Macierze i wyznaczniki

Po poprawkach wprowadzonych 25 października 2017 r.

Zdefiniujemy teraz wyznaczniki i omówimy układy równań liniowych z wieloma niewiadomymi. Zaczniemy od definicji.

Definicja 8.1 *(***macierzy***)*

Tablicę prostokątną $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$ nazywać będziemy macierzą o m wierszach i n kolumnach. Czasem stosować będziemy oznaczenie $A = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$ lub $A = (a_{i,j})$, gdy nie będzie wątpliwości, o macierz jakiego wymiaru chodzi. ■

Macierze można mnożyć przez liczby mnożąc każdy wyraz macierzy przez tę liczbę:

$$cA = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_{1,1} & ca_{1,2} & \dots & ca_{1,n} \\ ca_{2,1} & ca_{2,2} & \dots & ca_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{m,1} & ca_{m,2} & \dots & ca_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Macierze tego **samego wymiaru** można dodawać dodając odpowiednie wyrazy:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & \dots & b_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m,1} & \dots & b_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & \dots & a_{1,n}+b_{1,n} \\ a_{2,1}+b_{2,1} & \dots & a_{2,n}+b_{n,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1}+b_{m,1} & \dots & a_{m,n}+b_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Mnożenie macierzy przez liczby i ich dodawanie z punktu widzenia własności formalnych nie różni się od dodawania liczb rzeczywistych. Inaczej jest z mnożeniem macierzy, które zaraz zdefiniujemy. Zdefiniujemy iloczyn macierzy $A = (a_{r,s})$, która ma m *kolumn* przez macierz $B = (b_{s,t})$, która ma m *wierszy*. W wyniku otrzymamy macierz $C = (c_{r,t})$, która ma tyle wierszy co macierz A i tyle kolumn co macierz B.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \dots & a_{k,m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \dots & b_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \dots & c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k,1} & c_{k,2} & \dots & c_{k,n} \end{pmatrix},$$

gdzie $c_{r,t} = \sum_{s=1}^{m} a_{r,s}b_{s,t}$ dla dowolnego $r \in \{1,2,\dots,k\}$, $t \in \{1,2,\dots,n\}$. Oznacza to, że wyraz $c_{r,t}$ macierzy C możemy potraktować jako iloczyn skalarny r–tego wiersza macierzy A i t–tej kolumny macierzy B. Właśnie po to, by móc mówić o tym iloczynie skalarnym musimy założyć, że pierwsza macierz ma tyle samo kolumn co druga wierszy. Pomnożymy teraz dwie macierze:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 5 & 1\cdot 2+2\cdot 4+3\cdot 6 \\ 4\cdot 1+5\cdot 3+6\cdot 5 & 4\cdot 2+5\cdot 4+6\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{pmatrix}.$$

A teraz pomnożymy je w przeciwnej kolejności:

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot 1+2\cdot 4 & 1\cdot 2+2\cdot 5 & 1\cdot 3+2\cdot 6\\ 3\cdot 1+4\cdot 4 & 3\cdot 2+4\cdot 5 & 3\cdot 3+4\cdot 6\\ 5\cdot 1+6\cdot 4 & 5\cdot 2+6\cdot 5 & 5\cdot 3+6\cdot 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9 & 12 & 15\\ 19 & 26 & 33\\ 29 & 40 & 51\end{pmatrix}.$$

Widać, że otrzymaliśmy różne wyniki, nawet wymiary się nie zgadzają. Oznacza to, że to mnożenie macierzy nie jest przemienne — wynik zależy od kolejności czynników! Oznacza to, że na ogół $A\cdot B \neq B\cdot A$.

Mnożenie to jest łączne, tzn. $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$. Wykażemy to twierdzenie. Niech $A = (a_{r,s})_{\substack{1\le r\le k\\ 1\le s\le l}}$, $B = (b_{s,t})_{\substack{1\le s\le l\\ 1\le t\le m}}$, $C = (c_{t,u})_{\substack{1\le t\le m\\ 1\le u\le n}}$. Znajdziemy najpierw wyraz macierzy $A\cdot B$ znajdujący się w r–tym wierszu i t–tej kolumnie: $\sum_{s=1}^{l} a_{r,s}b_{s,t}$. Wobec tego w r–tym wierszu i u–tej kolumnie iloczynu $(AB)C$ znajduje się $\sum_{t=1}^{m}\big(\sum_{s=1}^{l} a_{r,s}b_{s,t}\big)c_{t,u}$. Jest to suma iloczynów postaci $a_{r,s}b_{s,t}c_{t,u}$, w których wskaźniki s,t przyjmują dowolne dopuszczalne wartości, tzn. $1\le s\le l$, $1\le t\le m$. Powtarzając te obliczenia w przypadku iloczynu $A(BC)$ otrzymujemy $\sum_{s=1}^{l} a_{r,s}\big(\sum_{t=1}^{m} b_{s,t}c_{t,u}\big)$, co jak łatwo stwierdzić jest sumą iloczynów postaci $a_{r,s}b_{s,t}c_{t,u}$, w których wskaźniki s,t przyjmują dowolne dopuszczalne wartości, tzn. $1\le s\le l$, $1\le t\le m$, co oznacza, że otrzymaliśmy ten sam wynik, co w poprzednim iloczynie.

Bez trudu można stwierdzić, że prawdziwe są następujące stwierdzenia:

1° $A+B = B+A$ dla dowolnych macierzy A,B tego samego wymiaru;

2° $(A+B)+C = A+(B+C)$ dla dowolnych macierzy A,B,C tego samego wymiaru;

3° $A+O = O+A$ dla dowolnej macierzy A, tu i dalej O oznacza macierz tego samego wymiaru co A, w której wszystkie wyrazy są równe 0;

4° dla dowolnej macierzy A istnieje macierz B tego samego wymiaru taka, że $A+B =$ $=B+A=O$ (oczywiście $b_{i,j} = -a_{i,j}$);

5° $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$ dla dowolnych macierzy A,B,C, dla których mnożenie jest zdefiniowane;

6° $A\cdot I = A$ dla dowolnej macierzy A, I oznacza tu i dalej macierz kwadratową, która ma tyle wierszy ile A kolumn i której wszystkie wyrazy na głównej przekątnej[1] są równe 1, a poza nią są równe 0, tzn. $i_{i,i} = 1$ oraz $i_{i,j} = 0$ dla $i \neq j$; również $I\cdot A = A$, ale teraz macierz I ma tyle kolumn ile wierszy ma macierz A;

7° $A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$ i $(B+C)\cdot A = B\cdot A + C\cdot A$ dla dowolnych macierzy, dla których działania są zdefiniowane.

Macierz kwadratowa

$$I = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix},$$

[1] Główna przekątna macierzy kwadratowej $C=(c_{i,j})$ składa się z wyrazów $c_{i,i}$, łączy więc lewy górny róg macierzy z prawym dolnym.

która wystąpiła w punkcie 6° nazywana jest macierzą jednostkową, własność 6° mówi, że pełni ona w zbiorze macierzy rolę podobną do tej, którą pełni liczba 1 w mnożeniu liczb rzeczywistych. Różnica polega na tym, że jest wiele macierzy jednostkowych: w każdym wymiarze jedna.

Układ l równań liniowych z k niewiadomymi

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots + a_{1,k}x_k &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \cdots + a_{2,k}x_k &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{l,1}x_1 + a_{l,2}x_2 + a_{l,3}x_3 + \cdots + a_{l,k}x_k &= b_l \end{aligned}$$

można zapisać w postaci

$$A \cdot \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}},$$

gdzie $A = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le l\\ 1\le j\le k}}$, $\vec{\mathbf{x}}$ jest pionowo zapisanym wektorem o k współrzędnych, czyli macierzą o jednej kolumnie i k wierszach, analogicznie $\vec{\mathbf{b}}$. Niewiadomymi są $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Nie zakładamy, że liczba niewiadomych równa jest liczbie równań: może być $k < l$, $k = l$, $k > l$. Przeanalizujemy teraz rozwiązywanie układu równań liniowych. Oczywiście nie można spodziewać się, że w każdej sytuacji otrzymamy jedno rozwiązanie. Nawet wtedy, gdy liczba równań jest równa liczbie niewiadomych, układ może mieć nieskończenie wiele rozwiązań lub może ich nie mieć wcale. Będziemy mnożyć równania przez liczby różne od 0, dodawać je stronami, zmieniać kolejność równań. Nie będziemy przepisywać niewiadomych. Oznacza to, że będziemy zajmować się tzw. *rozszerzoną macierzą* układu równań liniowych, czyli macierzą

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,k} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,k} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{l,1} & a_{l,2} & \ldots & a_{l,k} & b_k \end{pmatrix},$$

bo zawiera ona wszystkie informacje o układzie równań, więc nie ma potrzeby przepisywać niewiadomych. Często używany jest termin *macierz układu* — różni się ona od macierzy rozszerzonej brakiem ostatniej kolumny.

Pokażemy na przykładach metodę zwaną *eliminacją Gaussa*[2]. Rozważymy układ równań:

$$\begin{aligned} x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 20; \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 4; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 7; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= -2\,. \end{aligned}$$

Zgodnie z zapowiedzią nie będziemy pisać niewiadomych, wystarczy macierz rozszerzona.

W macierzy $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 20 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ zamienimy pierwszy i drugi wiersz po to, by w lewym górnym rogu znalazła się jedynka:

[2] Chodzi o eliminowanie niewiadomych z kolejnych równań

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 20 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Czytelnik zechce sprawdzić, że

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 20 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 20 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

— oznacza to, że zamiast mówić o przestawianiu wierszy możemy mówić o mnożeniu macierzy z lewej strony przez odpowiednio dobraną macierz. Czytelnik zastanowi się, przez jaką macierz należy pomnożyć wyjściową macierz, by czwarty wiersz zamienił się miejscem z pierwszym lub trzecim i ogólnie, by zamieniły się miejscami wiersze i–ty oraz j–ty.

Następna operacje nie zmieni pierwszego ani drugiego wiersza, za to od trzeciego odejmiemy pierwszy pomnożony przez 2 i jednocześnie od czwartego wiersza odejmiemy pierwszy pomnożony przez 3. W rezultacie otrzymujemy:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 20 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & -14 \end{pmatrix}$$

Czytelnik zechce zwrócić uwagę na to, że

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 20 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 20 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & -14 \end{pmatrix},$$

więc również to przekształcenie macierzy można potraktować jako mnożenie jej z lewej strony przez odpowiednio dobraną macierz. Zauważmy przy okazji, że

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

co oznacza, że operację można było przeprowadzić w dwóch etapach i wtedy również można było to potraktować jak mnożenie przekształcanej macierzy z lewej strony przez odpowiednio dobraną macierz. W wyniku otrzymaliśmy macierz, w pierwszej kolumnie której występuje w jednym miejscu jedynka a — poza nią same zera. Z punktu widzenia układu równań oznacza to, że niewiadoma x_1 występuje teraz w jednym tylko równaniu, w pierwszym! Oznacza to, że pozostałe niewiadome możemy znaleźć używając pozostałych trzech równań, a następnie z pierwszego równania wyliczyć x_1.[3]

Teraz wyeliminujemy x_2 z trzeciego i z czwartego równania. Dla uproszczenia rachunków najpierw podzielimy czwarty wiersz przez 2. Otrzymamy

[3] Niewiadoma x_1 została wyeliminowana z trzech równań, kolej na x_2.

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 20\\ 0 & -3 & 3 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 1 & -2 & -7\end{pmatrix}.$$

Również ta operacja może być przedstawiona jako mnożenie macierzy z lewej strony przez odpowiednio dobraną macierz:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 20\\ 0 & -3 & 3 & -1 & -1\\ 0 & -2 & 2 & -4 & -14\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 20\\ 0 & -3 & 3 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 1 & -2 & -7\end{pmatrix}.$$

Teraz do trzeciego wiersza dodamy drugi pomnożony przez 3, a do czwartego dodamy drugi:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 20\\ 0 & 0 & 9 & 8 & 59\\ 0 & 0 & 3 & 1 & 13\end{pmatrix}.$$

Podobnie jak poprzednio można uzyskać ten sam rezultat przez mnożenie z lewej strony przez odpowiednio dobraną macierz:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 20\\ 0 & -3 & 3 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 1 & -2 & -7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 20\\ 0 & 0 & 9 & 8 & 59\\ 0 & 0 & 3 & 1 & 13\end{pmatrix}.$$

Teraz zamienimy (tylko dla uproszczenia obliczeń) miejscami trzeci i czwarty wiersz:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 20\\ 0 & 0 & 3 & 1 & 13\\ 0 & 0 & 9 & 8 & 59\end{pmatrix}.$$

I znów widzimy, że

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 20\\ 0 & 0 & 9 & 8 & 59\\ 0 & 0 & 3 & 1 & 13\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 20\\ 0 & 0 & 3 & 1 & 13\\ 0 & 0 & 9 & 8 & 59\end{pmatrix}.$$

Teraz od czwartego wiersza odejmujemy trzeci pomnożony przez 3:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 20\\ 0 & 0 & 3 & 1 & 13\\ 0 & 0 & 0 & 5 & 20\end{pmatrix}.$$

Można ten ostatni krok przedstawić w postaci mnożenia z lewej strony przez macierz:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 20\\ 0 & 0 & 3 & 1 & 13\\ 0 & 0 & 9 & 8 & 59\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 20\\ 0 & 0 & 3 & 1 & 13\\ 0 & 0 & 0 & 5 & 20\end{pmatrix}.$$

W zasadzie zrobiliśmy nieomal wszystko: w czwartym równaniu jest już tylko jedna niewiadoma, w trzecim — dwie, w drugim — trzy, tylko w pierwszym są wszystkie. Oznacza to, że możemy znaleźć kolejno wartości niewiadomych. Zrobimy to nie używając w dalszym ciągu niewiadomych jawnie. Podzielimy najpierw ostatni wiersz przez 5:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 20 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

— było to mnożenie z lewej strony przez macierz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

Teraz wyeliminujemy x_4 z pierwszych trzech równań: odejmujemy czwarty wiersz od trzeciego i pierwszego, a od drugiego odejmujemy czwarty pomnożony przez 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Wykonaliśmy teraz takie mnożenie:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 20 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Teraz dzielimy trzeci wiersz przez 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Usuniemy teraz x_3 z pierwszych dwóch równań:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ostatnia operacja to usunięcie x_2 z pierwszego równania:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

No to wszystko się udało i po tych przekształceniach układ równań przybrał taką postać:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1; \\ x_2 &= 2; \\ x_3 &= 3; \\ x_4 &= 4; \end{aligned}$$

co oznacza, że udało nam się go rozwiązać! Ma on dokładnie jedno rozwiązanie. Pokazaliśmy, że rozwiązywanie układu można potraktować jako mnożenie przez kolejne macierze (uwaga na kolejność!)

