie jest możliwe napisanie wzorów na pierwiastki równania stopnia trzeciego z użyciem dodawania, odejmowania, mnożenia, dzielenia i pierwiastkowania, które nie prowadziłyby do wyciągania pierwiastków kwadratowych z liczb ujemnych w przypadku rzeczywistych współczynników i trzech rzeczywistych pierwiastków! Oznacza to, że w tym przypadku bez liczb zespolonych obyć się nie można. Zaczęto ich więc używać w XVI wieku, choć „ich nie było". Zostały ostatecznie zaakceptowane na początku XIX wieku, gdy C.F.Gauss pokazał, że można je potraktować jako punkty płaszczyzny i że wtedy działania na liczbach zespolonych zaczynają mieć sens geometryczny. Dziś trudno sobie wyobrazić matematykę bez nich. Używają ich też niematematycy. ■

Kilka zadań

9.01 Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych

a. $z^2 + 4z + 5 = 0$; **b.** $z + \frac{1}{z} = 0$;
c. $z^2 - \bar{z}^2 = 0$; **d.** $z^2 = z$;
e. $z^{2004} = z$; **f.** $e^z = 1$;
g. $e^z = -1$; **h.** $e^z = i$;
i. $z^2 - (3+i)z + 8 - i = 0$; **j.** $z^2 - (3+7i)z - 10 + 11i = 0$;
k. $z^4 + 5z^2 + 9 = 0$; **l.** $z^4 + 8z^3 + 16z^2 + 9 = 0$;
ł. $|z+i| + |z-i| = 2$; **m.** $|z+i| + |z-i| = \sqrt{5}$;
o. $z^6 + 7z^3 - 8 = 0$; **p.** $\overline{z} = z^3$;
q. $z^8 - 15z^4 - 16 = 0$; **r.** $\overline{z} = -z^2$;
s. $z^6 + 7z^3 - 8 = 0$; **t.** $\overline{z} = z^3$.
u. $z^6 + 2^6 = 0$; **v.** $z^6 - 2^6 = 0$.

9.02 Znaleźć liczby rzeczywiste x, y, dla których

a. $(5-8i)x + (7+3i)y = 2 - i$ **b.** $(7+2i)x - (5-4i)y = -1 - i$

9.03 Przedstawić w postaci trygonometrycznej liczby zespolone

a. -5, **b.** $-1 - i$, **c.** $9 - 9i$
d. $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, **e.** $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, **f.** $1 - i\sqrt{3}$

9.04 Ze znanego wzoru na sumę pierwszych n wyrazów ciągu geometrycznego wyprowadzić wzór na sumę: $\sin\varphi + \sin(2\varphi) + \cdots + \sin n\varphi$ oraz na sumę $\cos\varphi + \cos(2\varphi) + \cdots + \cos(n\varphi)$.

9.05 $\bar{z}$ to punkt symetryczny do punktu z względem osi rzeczywistej. Znaleźć punkty symetryczne do punktu z względem

a. osi urojonej, **b.** prostej o równaniu $y = x$,
c. prostej o równaniu $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$, **d.** prostej o równaniu $y = \sqrt{3}x$.

9.06 **a.** Znaleźć zbiór X złożony z tych wszystkich liczb zespolonych z, dla których zachodzi równość $\bar{z} \cdot z \cdot |z| + |z^3 + 1| = 1$. Narysować X na płaszczyźnie.

b. Znaleźć zbiór X złożony z tych wszystkich liczb zespolonych z, dla których zachodzi równość $\bar{z} \cdot z \cdot |z| + |z^3 - i| = 1$. Narysować X na płaszczyźnie.

9.07 Niech L oznacza zbiór złożony ze wszystkich liczb zespolonych z, dla których zachodzi równość $iz = \overline{z}$. Naszkicować zbiór L na płaszczyźnie. Opisać za pomocą równania zbiór M powstały w wyniku obrócenia L o $45°$ zgodnie z ruchem wskazówek zegara wokół punktu $\mathbf{0} = (0,0)$. Można użyć liczb zespolonych, ewentualnie rzeczywistych.

9.08 Niech L oznacza zbiór złożony ze wszystkich liczb zespolonych z, dla których zachodzi równość $-iz = \overline{z}$. Naszkicować zbiór L na płaszczyźnie. Opisać za pomocą równania zbiór M powstały w wyniku obrócenia L o 45° zgodnie z ruchem wskazówek zegara wokół punktu $\mathbf{0} = (0,0)$. Można użyć liczb zespolonych, ewentualnie rzeczywistych.

9.09 Rozwiązać równanie $z^7 + 8z^4 + 4z^3 + 32 = 0$, tzn. znaleźć wszystkie zespolone rozwiązania tego równania.

9.10 Rozwiązać równanie $z^9 + 8z^6 + z^3 + 8 = 0$, tzn. znaleźć wszystkie zespolone rozwiązania tego równania.

9.11 Rozwiązać równanie $z^6 + 2z^4 + 8z^2 - 32 = 0$, tzn. znaleźć wszystkie zespolone rozwiązania tego równania.

9.12 Rozwiązać równanie $|z^3 + 2 - 2i| + |z| \cdot \overline{z} \cdot z = 2\sqrt{2}$.

9.13 Rozwiązać równanie $z^4 + 3z^2 + 6z + 10 = 0$, tzn. znaleźć wszystkie zespolone rozwiązania tego równania wiedząc, że równanie ma pierwiastek wśród liczb postaci $a + bi$, gdzie a i b są liczbami całkowitymi, dla których $a^2 + b^2 < 3$.

9.14 Rozwiązać równanie $z^{12} - z^{10} + 4z^8 + 60z^6 - 64z^4 + 256z^2 - 256 = 0$, tzn. znaleźć wszystkie zespolone rozwiązania tego równania.

9.15 Przedstawić w postaci $x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ liczby $(2+i)(3-4i)(1+2i)$, $\frac{75-25i}{4+3i}$ oraz $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)^{13} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^{27}$.