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 1 & 0\\ -3 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{7}{15} & \frac{11}{30}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{15} & \frac{4}{15}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{15}\end{pmatrix}.$$

Widzimy więc, że rozwiązywanie układu równań można interpretować jako mnożenie macierzy:

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{7}{15} & \frac{11}{30}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{15} & \frac{4}{15}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{15}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3 & 20\\ 1 & 1 & -1 & 1 & 4\\ 2 & -1 & 1 & 1 & 7\\ 3 & 1 & -1 & -1 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4\end{pmatrix}.$$

Dodać należy, że mnożąc wiersze przez liczby, dodając je, zmieniając ich kolejność wykonywaliśmy operacje odwracalne, zawsze mogliśmy przekształcić macierz „z powrotem". Dzięki temu wszystkie kolejne układy równań były równoważne, zatem ostatni układ równań był równoważny pierwszemu.

Omówimy jeszcze jeden przykład, ale już nie będziemy tłumaczyć, jak operacje na wierszach macierzy można zastąpić mnożeniem z lewej strony przez odpowiednio dobraną macierz.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + \ \ x_3 &= 0;\\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 &= 0;\\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0.\end{aligned}$$

Zaczniemy od wypisania macierzy rozszerzonej tego układu:

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\ 4 & -5 & 2 & 0\\ 5 & 2 & -3 & 0\end{pmatrix}.$$

Teraz odejmiemy od drugiego wiersza pierwszy pomnożony przez 4, a od wiersza trzeciego — pierwszy pomnożony przez 5:

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & -2 & 0\\ 0 & 12 & -8 & 0\end{pmatrix}.$$

Teraz od trzeciego wiersza odejmujemy drugi pomnożony przez 4:

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Dzielimy drugi wiersz przez 3:

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Dodajemy do pierwszego wiersza drugi pomnożony przez 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tym razem rezultat jest ale nieco inny niż poprzednio. Układ ma nieskończenie wiele rozwiązań. Wartość x_3 jest dowolna i wtedy $x_1 = \frac{1}{3}x_3$, $x_2 = \frac{2}{3}x_3$. Jak widać może się tak zdarzyć również wtedy, gdy liczba równań jest równa liczbie niewiadomych. Obejrzymy ten sam układ po drobnej zmianie:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + \ \ x_3 &= 0; \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 &= 3; \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 6. \end{aligned}$$

Wykonujemy kolejno te same operacje, które wykonaliśmy przed chwilą. Różnica pojawi się tylko w czwartej kolumnie (czyli po prawej stronie równań). Otrzymujemy w końcu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Układ jest więc sprzeczny — równanie $0 = -6$ rozwiązań nie ma. Natomiast bez trudu stwierdzamy, że punkt $(\frac{1}{3}x_3 + 2, \frac{2}{3}x_3 + 1, x_3) = (2, 1, 0) + x_3(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1)$ jest rozwiązaniem zarówno pierwszego jak i drugiego równania dla każdej liczby x_3, więc jest rozwiązaniem układu

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + \ \ x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}.$$

Do przekształcania dwóch pierwszych równań nie użyliśmy ani razu równania trzeciego, zatem ten ostatni układ dwóch równań jest równoważny układowi

$$\begin{aligned} x_1 - \tfrac{1}{3}x_3 &= 2 \\ x_2 - \tfrac{2}{3}x_3 &= 1 \end{aligned}.$$

Przekształcając w podobny sposób układ

$$\begin{aligned} 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 6 \end{aligned}.$$

stwierdzamy, że jest on spełniony przez punkt $(\frac{16}{11}, 1, \frac{12}{11})$ i że dla każdej liczby t trójka

$$(\tfrac{16}{11} + t, 1 + 2t, \tfrac{12}{11} + 3t) = (\tfrac{16}{11}, 1, \tfrac{12}{11}) + t(1, 2, 3)$$

również jest rozwiązaniem tego układu dwóch równań.

Została jeszcze jedna możliwość:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + \ \ x_3 &= 0; \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 6. \end{aligned}$$

Bez trudu stwierdzamy, że punkt $(1, \frac{1}{2}, 0)$ spełnia ten układ równań oraz że dla każdej liczby t układ ten spełniony jest przez $(1, \frac{1}{2}, 0) + t(1, 2, 3) = (1 + t, \frac{1}{2} + 2t, 3t)$.

Widzimy więc, że chociaż układ trzech równań jest sprzeczny, to układy dowolnych dwóch mają rozwiązania, które jesteśmy w stanie opisać. Geometria związana z tymi równaniami nie jest skomplikowana. Każde z równań opisuje jakąś płaszczyznę. W przypadku układu

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + \ \ x_3 &= 0; \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 &= 0; \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0. \end{aligned}$$

te trzy płaszczyzny mają wspólną prostą przechodzącą przez punkt $\vec{\mathbf{0}} = (0, 0, 0)$, równoległą do wektora $(1, 2, 3)$. W przypadku układu

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0;\\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 &= 3;\\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 6. \end{aligned}$$

jest nieco inaczej. Przesunięte zostały dwie płaszczyzny. W wyniku tego nie ma punktu wspólnego dla trzech płaszczyzn, ale każde dwie mają wspólną prostą . Każda z trzech prostych jest równoległa do wektora $(1, 2, 3)$.

Bez trudu można zauważyć, że za pomocą opisanych przekształceń macierzy rozszerzonej można ją doprowadzić do postaci **schodkowej**: każdy następny wiersz zawierać będzie więcej zer na początku, czyli w odpowiadającym temu wierszowi równaniu wystąpi mniej niewiadomych niż w poprzednim.[4] Jeśli ostatni niezerowy wiersz zawiera tylko jeden wyraz różny od 0 i to na samym końcu, to układ jest sprzeczny. Jeśli nie, to ma rozwiązania. Może zdarzyć się, że rozwiązań jest nieskończenie wiele, a może też zdarzyć się, że tylko jedno. W szczegóły nie będziemy wchodzić. Warto jednak nadmienić, że jeśli znajdziemy dwa rozwiązania układu liniowego, np. $\vec{\mathbf{x}}$ i $\vec{\mathbf{y}}$, to dla każdej liczby rzeczywistej α wektor $\alpha\vec{\mathbf{x}} + (1-\alpha)\vec{\mathbf{y}}$ również okaże się rozwiązaniem. Mamy bowiem: $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ i $A\vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{b}}$, zatem

$$A\big(\alpha\vec{\mathbf{x}} + (1-\alpha)\vec{\mathbf{y}}\big) = \alpha A\vec{\mathbf{x}} + (1-\alpha)A\vec{\mathbf{y}} = \alpha\vec{\mathbf{b}} + (1-\alpha)\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{b}}.$$

Zbiór punktów postaci $\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y} = \mathbf{y} + \alpha(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, $\alpha \in \mathbb{R}$, to prosta przechodząca przez punkt $\mathbf{y}$ w kierunku wektora $\overrightarrow{\mathbf{x} - \mathbf{y}}$, więc przechodząca również przez punkt $\mathbf{x}$. Wykazaliśmy, że wraz z każdymi dwoma punktami zbiór rozwiązań układu liniowego zawiera prostą, która przechodzi przez te punkty. Takie zbiory matematycy nazywają **podprzestrzeniami afinicznymi**.

Podprzestrzenie afiniczne przechodzące przez $\mathbf{0}$ nazywane są **liniowymi**. Podprzestrzenie liniowe mają tę szczególną własność, że suma wektorów z takiej podprzestrzeni jest jej elementem. To samo dotyczy iloczynu wektora przez liczbę. Mamy z nimi do czynienia w przypadku rozwiźań równania $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ Później okaże się, że są one szczególnie ważne również z powodów algebraicznych.

Z macierzami kwadratowymi wiążą się wyznaczniki. Przypomnijmy ich definicję.

Definicja 8.2 (wyznacznika macierzy kwadratowej)
Wyznacznikiem $\det(A) = |A|$ macierzy $(a_{1,1})$ nazywamy liczbę $a_{1,1}$. Załóżmy, że zdefiniowaliśmy już wyznaczniki macierzy kwadratowych wymiaru mniejszego niż n. Niech $A = (a_{i,j})$ będzie macierzą o n wierszach i n kolumnach. Wyznacznikiem $\det(A) = |A|$ macierzy A nazywamy liczbę

$$a_{1,1}\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n}\\ a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & a_{3,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} - a_{1,2}\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n}\\ a_{3,1} & a_{3,3} & \dots & a_{3,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n,1} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \dots +$$

$$+(-1)^{1+n}a_{1,n}\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n-1}\\ a_{3,1} & a_{3,2} & \dots & a_{3,n-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}. \quad \blacksquare$$

[4] Interesuje nas tylko początkowy blok samych zer, zera występujące na dalszych miejscach nic nas chwilowo nie obchodzą.

Na wszelki wypadek opiszemy słowami ten wzór. Wyznacznik macierzy 1×1, to po prostu jedyny jej wyraz (w tym przypadku lepiej pisać np. $\det(-2) = -2$ niż używać pionowych kresek i ryzykować skojarzenie z wartością bezwzględną). Wyznacznik macierzy $n \times n$ znajdujemy rozwijając go względem pierwszego wiersza: liczbę $(-1)^{1+j}a_{1,j}$ mnożymy przez wyznacznik macierzy wymiaru $n-1 \times n-1$ powstałej z danej macierzy przez wykreślenie pierwszego wiersza i j–tej kolumny. Pokażemy na przykładach jak to działa.

$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 - 5 \cdot 2 = -3$ i ogólnie $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$;

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \big[(-5)\cdot(-3) - 2\cdot 2\big] - (-2)\cdot\big[4\cdot(-3) - 2\cdot 5\big] + 1\cdot\big[4\cdot 2 - (-5)\cdot 5\big] = 11 + 2\cdot(-22) + 33 = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}\right) + 2\left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\right) -$$

$$- 3\left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= -(0 - 5 - 5) + 2(0 + 5 + 5) - 3(0 + 5 - 5) = 10 + 20 - 0 = 30.$$

Mamy nadzieję, że definicja została wyjaśniona. Pokażemy teraz jeszcze najprostsze zastosowania pojęcia wyznacznika. Udowodniliśmy, że pole równoległoboku rozpiętego przez wektory (u_1, u_2), (v_1, v_2) równe jest $|u_1v_2 - u_2v_1|$. Możemy więc napisać, że to pole równe jest $\left|\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\right|$.[5] Kwadrat pola równoległoboku rozpiętego przez wektory $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^3$ jest równy

$$\|\vec{\mathbf{u}}\|^2\|\vec{\mathbf{v}}\|^2 - (\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}})^2 = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{u}} & \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} \\ \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{u}} & \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}} \end{vmatrix}$$

— ten wyznacznik nazywany jest wyznacznikiem Grama wektorów $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}$. Można też rozważać wyznacznik Grama trzech lub większej liczby wektorów, ale o tym opowiemy później.

Niech $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$. Wtedy

$$\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\right) = (u_2v_3 - u_3v_2, -u_1v_3 + u_3v_1, u_1v_2 - u_2v_1).$$

Widać więc, że jeśli spamiętamy, co to jest wyznacznik, to nie będziemy mieć kłopotu z iloczynem wektorowym. Po zapoznaniu się z własnościami wyznaczników przekonamy się, że mogą nam jeszcze w co najmniej kilku przypadkach ułatwić życie.

Do sformułowania twierdzenia opisującego podstawowe własności wyznaczników przyda nam się następujące oznaczenie: $D_{i;j}$ oznacza wyznacznik macierzy powstałej z macierzy A

[5] Niskie pionowe kreski oznaczają wartość bezwzględną, wysokie — wyznacznik.

przez wykreślenie i–tego wiersza i j–tej kolumny, $D_{i,j;k,l}$ oznacza wyznacznik macierzy powstałej z A przez wykreślenie i–tego i j–tego wiersza oraz kolumn o numerach k, l. Niech

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Zachodzi wtedy

Twierdzenie 8.3 (o podstawowych własnościach wyznacznika)

1° Dla dowolnej liczby $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ zachodzi równość
$\det(A) = (-1)^{i+1} a_{i,1} D_{i,1} + (-1)^{i+2} a_{i,2} D_{i,2} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{i,n} D_{i,n}$ — jest to rozwinięcie Laplace'a względem i–tego wiersza;

2° Dla dowolnej liczby $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ zachodzi równość
$\det(A) = (-1)^{1+j} a_{1,j} D_{1,j} + (-1)^{2+j} a_{2,j} D_{2,j} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{n,j} D_{n,j}$ — jest to rozwinięcie Laplace'a względem i–tej kolumny;

3° Zachodzi równość

$$\det(A) = (-1)^{1+2+1+2} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} D_{1,2;1,2} + (-1)^{1+2+1+3} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,3} \end{vmatrix} D_{1,2;1,3} +$$

$$+ \cdots + (-1)^{1+2+1+n} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,n} \end{vmatrix} D_{1,2;1,n} + (-1)^{1+2+2+3} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix} D_{1,2;2,3} +$$

$$+(-1)^{1+2+2+4} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,4} \\ a_{2,2} & a_{2,4} \end{vmatrix} D_{1,2;2,4} + \cdots + (-1)^{1+2+2+n} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,n} \\ a_{2,2} & a_{2,n} \end{vmatrix} D_{1,2;2,n} +$$

$$+ \cdots + (-1)^{1+2+n-1+n} \begin{vmatrix} a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{2,n-1} & a_{2,n} \end{vmatrix} D_{1,2;n-1,n}$$

— jest rozwinięcie Laplace'a względem dwóch pierwszych wierszy. Występuje w tej sumie $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ składników (2 kolumny spośród n kolumn wybrać można na $\binom{n}{2}$ sposoby). Wykładnik potęgi to suma numerów wierszy (czyli $1 + 2$) i numerów kolumn, z których wybrane zostały wyrazy wyznacznika 2×2;

4° Jeśli jakiś wiersz (lub kolumnę) pomnożymy przez liczbę c, to wyznacznik też zostanie pomnożony przez c.

5° Jeśli zamienimy miejscami dwa wiersze (dwie kolumny), to wyznacznik zmieni znak, w szczególności jeśli dwa wiersze (dwie kolumny) pokrywają się, to wyznacznik jest równy 0;

6° Jeśli do jednego wiersza dodamy drugi pomnożony przez jakąkolwiek liczbę, to wyznacznik nie ulegnie zmianie.

7° Jeśli $a_{i,j} = b_{i,j}$ dla wszystkich j i wszystkich $i \neq i_0$, to $\det(a_{i,j}) + \det(b_{i,j}) = = \det(c_{i,j})$, gdzie $c_{i,j} = a_{i,j} = b_{i,j}$ dla $i \neq i_0$ oraz $c_{i_0,j} = a_{i_0,j} + b_{i_0,j}$, czyli wyznaczniki, w których wszystkie wiersze są identyczne z jednym wyjątkiem dodajemy sumując wyjątkowe wiersze w obu, a pozostałe przepisujemy.

Obliczanie wyznaczników na podstawie tej definicji lub definicji klasycznej, której nawet nie przytoczymy, prowadzi do wielu rachunków, które w wypadku wyznaczników dużego wymiaru są kłopotliwe nawet przy użyciu komputerów. Twierdzenie o podstawowych własnościach wyznacznika pozwoli upraszczać te rachunki. Zanim udowodnimy własności 1° — 7° pokażemy na przykładzie, jak można z nich korzystać. Obliczymy jeszcze raz wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Będziemy stosować sformułowane właśnie własności własności doprowadzając wyznacznik do jak najprostszej postaci. Mamy więc kolejno

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \overset{5^\circ}{=\!=} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \overset{6^\circ}{=\!=} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \end{vmatrix} \underset{\text{wg. I kol.}}{\overset{2^\circ}{=\!=\!=\!=}}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -4 \end{vmatrix} \overset{6^\circ}{=\!=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 8 \\ 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} \underset{\text{wg. I kol.}}{\overset{2^\circ}{=\!=\!=\!=}} -\begin{vmatrix} 9 & 8 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} \overset{4^\circ}{=\!=} -3\cdot\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \overset{4^\circ}{=\!=}$$

$$= -3\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -6\cdot(3-8) = 30.$$

Jak widać rachunki nie były przesadnie skomplikowane. Jasne jest, że celem tych przekształceń było doprowadzanie do pojawiania się wielu zer w jednej kolumnie, a następnie rozwinięcie względem tej kolumny, co pozwalało na kolejne zmniejszanie wymiaru wyznacznika. Nie będziemy mnożyć przykładów tego rodzaju, bo każdy sam powinien obliczyć kilka wyznaczników, by dojść do pewnej wprawy w ich przekształcaniu.

Udowodnimy teraz twierdzenie o podstawowych własnościach wyznaczników. Zacznijmy od stwierdzenia, że w przypadku wyznaczników macierzy wymiaru 2×2 wszystkie części twierdzenia można łatwo sprawdzić bezpośrednio z definicji. Założymy, że twierdzenie zachodzi dla wszystkich wyznaczników wymiarów mniejszych niż 5 i wykażemy jego prawdziwość dla wyznaczników wymiaru 5. Dowód ogólny różni się od tego, który podamy za chwilę, tym jedynie, że zamiast liczby 5 pojawić się musi literka n. Obliczany wyznacznik oznaczamy przez D. Zaczniemy od wykazania własności 3°. Mamy

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} \end{vmatrix} = a_{1,1}\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} \end{vmatrix} -$$

$$-a_{1,2}\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{3,1} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{4,1} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ a_{5,1} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} \end{vmatrix} + a_{1,3}\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,4} & a_{5,5} \end{vmatrix} -$$

$$-a_{1,4}\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,5} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,5} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,5} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,5} \end{vmatrix} + a_{1,5}\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= a_{1,1}D_{1;1} - a_{1,2}D_{1;2} + a_{1,3}D_{1;3} - a_{1,4}D_{1;4} + a_{1,5}D_{1;5} = \\
&= a_{1,1}\big(a_{2,2}D_{1,2;1,2} - a_{2,3}D_{1,2;1,3} + a_{2,4}D_{1,2;1,4} - a_{2,5}D_{1,2;1,5}\big) - \\
&\qquad - a_{1,2}\big(a_{2,1}D_{1,2;1,2} - a_{2,3}D_{1,2;2,3} + a_{2,4}D_{1,2;2,4} - a_{2,5}D_{1,2;2,5}\big) + \\
&\qquad\qquad + a_{1,3}\big(a_{2,1}D_{1,2;1,3} - a_{2,2}D_{1,2;2,3} + a_{2,4}D_{1,2;3,4} - a_{2,5}D_{1,2;3,5}\big) - \\
&\qquad\qquad\qquad - a_{1,4}\big(a_{2,1}D_{1,2;1,4} - a_{2,2}D_{1,2;2,4} + a_{2,3}D_{1,2;3,4} - a_{2,5}D_{1,2;4,5}\big) + \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + a_{1,5}\big(a_{2,1}D_{1,2;1,5} - a_{2,2}D_{1,2;2,5} + a_{2,3}D_{1,2;3,5} - a_{2,4}D_{1,2;4,5}\big) = \\
&= \big(a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}\big)D_{1,2;1,2} - \big(a_{1,1}a_{2,3} - a_{1,3}a_{2,1}\big)D_{1,2;1,3} + \\
&\quad + \big(a_{1,1}a_{2,4} - a_{1,4}a_{2,1}\big)D_{1,2;1,4} - \big(a_{1,1}a_{2,5} - a_{1,5}a_{2,1}\big)D_{1,2;1,5} + \\
&\qquad + \big(a_{1,2}a_{2,3} - a_{1,3}a_{2,2}\big)D_{1,2;2,3} - \big(a_{1,2}a_{2,4} - a_{1,4}a_{2,2}\big)D_{1,2;2,4} + \\
&\qquad\quad + \big(a_{1,2}a_{2,5} - a_{1,5}a_{2,2}\big)D_{1,2;2,5} + \big(a_{1,3}a_{2,4} - a_{1,4}a_{2,3}\big)D_{1,2;3,4} - \\
&\qquad\qquad - \big(a_{1,3}a_{2,5} - a_{1,5}a_{2,3}\big)D_{1,2;3,5} + \big(a_{1,4}a_{2,5} - a_{1,5}a_{2,4}\big)D_{1,2;4,5} = \\
&= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} D_{1,2;1,2} - \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,3} \end{vmatrix} D_{1,2;1,3} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,4} \end{vmatrix} D_{1,2;1,4} - \\
&\qquad - \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,5} \\ a_{2,1} & a_{2,5} \end{vmatrix} D_{1,2;1,5} + \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix} D_{1,2;2,3} - \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,4} \\ a_{2,2} & a_{2,4} \end{vmatrix} D_{1,2;2,4} + \\
&\qquad\qquad + \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,5} \\ a_{2,2} & a_{2,5} \end{vmatrix} D_{1,2;2,5} + \begin{vmatrix} a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,3} & a_{2,4} \end{vmatrix} D_{1,2;3,4} - \\
&\qquad\qquad\qquad - \begin{vmatrix} a_{1,3} & a_{1,5} \\ a_{2,3} & a_{2,5} \end{vmatrix} D_{1,2;3,5} + \begin{vmatrix} a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{2,4} & a_{2,5} \end{vmatrix} D_{1,2;4,5}.
\end{aligned}$$

Zakończyliśmy dowód własności 3°. Po zakończeniu dowodu całego twierdzenia to samo rozumowanie zostało zapisane bez dodatkowych oznaczeń. Można więc sobie obejrzeć jak to wygląda.

Może wypada dodać, że ten dowód można przeprowadzić nie używając aż tylu wzorów. Jest jasne, że jeśli rozwijamy wyznacznik najpierw według pierwszego wiersza, a potem według drugiego, to w rozwinięciu pojawią się wszystkie wyznaczniki postaci $D_{1,2;i,j}$, $i < j$, bo „wycinamy” z macierzy dwa pierwsze wiersze i jakieś dwie kolumny. Należy zobaczyć z jakim współczynnikiem ten wyznacznik się pojawi. Możemy z pierwszego wiersza wybrać i–ty wyraz a z drugiego j–ty lub odwrotnie. W pierwszym przypadku współczynnik jest równy $(-1)^{1+i}a_{1,i}(-1)^{1+j-1}a_{2,j} = (-1)^{1+i+j}a_{1,i}a_{2,j}$, bo wyraz $a_{2,j}$ to $j-1$–y wyraz w wyznaczniku powstałym po usunięciu pierwszego wiersza i i–tej kolumny. W drugim przypadku współczynnik równy jest $(-1)^{1+j}a_{1,j}(-1)^{1+i} = (-1)^{2+i+j}a_{1,j}a_{1,i}$. Stąd wynika, że wyznacznik $D_{1,2;i,j}$ pojawia się ze współczynnikiem

$$(-1)^{1+i+j}\begin{vmatrix} a_{1,i} & a_{1,j} \\ a_{2,i} & a_{2,j} \end{vmatrix} = (-1)^{1+2+i+j}\begin{vmatrix} a_{1,i} & a_{1,j} \\ a_{2,i} & a_{2,j} \end{vmatrix}.$$

W wykładniku występuje więc suma numerów wszystkich tych wierszy i kolumn, które „wycięliśmy”. W tym rozumowaniu wymiar macierzy nie odgrywał najmniejszej roli, nawet z punktu widzenia zapisu.

W ten sposób wykazana została własność trzecia dla wyznaczników macierzy wymiaru

5×5. Z niej natychmiast wynika, że jeśli zamienimy miejscami wiersz pierwszy i drugi, to cały wyznacznik zmieni znak (bo tak jest w przypadku wyznaczników macierzy 2×2). Jeśli zamienimy miejscami którekolwiek dwa wiersze o numerach większych niż 1, to zmienią znaki wszystkie wyznaczniki macierzy 4×4, zatem cały wyznacznik zmieni znak. Zamianę miejsc wiersza pierwszego i np. czwartego zrealizować można jako trzy kolejne zamiany: pierwszy z drugim, drugi z czwartym i wreszcie pierwszy z drugim. To oznacza, że w wyniku zamiany miejscami dwóch wierszy wyznacznik zmienia znak.

Teraz wykażemy, że to samo jest prawdą w wyniku zamiany miejscami dwu sąsiednich (na razie) kolumn. Jeśli np. zamieniamy miejscami kolumnę trzecią i czwartą, to wyrazy $a_{1,3}$ i $a_{1,4}$ wystąpią w rozwinięciu wyznacznika ze zmienionymi znakami, natomiast wyznaczniki przez które mnożymy te wyrazy nie ulegną zmianie. Znaki, z którymi występują $a_{1,1}$, $a_{1,2}$ i $a_{1,5}$ nie zmienią się, ale zmieni się kolejność kolumn w wyznacznikach, przez które mnożymy te wyrazy, więc te wyznaczniki (macierzy 4×4) zmienią znak. Zamianę miejscami dwu kolumn niesąsiednich realizujemy jako wiele zamian kolumn sąsiednich, np. zamiana drugiej kolumny z piątą to ciąg zamian: druga z trzecią, trzecia z czwartą, czwarta z piątą, czwarta z trzecią, trzecia z drugą. W opisanym przypadku zamienialiśmy kolejne kolumny 5 razy, czyli wyznacznik zmieniał znak 5, więc go zmienił. Bez trudu stwierdzamy, że liczba zamian kolejnych kolumn jest zawsze nieparzysta. Wykazana została własność piąta.

Czwarta też bardzo łatwo wynika z prawdziwości twierdzenia dla wyznaczników niższego wymiaru: mnożenie pierwszego wiersza przez liczbę c z definicji wyznacznika powoduje pomnożenie go przez c. Pomnożenie innego wiersza powoduje pomnożenie każdego z wyznaczników stopnia 4 występujących w definicji wyznacznika stopnia 5 przez c, więc również w tym przypadku wyznacznik zostaje pomnożony przez c. Podobnie jest z kolumnami: w każdym iloczynie $a_{1,j}D_{1;j}$ mnożony przez c jest dokładnie jeden czynnik, więc iloczyn mnożony jest przez c. To kończy dowód własności czwartej.

Rozwijanie wg. dowolnego wiersza jest możliwe, bo zamieniamy wiersz pierwszy z tym, wg. którego mamy ochotę rozwinąć wyznacznik, następnie rozwijamy wg. pierwszego wiersza, następnie w wyznacznikach stopnia cztery zamieniamy pierwszy wiersz z tym, w którym znalazły się wyrazy $a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots$

Wykażemy, że wyznaczniki można rozwijać względem kolumn. Ponieważ już wiemy, że można przestawiając kolumny zmieniamy jedynie znak wyznacznika, więc wystarczy wykazać, że można wyznacznik rozwinąć względem pierwszej kolumny. Należy udowodnić, że wyznacznik D jest równy

$$a_{1,1}D_{1;1} - a_{2,1}D_{2;1} + a_{3,1}D_{3;1} - a_{4,1}D_{4;1} + a_{5,1}D_{5;1}.$$

Rozwijamy każdy z wyznaczników $D_{i;1}$, $i = 2, 3, 4, 5$, względem pierwszego wiersza. W wyniku tego pojawiają się wyznaczniki $D_{1,i;1;j}$. Współczynnik przy wyznaczniku $D_{1,i;1;j}$ to:

$$(-1)^{i+1}a_{i,1} \cdot (-1)^{1+j-1}a_{1,j} = (-1)^{i+j+1}a_{i,1}a_{1,j}$$

— wyraz $a_{1,j}$ znajduje się w $j-1$ kolumnie wyznacznika $D_{i,1}$.

Teraz rozwijamy wyznacznik D względem pierwszego wiersza:

$$D = a_{1,1}D_{1;1} - a_{1,2}D_{1;2} + a_{1,3}D_{1;3} - a_{1,4}D_{1;4} + a_{1,5}D_{1;5}.$$

Teraz rozwijamy każdy z wyznaczników $D_{1;j}$, $j = 2, 3, 4, 5$, względem jego pierwszej kolumny. W rozwinięciu pojawi się wyznacznik $D_{1,i;1,j}$ ze współczynnikiem

$$(-1)^{1+j}a_{1,j}(-1)^{i-1+1}a_{i,1} = (-1)^{i+j+1}a_{1,j}a_{i,1},$$

czyli z takim samym jak poprzednio. Wynika z tego, że

$$a_{1,1}D_{1;1} - a_{2,1}D_{2;1} + a_{3,1}D_{3;1} - a_{4,1}D_{4;1} + a_{5,1}D_{5;1} =$$
$$= a_{1,1}D_{1;1} - a_{1,2}D_{1;2} + a_{1,3}D_{1;3} - a_{1,4}D_{1;4} + a_{1,5}D_{1;5} = D,$$

a to kończy dowód tej części twierdzenia.

To, że dwa wyznaczniki, w których wszystkie wiersze z wyjątkiem i–tego są identyczne można dodawać dodając i–te wiersze (własność 7°) wynika od razu z tego, że można rozwinąć wyznacznik względem dowolnego, np. i–tego wiersza. Stąd i z tego, że wyznacznik, w którym dwa wiersze się pokrywają jest równy 0 oraz z tego, że mnożenie wiersza przez liczbę c jest równoważne mnożeniu wyznacznika przez c, wynika, że dodanie do i–tego wiersza wiersza j–tego pomnożonego przez c nie zmienia wyznacznika: do danego wyznacznika dodajemy wyznacznik różniący się od danego tylko tym, że w miejscu i–tego wiersza pojawia się j–ty pomnożony przez c, czyli dodajemy 0. W ten sposób zakończyliśmy dowód twierdzenia. ■

Na deser pokazujemy jak wygląda uzasadnienie własności trzeciej bez wprowadzania dodatkowych oznaczeń, ale to tylko ciekawostka, a nie zachęta (wręcz próba zniechęcenia) do dowodzenia w ten sposób.

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} \end{vmatrix} = a_{1,1}\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} \end{vmatrix} -$$

$$-a_{1,2}\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{3,1} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{4,1} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ a_{5,1} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} \end{vmatrix} + a_{1,3}\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,4} & a_{5,5} \end{vmatrix} -$$

$$-a_{1,4}\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,5} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,5} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,5} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,5} \end{vmatrix} + a_{1,5}\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{1,1}\left(a_{2,2}\begin{vmatrix} a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} \end{vmatrix} - a_{2,3}\begin{vmatrix} a_{3,2} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{4,2} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ a_{5,2} & a_{5,4} & a_{5,5} \end{vmatrix} + a_{2,4}\begin{vmatrix} a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,5} \\ a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,5} \\ a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,5} \end{vmatrix} - \right.$$

$$\left. -a_{2,5}\begin{vmatrix} a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \\ a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} \end{vmatrix} \right) - a_{1,2}\left(a_{2,1}\begin{vmatrix} a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} \end{vmatrix} - a_{2,3}\begin{vmatrix} a_{3,1} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{4,1} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ a_{5,1} & a_{5,4} & a_{5,5} \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. +a_{2,4}\begin{vmatrix} a_{3,1} & a_{3,3} & a_{3,5} \\ a_{4,1} & a_{4,3} & a_{4,5} \\ a_{5,1} & a_{5,3} & a_{5,5} \end{vmatrix} - a_{2,5}\begin{vmatrix} a_{3,1} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,3} & a_{4,4} \\ a_{5,1} & a_{5,3} & a_{5,4} \end{vmatrix} \right) + a_{1,3}\left(a_{2,1}\begin{vmatrix} a_{3,2} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{4,2} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ a_{5,2} & a_{5,4} & a_{5,5} \end{vmatrix} - \right.$$

$$\left. -a_{2,2}\begin{vmatrix} a_{3,1} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{4,1} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ a_{5,1} & a_{5,4} & a_{5,5} \end{vmatrix} + a_{2,4}\begin{vmatrix} a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,5} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,5} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,5} \end{vmatrix} - a_{2,5}\begin{vmatrix} a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,4} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,4} \end{vmatrix} \right) -$$

$$-a_{1,4}\left(a_{2,1}\begin{vmatrix}a_{3,2}&a_{3,3}&a_{3,5}\\a_{4,2}&a_{4,3}&a_{4,5}\\a_{5,2}&a_{5,3}&a_{5,5}\end{vmatrix}-a_{2,2}\begin{vmatrix}a_{3,1}&a_{3,3}&a_{3,5}\\a_{4,1}&a_{4,3}&a_{4,5}\\a_{5,1}&a_{5,3}&a_{5,5}\end{vmatrix}+a_{2,3}\begin{vmatrix}a_{3,1}&a_{3,2}&a_{3,5}\\a_{4,1}&a_{4,2}&a_{4,5}\\a_{5,1}&a_{5,2}&a_{5,5}\end{vmatrix}-\right.$$

$$\left.-a_{2,5}\begin{vmatrix}a_{3,1}&a_{3,2}&a_{3,3}\\a_{4,1}&a_{4,2}&a_{4,3}\\a_{5,1}&a_{5,2}&a_{5,3}\end{vmatrix}\right)+a_{1,5}\left(a_{2,1}\begin{vmatrix}a_{3,2}&a_{3,3}&a_{3,4}\\a_{4,2}&a_{4,3}&a_{4,4}\\a_{5,2}&a_{5,3}&a_{5,4}\end{vmatrix}-a_{2,2}\begin{vmatrix}a_{3,1}&a_{3,3}&a_{3,4}\\a_{4,1}&a_{4,3}&a_{4,4}\\a_{5,1}&a_{5,3}&a_{5,4}\end{vmatrix}+\right.$$

$$\left.+a_{2,3}\begin{vmatrix}a_{3,1}&a_{3,2}&a_{3,4}\\a_{4,1}&a_{4,2}&a_{4,4}\\a_{5,1}&a_{5,2}&a_{5,4}\end{vmatrix}-a_{2,4}\begin{vmatrix}a_{3,1}&a_{3,2}&a_{3,3}\\a_{4,1}&a_{4,2}&a_{4,3}\\a_{5,1}&a_{5,2}&a_{5,3}\end{vmatrix}\right)=$$

$$=\Big(a_{1,1}a_{2,2}-a_{1,2}a_{2,1}\Big)\begin{vmatrix}a_{3,3}&a_{3,4}&a_{3,5}\\a_{4,3}&a_{4,4}&a_{4,5}\\a_{5,3}&a_{5,4}&a_{5,5}\end{vmatrix}-\Big(a_{1,1}a_{2,3}-a_{1,3}a_{2,1}\Big)\begin{vmatrix}a_{3,2}&a_{3,4}&a_{3,5}\\a_{4,2}&a_{4,4}&a_{4,5}\\a_{5,2}&a_{5,4}&a_{5,5}\end{vmatrix}+$$

$$+\Big(a_{1,1}a_{2,4}-a_{1,4}a_{2,1}\Big)\begin{vmatrix}a_{3,2}&a_{3,3}&a_{3,5}\\a_{4,2}&a_{4,3}&a_{4,5}\\a_{5,2}&a_{5,3}&a_{5,5}\end{vmatrix}-\Big(a_{1,1}a_{2,5}-a_{1,5}a_{2,1}\Big)\begin{vmatrix}a_{3,2}&a_{3,3}&a_{3,4}\\a_{4,2}&a_{4,3}&a_{4,4}\\a_{5,2}&a_{5,3}&a_{5,4}\end{vmatrix}+$$

$$+\Big(a_{1,2}a_{2,3}-a_{1,3}a_{2,2}\Big)\begin{vmatrix}a_{3,1}&a_{3,4}&a_{3,5}\\a_{4,1}&a_{4,4}&a_{4,5}\\a_{5,1}&a_{5,4}&a_{5,5}\end{vmatrix}-\Big(a_{1,2}a_{2,4}-a_{1,4}a_{2,2}\Big)\begin{vmatrix}a_{3,1}&a_{3,3}&a_{3,5}\\a_{4,1}&a_{4,3}&a_{4,5}\\a_{5,1}&a_{5,3}&a_{5,5}\end{vmatrix}+$$

$$+\Big(a_{1,2}a_{2,5}-a_{1,5}a_{2,2}\Big)\begin{vmatrix}a_{3,1}&a_{3,3}&a_{3,4}\\a_{4,1}&a_{4,3}&a_{4,4}\\a_{5,1}&a_{5,3}&a_{5,4}\end{vmatrix}+\Big(a_{1,3}a_{2,4}-a_{1,4}a_{2,3}\Big)\begin{vmatrix}a_{3,1}&a_{3,2}&a_{3,5}\\a_{4,1}&a_{4,2}&a_{4,5}\\a_{5,1}&a_{5,2}&a_{5,5}\end{vmatrix}-$$

$$-\Big(a_{1,3}a_{2,5}-a_{1,5}a_{2,3}\Big)\begin{vmatrix}a_{3,1}&a_{3,2}&a_{3,4}\\a_{4,1}&a_{4,2}&a_{4,4}\\a_{5,1}&a_{5,2}&a_{5,4}\end{vmatrix}+\Big(a_{1,4}a_{2,5}-a_{1,5}a_{2,4}\Big)\begin{vmatrix}a_{3,1}&a_{3,2}&a_{3,3}\\a_{4,1}&a_{4,2}&a_{4,3}\\a_{5,1}&a_{5,2}&a_{5,3}\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}a_{1,1}&a_{1,2}\\a_{2,1}&a_{2,2}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{3,3}&a_{3,4}&a_{3,5}\\a_{4,3}&a_{4,4}&a_{4,5}\\a_{5,3}&a_{5,4}&a_{5,5}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}a_{1,1}&a_{1,3}\\a_{2,1}&a_{2,3}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{3,2}&a_{3,4}&a_{3,5}\\a_{4,2}&a_{4,4}&a_{4,5}\\a_{5,2}&a_{5,4}&a_{5,5}\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix}a_{1,1}&a_{1,4}\\a_{2,1}&a_{2,4}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{3,2}&a_{3,3}&a_{3,5}\\a_{4,2}&a_{4,3}&a_{4,5}\\a_{5,2}&a_{5,3}&a_{5,5}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}a_{1,1}&a_{1,5}\\a_{2,1}&a_{2,5}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{3,2}&a_{3,3}&a_{3,4}\\a_{4,2}&a_{4,3}&a_{4,4}\\a_{5,2}&a_{5,3}&a_{5,4}\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix}a_{1,2}&a_{1,3}\\a_{2,2}&a_{2,3}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{3,1}&a_{3,4}&a_{3,5}\\a_{4,1}&a_{4,4}&a_{4,5}\\a_{5,1}&a_{5,4}&a_{5,5}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}a_{1,2}&a_{1,4}\\a_{2,2}&a_{2,4}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{3,1}&a_{3,3}&a_{3,5}\\a_{4,1}&a_{4,3}&a_{4,5}\\a_{5,1}&a_{5,3}&a_{5,5}\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix}a_{1,2}&a_{1,5}\\a_{2,2}&a_{2,5}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{3,1}&a_{3,3}&a_{3,4}\\a_{4,1}&a_{4,3}&a_{4,4}\\a_{5,1}&a_{5,3}&a_{5,4}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{1,3}&a_{1,4}\\a_{2,3}&a_{2,4}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{3,1}&a_{3,2}&a_{3,5}\\a_{4,1}&a_{4,2}&a_{4,5}\\a_{5,1}&a_{5,2}&a_{5,5}\end{vmatrix}-$$

$$-\begin{vmatrix}a_{1,3}&a_{1,5}\\a_{2,3}&a_{2,5}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{3,1}&a_{3,2}&a_{3,4}\\a_{4,1}&a_{4,2}&a_{4,4}\\a_{5,1}&a_{5,2}&a_{5,4}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{1,4}&a_{1,5}\\a_{2,4}&a_{2,5}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{3,1}&a_{3,2}&a_{3,3}\\a_{4,1}&a_{4,2}&a_{4,3}\\a_{5,1}&a_{5,2}&a_{5,3}\end{vmatrix}.$$

Z udowodnionego twierdzenia wynika od razu, że jeśli w macierzy zastąpimy wiersze jej kolumnani (z zachowaniem kolejności), to wyznacznik nie ulegnie zmianie:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1} & \dots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{3,2} & \dots & a_{n,2} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} & \dots & a_{n,3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & a_{3,n} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

— wynika to z tego, że wyznacznik można rozwijać względem wierszy lub kolumn.

Macierz otrzymaną z danej macierzy A przez opisaną zamianę wierszy i kolumn nazywamy *macierzą transponowaną* i oznaczamy przez A^T, operacja ta stosowana jest nie tylko do macierzy kwadratowych, np.

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\right)^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ostatnio wymienioną własność wyznaczników można więc zapisać tak:

$$\det(A) = \det(A^T)$$

dla każdej macierzy kwadratowej A.

Twierdzenie 8.4 Cramera
Układ n równań liniowych z n niewiadomymi ma dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy wyznacznik tego układu jest różny od 0.

Dowód.
Rozważamy układ równań

$$\begin{array}{ll} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \dots + a_{1,n}x_n & = c_1; \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \dots + a_{2,n}x_n & = c_2; \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 + \dots + a_{3,n}x_n & = c_3; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + a_{n,3}x_3 + \dots + a_{n,n}x_n & = c_n. \end{array}$$

Przekształcamy go stosując opisane wcześniej operacje na wierszach: zamieniamy miejscami wiersze, mnożymy wiersz przez liczbę $c \neq 0$, dodajemy jeden wiersz do drugiego. Po pierwszej z tych operacji wyznacznik

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

zmienia znak, po drugiej jest pomnożony przez c, po trzeciej nie ulega zmianie. Po pewnym czasie macierz zostanie sprowadzona do postaci schodkowej. Wyznacznik tej ostatniej macierzy jest równy 0 wtedy i tylko wtedy, gdy wyznacznik wyjściowej macierzy jest równy 0. Warto zauważyć, że

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \dots & \alpha_{1,n} \\ 0 & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \dots & \alpha_{2,n} \\ 0 & 0 & \alpha_{3,3} & \dots & \alpha_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix} = \alpha_{1,1} \cdot \alpha_{2,2} \cdot \alpha_{3,3} \cdot \dots \cdot \alpha_{n,n}$$

— wynik otrzymujemy rozwijając wyznacznik względem pierwszej kolumny

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \dots & \alpha_{1,n} \\ 0 & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \dots & \alpha_{2,n} \\ 0 & 0 & \alpha_{3,3} & \dots & \alpha_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix} = \alpha_{1,1} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \dots & \alpha_{2,n} \\ 0 & \alpha_{3,3} & \dots & \alpha_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix},$$

następnie powtarzamy tę operację na wyznaczniku niższego stopnia. Jeśli na przekątnej otrzymanej macierzy schodkowej nie ma zer, to wyznacznik układu też jest różny od 0. Układ ma wtedy dokładnie jedno rozwiązanie, bo ostatnie równanie wyznacza x_n, przedostanie x_{n-1} itd.

Jeśli natomiast pojawi się co najmniej jedno 0, to wyznacznik układu jest równy 0. Jeśli ostatni niezerowy wiersz ma postać $0, 0, \dots, 0, d_l$ przy czym $d_l \neq 0$, to układ jest sprzeczny. Jeśli natomiast wygląda on tak $0, 0, \dots, 0, \tilde{a}_{l,j}, \dots, d_l$ przy czym $\tilde{a}_{l,j} \neq 0$, to można potraktować niewiadome $x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_n$ jako parametry, tzn. podstawić w ich miejsce dowolne liczby i następnie obliczyć wartość x_j z wzoru $x_j = \frac{1}{a_{l,j}}\big(d_l - a_{l,j+1}x_{j+1} - a_{l,j+2}x_{j+2} - \dots - a_{l,n}x_n\big)$. Potem można zająć się znalezieniem x_{j-1}. Jeśli $A_{l-1,j-1} \neq 0$, to można wartość niewiadomej x_{j-1} wyznaczyć z $l-1$–ego równania. Jeśli $a_{l-1,j-1=0}$, to traktujemy x_{j-1} jako następny parametr. W tej sytuacji znajdujemy x_{j-2} chyba, że $a_{l-2,j-2} = 0$. W tym przypadku zaczynamy zajmować się x_{j+2} itd. Widać więc, że w tej sytuacji układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań. ■

Definicja 8.5 (rzędu macierzy)
Rzędem macierzy prostokątnej nazywamy największy ze stopni wyznaczników różnych od 0. ■

Z tej definicji wynika, że rząd nie może przekroczyć ani liczby wierszy macierzy, ani też liczby jej kolumn.

Poprawiając nieco dowód twierdzenia Cramera można udowodnić następujące

Twierdzenie 8.6 Kroneckera – Capelli

Rzędy macierzy układu równań i macierzy rozszerzonej tego układu są równe wtedy i tylko wtedy, gdy układ ma co najmniej jedno rozwiązanie:
jedno, jeśli rzędy są równe liczbie niewiadomych,
nieskończenie wiele rozwiązań, jeśli rzędy są mniejsze od liczby niewiadomych. ■

Dowodu tego twierdzenia nie podajemy, zresztą formułujemy je tylko po to, by poinformować studentów, że można je sformułować. Student chemii nie mosi go pamiętać.

Twierdzenie 8.7 wzory Cramera
Jeśli

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} \neq 0,$$

to jedynym rozwiązaniem układu

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \dots + a_{1,n}x_n &= c_1; \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \dots + a_{2,n}x_n &= c_2; \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 + \dots + a_{3,n}x_n &= c_3; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + a_{n,3}x_3 + \dots + a_{n,n}x_n &= c_n. \end{aligned}$$

jest punkt $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ zdefiniowany za pomocą równości:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots & a_{1,n} \\ c_2 & a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots & a_{2,n} \\ c_3 & a_{3,2} & a_{3,3} & \ldots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & a_{n,2} & a_{n,3} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \ldots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & c_1 & a_{1,3} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & c_2 & a_{2,3} & \ldots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & c_3 & a_{3,3} & \ldots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & c_n & a_{n,3} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \ldots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}},$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & c_1 & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & c_2 & \ldots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & c_3 & \ldots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & c_n & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \ldots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}}, \ldots, x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots & c_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots & c_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \ldots & c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \ldots & c_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \ldots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}}.$$

Dowód. Z twierdzenia Cramera udowodnionego powyżej wynika, że układ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Wystarczy sprawdzić, że można je wyrazić za pomocą wzorów Cramera. Zrobimy to w przypadku $n = 3$. Ogólny od tego nie różni się niczym istotnym. Wykażemy, że $a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 = c_1$. Obliczamy:

$$a_{1,1}\begin{vmatrix} c_1 & a_{1,2} & a_{1,3} \\ c_2 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ c_3 & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,2}\begin{vmatrix} a_{1,1} & c_1 & a_{1,3} \\ a_{2,1} & c_2 & a_{2,3} \\ a_{3,1} & c_3 & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3}\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & c_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & c_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= a_{1,1}c_1\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{1,1}c_2\begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,1}c_3\begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix} -$$

$$- a_{1,2}c_1\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,2}c_2\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{1,2}c_3\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,3} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{1,3}c_1\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix} - a_{1,3}c_2\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix} + a_{1,3}c_3\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} =$$

$$= c_1\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + c_2\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \end{vmatrix} =$$

$$= c_1\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}.$$

W ten sposób zakończyliśmy dowód równości $a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 = c_1$, nie przepisywaliśmy mianownika, więc pojawił się on na końcu wraz z c_1. W taki sam sposób można wykazać, że zachodzą równości $a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 = c_2$ oraz $a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 = c_3$. ■

Wzorów Cramera na ogół się nie stosuje, bo obliczanie wyznaczników jest kłopotliwe, a jeśli już mamy przeprowadzać operacje na wierszach, to lepiej od razu zająć się macierzą rozszerzoną. Komputery pomagają oczywiście trochę, ale gdy liczba równań jest duża, to i tak, nawet przy użycia komputera, nie oblicza się wyznaczników, lecz raczej eliminuje się niewiadome metodą Gaussa. Tym nie mniej można też napisać jawny wzór na macierz A^{-1} odwrotną do macierzy $A = \big(a_{i,j}\big)$, czyli taką, że $A \cdot A^{-1} = I = A^{-1} \cdot A$. Zachodzi wzór Cramera:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left(\begin{pmatrix} (-1)^{1+1}D_{1;1} & (-1)^{1+2}D_{1;2} & (-1)^{1+3}D_{1;3} & \dots & (-1)^{1+n}D_{1;n} \\ (-1)^{2+1}D_{2;1} & (-1)^{2+2}D_{2;2} & (-1)^{2+3}D_{2;3} & \dots & (-1)^{2+n}D_{2;n} \\ (-1)^{3+1}D_{3;1} & (-1)^{3+2}D_{3;2} & (-1)^{3+3}D_{3;3} & \dots & (-1)^{3+n}D_{3;n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1}D_{n;1} & (-1)^{n+2}D_{n;2} & (-1)^{n+3}D_{n;3} & \dots & (-1)^{n+n}D_{n;n} \end{pmatrix}\right)^T$$

Sprawdzenie poprawności tego wzoru to w zasadzie powtórzenie dowodu poprawności wzoru na rozwiązania układu n równań liniowych z n niewiadomymi. Wzór ten w przypadku macierzy niewielkiego rozmiaru może być z powodzeniem używany, jednak w przypadku macierzy dużego wymiaru nie warto go używać, bo liczba obliczeń wzrasta z wymiarem macierzy bardzo szybko. Znów, podobnie jak poprzednio, można stosować operacje na wierszach. Pokażemy jak to wygląda w przypadku macierzy, której odwrotną już raz znaleźliśmy. Rozważaliśmy wcześniej układ równań liniowych, którego macierz rozszerzona wyglądała tak:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 20 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Stosowaliśmy eliminację Gaussa. Prowadzi to do znalezienia macierzy odwrotnej macierzy

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

co teraz jest naszym najbliższym celem. Będziemy przeprowadzać te same operacje co poprzednio, na macierzy

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Przypomnijmy, że każdą z trzech operacji przeprowadzanych na wierszach możemy traktować jako wynik mnożenia odpowiednio dobranej macierzy przez daną macierzy. Macierz M, którą zamierzamy przekształcać, to dwie macierze napisane obok siebie: macierz A, a tuż za nią macierz I, można ją oznaczyć przez $(A\ I)$ — to nie iloczyn! Dodając np. wiersz drugi do wiersza trzeciego mnożymy macierz M przez macierz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ale to oznacza, że obliczmy dwa iloczyny: $B \cdot A$ i $B \cdot I$. Następne operacje można interpretować w taki sam sposób. Oznacza, że jeśli po pewnej liczbie tych operacji dojdziemy do macierzy postaci $(I\ C)$ (to nie iloczyn!), to macierz C będzie macierzą odwrotną do A jako iloczyn macierzy, który pomnożony przez A daje I. Przystępujemy do przekształcania:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— przestawiliśmy wiersze,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— odjęliśmy pierwszy wiersz pomnożony przez 2 od trzeciego i pomnożony przez 3 od czwartego;

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 8 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— dodaliśmy drugi wiersz pomnożony przez 3 do trzeciego i pomnożony przez 2 od czwartego;

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 8 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{10}{3} & 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

— odjęliśmy trzeci wiersz pomnożony przez $\frac{2}{3}$ od czwartego.

Do tej pory stosowaliśmy jedynie takie operacje na wierszach, które zachowywały wartości bezwzględną wyznacznika lewej macierzy kwadratowej, znak zmienił się raz, gdy przestawiliśmy wiersze. Teraz będzie inaczej.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

— pomnożyliśmy trzeci wiersz przez $\frac{1}{9}$, czwarty przez $-\frac{3}{10}$;

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{5} & \frac{9}{10} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{15} & \frac{4}{15} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

— odjęliśmy czwarty wiersz od pierwsze go, pomnożony przez 3 od drugiego, pomnożony przez $\frac{8}{9}$ od trzeciego;

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{4}{15} & \frac{17}{30} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{7}{15} & \frac{11}{30} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{15} & \frac{4}{15} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

— dodaliśmy trzeci wiersz do pierwszego, odjęliśmy trzeci pomnożony przez 2 od drugiego;

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{7}{15} & \frac{11}{30} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{15} & \frac{4}{15} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

— dodaliśmy trzeci wiersz do pierwszego, odjęliśmy trzeci pomnożony przez 2 od drugiego.

Po tych przekształceniach możemy napisać:

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{7}{15} & \frac{11}{30} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{15} & \frac{4}{15} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{10} \end{pmatrix} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & 6 \\ 10 & -5 & -14 & 11 \\ 10 & -20 & -2 & 8 \\ 0 & 15 & 6 & -9 \end{pmatrix} .$$

Jak widać odwracanie macierzy wymaga trochę pracy, ale żadnych trudności tu nie ma. Jeśli macierz odwrotnej nie ma, to oczywiście w trakcie operacji na wierszach w pewnym momencie natkniemy się na zbyt duży „uskok”, co oznacza, że na głównej przekątnej „lewej” macierzy pojawią się zera i już na niej pozostaną, co uniemożliwi kontynuację konstrukcji macierzy odwrotnej. W terminach wyznaczników: w tym momencie stwierdzimy, że wyznacznik „lewej” macierzy jest równy 0.

Twierdzenie 8.8 (Cauchy'ego o wyznaczniku iloczynu macierzy)
Wyznacznik iloczynu macierzy kwadratowych tego samego wymiaru A i B jest równy iloczynowi ich wyznaczników:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) .$$

Dowód. Przypomnijmy, że

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \dots & \alpha_{1,n} \\ 0 & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \dots & \alpha_{2,n} \\ 0 & 0 & \alpha_{3,3} & \dots & \alpha_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix} = \alpha_{1,1} \cdot \alpha_{2,2} \cdot \alpha_{3,3} \cdot \dots \cdot \alpha_{n,n} .$$

Bez trudu można sprawdzić, że w iloczynie

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \dots & \alpha_{1,n} \\ 0 & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \dots & \alpha_{2,n} \\ 0 & 0 & \alpha_{3,3} & \dots & \alpha_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \beta_{1,3} & \dots & \beta_{1,n} \\ 0 & \beta_{2,2} & \beta_{2,3} & \dots & \beta_{2,n} \\ 0 & 0 & \beta_{3,3} & \dots & \beta_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \beta_{n,n} \end{pmatrix}$$

pod główną przekątną są same zera a na głównej przekątnej pojawiają się kolejno liczby

$$\alpha_{1,1}\beta_{1,1},\ \alpha_{2,2}\beta_{2,2},\ \dots\ ,\alpha_{n,n}\beta_{n,n}.$$

Stąd i z równości

$$(\alpha_{1,1}\beta_{1,1}) \cdot (\alpha_{2,2}\beta_{2,2}) \cdot \dots \cdot (\alpha_{n,n}\beta_{n,n}) = (\alpha_{1,1} \cdot \alpha_{2,2} \cdot \dots \cdot \alpha_{n,n}) \cdot (\beta_{1,1} \cdot \beta_{2,2} \cdot \dots \cdot \beta_{n,n}),$$

wynika, że twierdzenie jest prawdziwe, gdy obie macierze są trójkątne, tzn. są postaci

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \dots & \alpha_{1,n} \\ 0 & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \dots & \alpha_{2,n} \\ 0 & 0 & \alpha_{3,3} & \dots & \alpha_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix} .$$

Z tego, co udowodniliśmy do tej pory wynika, że jeśli w macierzy kwadratowej B zastąpimy i–ty wiersz przez sumę tego wiersza i wiersza j–tego pomnożonego przez liczbę c, to wyznacznik nie ulegnie zmianie. Ta operacja może być opisana jako mnożenie $C_{i,j}(c) \cdot B$, gdzie $C_{i,j}(c)$ oznacza macierz, na której głównej przekątnej są jedynki, poza tą przekątną zera z wyjątkiem przecięcia i-tego wiersza z j–tą kolumną, gdzie znajduje się liczba c. Poniżej przykład dla $n = 4$

$$C_{2,4}(5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Bez trudu można sprawdzić, że

$$C_{2,4}(5)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = C_{2,4}(-5) .$$

Łatwo można zauważyć, że iloczyn $A \cdot C_{i,j}(-c)$ jest macierzą, której wszystkie kolumny z wyjątkiem j–tej są takie same jak kolumny macierzy A, j–ta kolumna iloczynu $A \cdot C_{i,j}(-c)$ jest sumą j–tej kolumny macierzy A oraz i–tej pomnożonej przez $-c$. Wynika stąd równość $\det\big(A \cdot C_{i,j}(-c)\big) = \det(A)$. Mnożenie macierzy jest łączne, więc $AB = (A \cdot C_{i,j}(-c)) \cdot (C_{i,j}(c) \cdot B)$ i wobec tego

$$\det(A \cdot B) = \det\big((A \cdot C_{i,j}(-c)) \cdot (C_{i,j}(c) \cdot B)\big).$$

Aby udowodnić, że $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$, wystarczy więc dowieść, że

$$\det\big((A \cdot C_{i,j}(-c)) \cdot (C_{i,j}(c) \cdot B)\big) = \det\big(A \cdot C_{i,j}(-c)\big) \cdot \det\big(C_{i,j}(c) \cdot B\big),$$

czyli udowodnić twierdzenie dla macierzy $A \cdot C_{i,j}(-c)$ i $C_{i,j}(c) \cdot B$ — wcześniej wykazaliśmy, że $\det(C_{i,j}(c) \cdot B) = \det(B)$ i $\det(A \cdot C_{i,j}(-c)) = \det(A)$.

Zamiana i–tego wiersza z j–tym to mnożenie przez macierz $P_{i,j}$, której wszystkie wiersze z wyjątkiem i–tego i j–tego są takie same, jak w macierzy jednostkowej, zaś w i–tym wierszu jedynka jest na miejscu j–tym, a w wierszu j–tym — na miejscu i–tym. Np. dla $n = 4$ mamy

$$P_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{3,4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Z łatwością przekonujemy się, że $P_{i,j}^{-1} = Pi, j$ (dwukrotna zamiana i-tego i j–tego wiersza niczego nie zmienia). Mamy $\det(P_{i,j} \cdot B) = -\det(B)$, $\det(A \cdot P_{i,j}) = -\det(A)$ — ostatnia równość wynika z tego, że macierz $A \cdot P_{i,j}$ różni się od macierzy A tylko tym, że zamienione zostały kolumny o numerach i, j, co jak wiemy powoduje jedynie zmianę znaku wyznacznika. Aby uzyskać twierdzenie dla macierzy A, B, wystarczy je dowieść dla macierzy $A \cdot P_{i,j}$, $P_{i,j}B$.

Stosując opisane operacje wielokrotnie sprowadzamy dowód twierdzenia do przypadku $\tilde{A} \cdot \tilde{B}$, gdzie macierz $\tilde{B}$ jest trójkątna (czyli ma pod przekątną same zera). Następnie mnożymy macierz $\tilde{A}$ z lewej strony przez macierze typu $C_{i,j}(c)$ oraz macierze typu $P_{i,j}$. Zachodzi równość $\det\big(C_{i,j}(c) \cdot (\tilde{A} \cdot \tilde{B})\big) = \det(\tilde{A} \cdot \tilde{B})$ — operacja na wierszach macierzy $\tilde{A} \cdot \tilde{B}$, więc dzięki łączności mnożenia macierzy:

$$\det(\tilde{A} \cdot \tilde{B}) = \det\big(C_{i,j}(c) \cdot (\tilde{A} \cdot \tilde{B})\big) = \det\big((C_{i,j}(c) \cdot \tilde{A}) \cdot \tilde{B})\big).$$

Wzór $\det(C_{i,j}(c) \cdot \tilde{A}) = \det(\tilde{A})$ pozwala zastąpić macierze $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ macierzami $C_{i,j}(c) \cdot \tilde{A}$, $\tilde{B}$.

Podobnie jest z mnożeniem przez $P_{i,j}$, które powoduje zmianę znaków obu wyznaczników: $\det(\tilde{A})$ i $\det(\tilde{A} \cdot \tilde{B})$. Możemy więc po pewnym czasie doprowadzić również macierz $\tilde{A}$ do postaci trójkątnej. Dowód został zakończony. ∎

Wniosek 8.9 (o wyznaczniku macierzy odwrotnej)
Jeśli macierz A ma odwrotną (czyli, gdy $\det(A) \neq 0$), to $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$. ∎

Twierdzenie 8.10 (Objętość równoległościanu rozpiętego przez wektory $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^3$)
Niech $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{\mathbf{w}} = (w_1, w_2, w_3)$. Wtedy objętość równoległościanu rozpiętego przez wektory $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}$ (zaczepione w punkcie $\mathbf{0}$) równa jest

$$|(\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}) \cdot \vec{\mathbf{w}}| = \left| \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \right|,$$

a jej kwadrat równy jest

$$\begin{vmatrix} \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{u}} & \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} & \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{w}} \\ \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{u}} & \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}} & \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} \\ \vec{\mathbf{w}} \cdot \vec{\mathbf{u}} & \vec{\mathbf{w}} \cdot \vec{\mathbf{v}} & \vec{\mathbf{w}} \cdot \vec{\mathbf{w}} \end{vmatrix}.$$

Dowód. Objętość równoległościanu równa jest iloczynowi pola podstawy przez jego wysokość. Niech podstawą będzie równoległobok rozpięty przez wektory $\vec{\mathbf{u}}$ i $\vec{\mathbf{v}}$. Pole tego równoległoboku to $\|\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}\|$. Trzeba więc znaleźć wysokość. Wektor $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}$ jest prostopadły do każdego z wektorów $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}$, więc wysokość jest odcinkien równoległym do wektora $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}$. Innymi słowy należy zrzutować prostopadle wektor $\vec{\mathbf{w}}$ na prostą wyznaczoną przez wektor $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}$. Ten rzut to wektor $\frac{\vec{\mathbf{w}} \cdot (\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}})}{\|\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}\|^2} \vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}$. Jego długość, czyli wysokość równoległościanu, to $\left| \frac{\vec{\mathbf{w}} \cdot (\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}})}{\|\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}\|} \right|$. Wobec tego objętość równa jest

$$\|\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}\| \cdot \left| \frac{\vec{\mathbf{w}} \cdot (\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}})}{\|\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}\|} \right| = \big| \vec{\mathbf{w}} \cdot (\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}) \big|,$$

co mieliśmy udowodnić. Równość $(\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}) \cdot \vec{\mathbf{w}} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$ wykazujemy bez trudu rozwijając wyznacznik względem trzeciego wiersza (po przypomnieniu sobie definicji iloczynu wektorowego). Wreszcie

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{u}} & \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} & \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{w}} \\ \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{u}} & \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}} & \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} \\ \vec{\mathbf{w}} \cdot \vec{\mathbf{u}} & \vec{\mathbf{w}} \cdot \vec{\mathbf{v}} & \vec{\mathbf{w}} \cdot \vec{\mathbf{w}} \end{vmatrix}. \quad \blacksquare$$

Wniosek 8.11 Trzy wektory $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^3$, zaczepione w punkcie $\vec{\mathbf{0}} = (0,0,0)$ leżą w jednej płaszczyźnie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{u}} & \vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}} & \vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{w}} \\ \vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{u}} & \vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{v}} & \vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{w}} \\ \vec{\mathbf{w}}\cdot\vec{\mathbf{u}} & \vec{\mathbf{w}}\cdot\vec{\mathbf{v}} & \vec{\mathbf{w}}\cdot\vec{\mathbf{w}} \end{vmatrix} = 0. \ \blacksquare$$

Definicja 8.12 (trójki wektorów dodatnio zorientowanej)
Trzy wektory $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^3$ nieleżące w jednej płaszczyźnie tworzą układ dodatnio zorientowany w przestrzeni trójwymiarowej wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} > 0. \ \blacksquare$$

Z definicji wynika natychmiast, że jeśli trójka $(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}})$ jest układem dodatnio zorientowanym, to trójka $(\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{w}})$ układem dodatnio zorientowanym nie jest — zmiana kolejności wierszy powoduje zmianę znaku wyznacznika.

Można i należy sobie wyobrażać, że układ trzech wzajemnie prostopadłych wektorów jest dodatnio zorientowany, gdy można ten układ obrócić (kilka razy) wokół prostych przechodzących przez $\vec{\mathbf{0}}$ tak, by po obrotach wektory $\vec{\mathbf{u}}'$ i $\vec{\imath} = (1,0,0)$ były *zgodnie równoległe* (czyli równoległe i skierowany w tę samą stronę), podobnie wektor $\vec{\mathbf{v}}'$ i $\vec{\jmath} = (0,1,0)$ oraz wektory $\vec{\mathbf{w}}'$ i $\vec{k} = (0,0,1)$. Temu stwierdzeniu można nadać bardzo precyzyjne znaczenie i wtedy je udowodnić. Można zresztą to stwierdzenie uogólnić na trójki wektorów niekoniecznie wzajemnie prostopadłych. Warto w tym miejscu dodać, że iloczyn wektorowy wektorów $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^3$ może być zdefiniowany geometrycznie jako *wektor, który*

jest prostopadły do obu wektorów $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}$,
ma długość równą polu równoległoboku rozpiętego przez te wektory,
i taki, że trójka $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}$ *jest dodatnio zorientowana.*

W matematyce od wielu lat jednym z kluczowych pojęć jest pojęcie funkcji. Załóżmy, że dana jest funkcja przekształcająca płaszczyznę $\mathbb{R}^2$ lub przestrzeń $\mathbb{R}^3$ w siebie i to taka, że odległość $\|\mathbf{x}' - \mathbf{y}'\|$ obrazów $\mathbf{x}', \mathbf{y}'$ punktów $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ jest równa odległości $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ punktów $\mathbf{x}, \mathbf{y}$. Załóżmy dodatkowo, że punkt $\mathbf{0}$ jest przekształcany na siebie (nie rusza się, czyli $\mathbf{0}' = \mathbf{0}$). Przekonamy się, że w tej sytuacji istnieje taka macierz kwadratowa A, że dla każdego $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$[6] zachodzi równość $\mathbf{x}' = A \cdot \mathbf{x}$ (tu wektory są traktowane jako macierze o jednej kolumnie i n wierszach). Wykażemy, że wtedy A jest taką macierzą, że $A \cdot A^T = I$ i odwrotnie: jeśli $A \cdot A^T = I$, to $\|A\mathbf{x} - A\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ dla dowolnych $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.[7] Przejdziemy do dowodu.

Mamy $\|\mathbf{x}'\|^2 = \|\mathbf{x}' - \mathbf{0}\|^2 = \|\mathbf{x}' - \mathbf{0}'\|^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{0}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2$ dla dowolnego $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, w tym $\|\mathbf{y}'\|^2 = \|\mathbf{y}\|^2$. Mamy też $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} - 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + \mathbf{y}\cdot\mathbf{y} = =\|\mathbf{x}\|^2 - 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + \|\mathbf{y}\|^2$ i analogicznie $\|\mathbf{x}' - \mathbf{y}'\|^2 = \|\mathbf{x}'\|^2 - 2\mathbf{x}'\cdot\mathbf{y}' + \|\mathbf{y}'\|^2$, a ponieważ $\|\mathbf{x}' - \mathbf{y}'\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, więc dla dowolnych $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ zachodzi równość $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \mathbf{x}'\cdot\mathbf{y}'$. Mamy więc
$\|(\mathbf{x}+\mathbf{y})' - (\mathbf{x}'+\mathbf{y}')\|^2 = \|(\mathbf{x}+\mathbf{y})'\|^2 - 2(\mathbf{x}+\mathbf{y})'\cdot(\mathbf{x}'+\mathbf{y}') + (\mathbf{x}'+\mathbf{y}')\cdot(\mathbf{x}'+\mathbf{y}') =$
$= \|(\mathbf{x}+\mathbf{y})\|^2 - 2(\mathbf{x}+\mathbf{y})'\cdot\mathbf{x}' - 2(\mathbf{x}+\mathbf{y})'\cdot\mathbf{y}' + \mathbf{x}'\cdot\mathbf{x}' + 2\mathbf{x}'\cdot\mathbf{y}' + \mathbf{y}'\cdot\mathbf{y}' =$

[6] n może być dowolne; mówimy o 2 i 3, by w razie potrzeby łatwiej można było sobie coś narysować.
[7] Tzn. że przyporządkowanie punktowi $\mathbf{x}$ punktu $\mathbf{x}'=A\mathbf{x}$ jest izometrią.

$= \|(\mathbf{x}+\mathbf{y})\|^2 - 2(\mathbf{x}+\mathbf{y})\cdot\mathbf{x} - 2(\mathbf{x}+\mathbf{y})\cdot\mathbf{y} + \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} + 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + \mathbf{y}\cdot\mathbf{y} =$
$= \|(\mathbf{x}+\mathbf{y})\|^2 - 2(\mathbf{x}+\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y}) + (\mathbf{x}+\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y}) =$
$$= \big((\mathbf{x}+\mathbf{y}) - (\mathbf{x}+\mathbf{y})\big)\cdot\big((\mathbf{x}+\mathbf{y}) - (\mathbf{x}+\mathbf{y})\big) = 0.$$
Stąd wynika, że $(\mathbf{x}+\mathbf{y})' = \mathbf{x}' + \mathbf{y}'$ dla dowolnych $\mathbf{x}, \mathbf{y}$. Analogicznie dowodzimy, że $(t\mathbf{x})' = t\mathbf{x}'$ dla dowolnej liczby t i dowolnego punktu $\mathbf{x}$. Niech $\vec{\mathbf{e}}_j$ oznacza wektor, którego wszystkie współrzędne są równe 0 z wyjątkiem j–tej, która jest równa 1. Niech $a_{i,j}$ oznacza i–tą współrzędną wektora $\vec{\mathbf{e}}_j'$. W kolumnach macierzy $(a_{i,j})$ znajdują się wektory $\vec{\mathbf{e}}_1'$, $\vec{\mathbf{e}}_2'$, … Mamy $\vec{\mathbf{x}} = x_1\vec{\mathbf{e}}_1 + x_2\vec{\mathbf{e}}_2 + \cdots + x_n\vec{\mathbf{e}}_n$. Wobec tego
$$\vec{\mathbf{x}}' = \big(x_1\vec{\mathbf{e}}_1 + x_2\vec{\mathbf{e}}_2 + \cdots + x_n\vec{\mathbf{e}}_n\big)' = x_1\vec{\mathbf{e}}_1' + x_2\vec{\mathbf{e}}_2' + \cdots + x_n\vec{\mathbf{e}}_n' = A\vec{\mathbf{x}}\,.$$
Mamy również $\vec{\mathbf{e}}_j'\cdot\vec{\mathbf{e}}_j' = \vec{\mathbf{e}}_j\cdot\vec{\mathbf{e}}_j = 1$ oraz $\vec{\mathbf{e}}_i'\cdot\vec{\mathbf{e}}_j' = \vec{\mathbf{e}}_i\cdot\vec{\mathbf{e}}_j = 0$ dla $i \neq j$. Te równości oznaczają, że $A\cdot A^T = I$. Udowodniliśmy więc obiecane twierdzenie. ■

Dla przykładu opiszemy macierz obrotu o kąt α wokół punktu $\mathbf{0} = (0,0)$. Z definicji funkcji sinus i kosinus wynika, że w wyniku obrotu punkt $(1,0)$ przechodzi na punkt $(\cos\alpha, \sin\alpha)$, zaś punkt $(0,1) = \big(\cos\frac{\pi}{2}, \sin\frac{\pi}{2}\big)$ przechodzi na punkt $\big(\cos(\alpha+\frac{\pi}{2}), \sin(\alpha+\frac{\pi}{2})\big) = \big(-\sin\alpha, \cos\alpha\big)$. Wynika stąd, że w obrocie o kąt α wokół punktu $\mathbf{0} = (0,0)$ punkt $\binom{x}{y}$ przechodzi na punkt
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{pmatrix}.$$
Teraz znajdziemy analityczny opis symetrii względem prostej $y = 2x$. Niech (u, v) oznacza punkt symetryczny do punktu $(1,0)$ względem prostej $y = 2x$. Środek odcinka o końcach $(1,0)$ i (u, v), czyli punkt $\big(\frac{u+1}{2}, \frac{v+0}{2}\big)$ leży na prostej $y = 2x$, zatem $\frac{v+0}{2} = 2\cdot\frac{u+1}{2}$, czyli $v = 2u+2$. Wektor $(u-1, v-0)$ jest prostopadły do wektora $(1-0, 2-0)$. Wobec tego zachodzi równość $0 = (u-1, v)\cdot(1,2) = u - 1 + 2v$. Muszą więc być spełnione równania:
$$\begin{cases} 2u - v = -2, \\ u + 2v = 1. \end{cases}$$
Stąd $u = -\frac{3}{5} = -0{,}6$ i $v = \frac{4}{5} = 0{,}8$. Analogicznie, jeśli obrazem punktu $(0,1)$ w tej symetrii jest punkt (r, s), to $2\cdot\frac{r+0}{2} = \frac{s+1}{2}$ oraz $0 = (r-0, s-1)\cdot(1,2)$, zatem
$$\begin{cases} 2r - s = 1, \\ r + 2s = 2. \end{cases}$$
Wynika stąd, że $r = \frac{4}{5} = 0,8$ i $s = \frac{3}{5} = 0{,}6$. Stąd wnioskujemy, że obrazem punktu $\binom{x}{y}$ w symetrii względem prostej $y = 2x$ jest punkt
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0,6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}6x + 0{,}8y \\ 0{,}8x + 0{,}6y \end{pmatrix}.$$
Widać, że stosunkowo tanim kosztem uzyskujemy wzory na obrazy punktu w przekształceniach izometrycznych.

Oczywiście nie dla każdej macierzy przekształcenie, które punktowi $\mathbf{x}$ przypisuje punkt $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ jest izometrią, na ogół nie jest. Tym nie mniej takie przekształcenia z wielu przyczyn są bardzo interesujące. Nazywane są liniowymi.[8] Omówimy jeszcze jeden przykład. Zanim jednak to nastąpi wprowadzimy definicję bardzo ważnego pojęcia.

[8] O przekształceniach linowych jeszcze coś opowiemy. Te, o których teraz mówimy to tylko przykład, pojęcie jest istotnie szersze!

Definicja 8.13 (wartości własnej i wektora własnego macierzy)
Liczbę λ nazywamy wartością własną macierzy kwadratowej A wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wektor $\vec{\mathbf{v}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ taki, że $A\vec{\mathbf{v}} = \lambda\vec{\mathbf{v}}$. W takiej sytuacji mówimy, że $\vec{\mathbf{v}}$ jest wektorem własnym macierzy A. ■

Wektor zerowy też czasem będziemy nazywać wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej. To ułatwia w niektórych momentach wypowiadanie twierdzeń, choć w innych może prowadzić do nieporozumień.

Ponieważ $I\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}$ dla każdego wektora $\vec{\mathbf{v}}$, więc liczba 1 jest wartością własną macierzy I. Innych wartości własnych ta macierz nie ma.

Jedyną wartością własną macierzy zerowej O (wszystkie jej wyrazy są równe 0) jest liczba 0, bo $O\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{0}} = 0 \cdot \vec{\mathbf{v}}$ dla każdego wektora $\vec{\mathbf{v}}$.

Niech $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$. Wartościami własnymi macierzy A są liczby $1, 2, \sqrt{5}$, bowiem
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} = \sqrt{5} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Innych wartości własnych ta macierz nie ma, bo jeśli

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

to zachodzą równości $x = \lambda x$, $2y = \lambda y$ oraz $z\sqrt{5} = \lambda z$. Szukamy niezerowego wektora o współrzędnych x, y, z. Jeśli $x \neq 0$, to $\lambda = 1$ i $y = z = 0$. Jeśli $y \neq 0$, to $\lambda = 2$ i wtedy $x = z = 0$. Wreszcie jeśli $z \neq 0$, to $\lambda = \sqrt{5}$ i $x = y = 0$.

Niech $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Załóżmy, że $A\vec{\mathbf{v}} = \lambda\vec{\mathbf{v}}$ dla pewnej liczby λ i pewnego wektora $\vec{\mathbf{v}} \neq \vec{\mathbf{0}}$.
Niech $\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Mamy $A\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ 2y + z \\ 2z \end{pmatrix}$. Musi więc być spełniony układ równań

$$\begin{cases} \lambda x = 2x + y \\ \lambda y = 2y + z \\ \lambda z = 2z \end{cases},$$

zatem $y = (\lambda - 2)x$, $z = (\lambda - 2)y$ i $z(\lambda - 2) = 0$. Jeśli $\lambda - 2 \neq 0$, to $z = 0$ (z ostatniego równania), zatem $y = 0$ (z drugiego równania) i wobec tego $x = 0$ (z pierwszego równania). Wobec tego jedynym kandydatem na wartość własną jest 2. Wtedy musi być $z = 0 = y$, natomiast x może być dowolną liczbą rzeczywistą. Wobec tego jedyną wartością własną tej macierzy jest liczba 2, wektory własne jej odpowiadające to wektory postaci $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Zauważmy, że jeśli λ jest wartością własną macierzy A wymiaru n, to jednorodny[9] układ równań liniowych, którego macierzą jest $A - \lambda I$ ma oprócz zerowego rozwiązanie niezerowe (wektor własny). Skoro tak, to musi być $\det(A - \lambda I) = 0$. Niech $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Z definicji wyznacznika dosyć łatwo można wywnioskować, że p jest wielomianem n–tego stopnia zmiennej λ. Wynika stąd, że liczba wartości własnych macierzy A wymiaru n nie przekracza liczby n. Zauważmy jeszcze, że jeśli liczba λ_0 jest pierwiastkiem wielomianu p, to jest wartością własną macierzy A, bo wtedy układ równań

$$\begin{aligned}
&(a_{1,1} - \lambda)x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots + a_{1,n}x_n &&= 0 \\
&a_{2,1}x_1 + (a_{2,2} - \lambda)x_2 + a_{2,3}x_3 + \cdots + a_{2,n}x_n &&= 0 \\
&a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + (a_{3,3} - \lambda)x_3 + \cdots + a_{3,n}x_n &&= 0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + a_{n,3}x_3 + \cdots + (a_{n,n} - \lambda)x_n &&= 0
\end{aligned}$$

ma niezerowe rozwiązanie, ma ich zresztą nieskończenie wiele.

Definicja 8.14 (wielomianu charakterystycznego macierzy)
Wielomian $\det(A - \lambda I)$ zmiennej λ nazywany jest wielomianem charakterystycznym macierzy A. ■

Z rozważań poprzedzających definicję wielomianu charakterystycznego wynika, że prawdziwe jest

Twierdzenie 8.15 (o wartościach własnych i wielomianie charakterystycznym)
λ jest wartością własną macierzy A wtedy i tylko wtedy, gdy $p(\lambda) = 0$, gdzie p jest wielomianem charakterystycznym macierzy A, innymi słowy wartości własne to pierwiastki wielomianu charakterystycznego. ■

A teraz pora na obiecany przykład. Omówimy teraz pewien problem pochodzący z trzynastego wieku. W rękopisie z 1202 r Leonarda z Pizy, zwanego Fibonaccim, znajduje się następujące zadanie: Ile par królików może być spłodzonych przez parę płodnych królików i jej potomstwo w ciągu roku, jeśli każda para daje w ciągu miesiąca żywot jednej parze, para staje się płodna po miesiącu, króliki nie zdychają w ciągu tego roku. Jasne jest, że po miesiącu mamy już dwie pary przy czym jedna z nich jest płodna, a druga jeszcze nie. Wobec tego po dwóch miesiącach żyją już trzy pary królików: dwie płodne, jedna jeszcze nie. Po trzech miesiącach żyje już pięć par królików: trzy płodne, dwie jeszcze nie. Po czterech miesiącach jest już $8 = 5 + 3$ par królików. Kontynuując to postępowanie stwierdzamy po niezbyt długim czasie, że po roku żyje już $377 = 233 + 144$ par królików. Naturalnym problemem jest: znaleźć wzór na liczbę a_n, jeśli $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ i $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ dla $n = 2, 3, 4, \ldots$.

Na problem można spojrzeć tak: mając dane liczby a_1, a_2 znajdujemy następną parę a_2, a_3. Mówimy o parach, bo jedna liczba nie wystarcza do znalezienia następnej, trzeba znać dwie kolejne liczby. Parę liczb możemy potraktować jako punkt płaszczyzny. Mając więc punkt

[9] prawe strony wszystkich równań są równe 0.

(a_1, a_2) znajdujemy punkt $(a_2, a_3) = (a_2, a_1 + a_2)$, potem punkt $(a_3, a_4) = (a_3, a_2 + a_3)$ itd. Mamy więc przekształcenie na płaszczyźnie, które punktowi $\binom{x}{y}$ przypisuje punkt

$$\begin{pmatrix} y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Chodzi o znalezienie wzoru na a_n, czyli o znalezienie

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

przy czym w powyższym iloczynie macierz kwadratowa występuje $n-1$ razy. Formalnie rzecz biorąc można odpowiedzieć

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

tylko że tego rodzaju odpowiedź może być łatwo uznana za wymijającą. Przecież nie chodzi o przeformułowanie problemu, lecz o jego rozwiązanie. Oznacza to, że we wzorze powinny wystąpić znane funkcje, a nie nowe oznaczenia.

Zaczniemy od znalezienia wartości i wektorów własnych macierzy $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Trzeba rozwiązać równanie kwadratowe

$$0 = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1 = \left(\lambda - \tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2.$$

Równanie to ma dwa pierwiastki: $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ oraz $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Odpowiadają im wektory własne, np. $\vec{\mathbf{v}}_1 = (1, \lambda_1)$ i $\vec{\mathbf{v}}_2 = (1, \lambda_2)$, można każdy z nich pomnożyć przez dowolną liczbę różną od 0. Zauważmy, że $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{\mathbf{v}}_1 = \lambda_1 \vec{\mathbf{v}}_1$, zatem

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)^2 \vec{\mathbf{v}}_1 = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) \left[\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) \vec{\mathbf{v}}_1\right] = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) (\lambda_1 \vec{\mathbf{v}}_1) = \lambda_1 \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) \vec{\mathbf{v}}_1 = \lambda_1^2 \vec{\mathbf{v}}_1.$$

Stąd, powtarzając ten rachunek wielokrotnie otrzymujemy

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)^{n-1} \vec{\mathbf{v}}_1 = \lambda_1^{n-1} \vec{\mathbf{v}}_1 \quad \text{i analogicznie} \quad \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)^{n-1} \vec{\mathbf{v}}_2 = \lambda_2^{n-1} \vec{\mathbf{v}}_2.$$

Można zapytać, co z tego wynika. Znaleźliśmy jakieś wzory, ale nie te, o które chodzi. Poprawimy się nieco. Znajdziemy liczby b, c takie, że $(1,1) = b\vec{\mathbf{v}}_1 + c\vec{\mathbf{v}}_2$.[10] Ma więc być spełniona równość:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix},$$

czyli

$$\binom{b}{c} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}\right)^{-1} \binom{1}{1} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}\right) \binom{1}{1} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \binom{\lambda_2 - 1}{1 - \lambda_1} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \binom{-\lambda_1}{\lambda_2}$$

— skorzystaliśmy z tego, że $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ (wzór Viète'a). Mamy wobec tego

[10] Mówiąc uczenie: znajdziemy współrzędne wektora $(1,1)$ w układzie współrzędnych, w którym rolę wektorów jednostkowych osi pełnią wektory $\vec{\mathbf{v}}_1$ i $\vec{\mathbf{v}}_2$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)^{n-1} \left(\frac{-\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \vec{\mathbf{v}}_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \vec{\mathbf{v}}_2 \right) =$$

$$= \frac{-\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)^{n-1} \cdot \vec{\mathbf{v}}_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)^{n-1} \cdot \vec{\mathbf{v}}_2 = \frac{-\lambda_1^n}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \vec{\mathbf{v}}_1 + \frac{\lambda_2^n}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \vec{\mathbf{v}}_2.$$

Mamy oczywiście $\lambda_2 - \lambda_1 = -\sqrt{5}$. Wobec tego

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Uzyskany wzór nazywany jest wzorem Bineta (1786–1856). Autor tego tekstu nie wierzy jednak, że np. Leonhard Euler (1707 – 1783) nie znał tego wzoru, bo z pewnością umiał go wyprowadzić. To jednak nie jest istotne. Ważne jest to, że musiało upłynąć musiało kilkaset lat zanim znaleziono wzór. Jasne jest, że w zasadzie nie jest możliwe odgadnięcie takiego wzoru bez jakiegoś pomysłu np. „szukamy w postaci sumy ciągów geometrycznych”. Pamiętać też należy, że pierwszy człowiek, który go znalazł, nie wiedział przecież, co znajdzie! Dodajmy jeszcze, że ciąg Fibonacciego pojawia się w wielu miejscach w matematyce z zadziwiającą konsekwencją, ale nie ma tu miejsca, by o tym mówić.

Zadania

8.1 Wykazać, że przez każde trzy punkty płaszczyzny, z których żadne dwa nie leżą na jednej prostej pionowej przechodzi wykres dokładnie jednego wielomianu stopnia 2 lub mniejszego.

8.2 Wykazać, że przez każde cztery punkty płaszczyzny, z których żadne dwa nie leżą na jednej prostej pionowej przechodzi wykres dokładnie jednego wielomianu stopnia nie większego niż 3. Uogólnić to twierdzenie i spróbować je udowodnić.

8.3 Obliczyć wyznaczniki następujących macierzy:
$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}13 & 8\\ 8 & 5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}.$$

8.4 Obliczyć wyznaczniki następujących macierzy:
$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}e^t & te^t & t^2e^t\\ e^t & (1+t)e^t & (2t+t^2)e^t\\ e^t & (2+t)e^t & (2+4t+t^2)e^t\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\cos\varphi\cos\theta & -r\cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\cos\theta\\ \cos\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta\\ \sin\varphi & 0 & r\cos\varphi\end{pmatrix}.$$

8.5 Znaleźć iloczyn AB macierzy, jeśli

1° $A = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ $\quad 2^\circ$ $A = \begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}0 & 5\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

3° $A = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ $\quad 4^\circ$ $A = \begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 5 & 0\end{pmatrix}$

5° $A = \begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ $\quad 6^\circ$ $A = \begin{pmatrix}9 & 6\\ 0 & 9\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$

7° $A = \begin{pmatrix}27 & 27\\ 0 & 27\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ $\quad 8^\circ$ $A = \begin{pmatrix}27 & 108\\ 0 & 27\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$

8.6 Znaleźć iloczyn AB macierzy, jeśli

1° $A = \begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$;

2° $A = \begin{pmatrix}9 & 6 & 1\\ 0 & 9 & 6\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$;

3° $A = \begin{pmatrix}27 & 27 & 9\\ 0 & 27 & 27\\ 0 & 0 & 27\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$;

4° $A = \begin{pmatrix}81 & 108 & 54\\ 0 & 81 & 108\\ 0 & 0 & 81\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$;

5° $A = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

6° $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}$;

7° $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$;

8° $A = \begin{pmatrix} e^t\cos\alpha & -e^t\sin\alpha \\ e^t\sin\alpha & e^t\cos\alpha \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} e^{2t}\cos\beta & -e^{2t}\sin\beta \\ e^{2t}\sin\beta & e^{2t}\cos\beta \end{pmatrix}$.

8.7 Znaleźć macierz odwrotną M^{-1} do macierzy M, jeśli $M =$

1° $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, 2° $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 3° $\begin{pmatrix} 1 & t \\ s & 1 \end{pmatrix}$, 4° $\begin{pmatrix} 4 & t \\ s & 3 \end{pmatrix}$.

8.8 Znaleźć macierz odwrotną M^{-1} do macierzy M, jeśli $M =$

1° $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, 2° $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, 3° $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 4° $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

8.9 Rozwiązać układy równań:

$$\begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases},$$

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x + 2y + 4z = 31 \\ 5x + y + 2z = 29 \\ 3x - y + z = 10 \end{cases},$$

$$\begin{cases} w + x + 2y + 3z = 1 \\ 3w - x - y - 2z = -4 \\ 2w + 3x - y - z = -6 \\ w + 2x + 3y - z = -4 \end{cases}, \qquad \begin{cases} w + 2x + 3y - 2z = 6 \\ 2w - x - 2y - 3z = 8 \\ 3w + 2x - y + 2z = 4 \\ 2w - 3x + 2y + z = -8 \end{cases},$$

$$\begin{cases} w + 2x + 3y + 4z = 5 \\ 2w + x + 2y + 3z = 1 \\ 3w + 2x + y + 2z = 1 \\ 4w + 3x + 2y + z = -5 \end{cases}.$$

Należy popracować z macierzą układu i sprowadzić ją za pomocą operacji elementarnych na wierszach do prostszej postaci. Warto też zastosować drugą metodę: napisać układ w postaci macierzowej $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, znaleźć macierz odwrotną A^{-1} i obliczyć $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$, jeśli macierz A jest odwracalna.

8.10 Niech $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$. Niech $\vec{\mathbf{x}}' = A\vec{\mathbf{x}}$ dla dowolnego wektora $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2$, $\vec{\mathbf{x}} = \binom{x_1}{x_2}$ teraz zapisujemy wektory jako macierze, które mają jedną kolumnę. Udowodnić, że jeśli $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^2$, to $\|\vec{\mathbf{x}}' - \vec{\mathbf{y}}'\| = \|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}\|$.

8.11 Niech $A = \begin{pmatrix} 12 & -5 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$. Niech $\vec{\mathbf{x}}' = A\vec{\mathbf{x}}$ dla dowolnego wektora $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2$. Wykazać, że dla każdej pary wektorów $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^2$ spełniona jest następująca równość $\|\vec{\mathbf{x}}' - \vec{\mathbf{y}}'\| = 13\|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}\|$.

8.12 Niech $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, $g(x) = \frac{\alpha x+\beta}{\gg x+\delta}$ i niech $M_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gg & \delta \end{pmatrix}$, $M = M_1 \cdot M_2$. Wykazać, że jeśli $M = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$, to $f(g(x)) = \frac{px+q}{rx+s}$.

8.13 Udowodnić, że jeśli izometria przestrzeni $\mathbb{R}^3$ zachowuje $\mathbf{0}$, tzn. $\mathbf{0}' = \mathbf{0}$, to istnieje wektor $\vec{\mathbf{x}}$ taki, że $\vec{\mathbf{x}}' = \vec{\mathbf{x}}$ lub $\vec{\mathbf{x}}' = -\vec{\mathbf{x}}$. *Oznacza to, że istnieje prosta przechodząca przez punkt* $\mathbf{0}$*, którą izometria przekształca na siebie: albo punkty tej prostej nie zmieniają swego położenia, albo przechodzą na symetryczne względem punktu* $\mathbf{0}$. Czy twierdzenie jest prawdziwe dla izometrii $\mathbb{R}^2$?

8.14 Znaleźć wartości i wektory własne macierzy A, jeśli $A =$

1° $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; 2° $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

3° $\begin{pmatrix} 21 & 13 \\ 13 & 8 \end{pmatrix}$; 4° $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$;

5° $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$; 6° $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$;

7° $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; 8° $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

9° $\begin{pmatrix} -7 & -6 & -2 \\ 30 & 24 & 8 \\ -45 & -33 & -10 \end{pmatrix}$; 10° $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ -3 & -20 & -14 \\ 6 & 35 & 24 \end{pmatrix}$;

11° $\begin{pmatrix} -8 & -3 & -6 \\ -3 & 2 & -2 \\ 15 & 5 & 11 \end{pmatrix}$; 12° $\begin{pmatrix} -27 & -2 & 45 \\ -36 & -6 & 60 \\ -21 & -2 & 35 \end{pmatrix}$.

8.15 Niech $\varphi \in \mathbb{R}$, $\vec{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^3$. Definiujemy

$$F(\vec{\mathbf{x}}) = \cos\varphi\big(\vec{\mathbf{x}} - \tfrac{\vec{\mathbf{w}}\cdot\vec{\mathbf{x}}}{\vec{\mathbf{w}}\cdot\vec{\mathbf{w}}}\vec{\mathbf{w}}\big) + \tfrac{\sin\varphi}{\|\vec{\mathbf{w}}\|}\big(\vec{\mathbf{w}} \times \vec{\mathbf{x}}\big) + + \tfrac{\vec{\mathbf{w}}\cdot\vec{\mathbf{x}}}{\vec{\mathbf{w}}\cdot\vec{\mathbf{w}}}\vec{\mathbf{w}}$$

dla dowolnego $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$.
Wykazać, że F jest izometrią, tzn. że $\|F(\vec{\mathbf{x}}_1) - F(\vec{\mathbf{x}}_2)\| = \|\vec{\mathbf{x}}_1 - \vec{\mathbf{x}}_2\|$ dla dowolnych $\vec{\mathbf{x}}_1, \vec{\mathbf{x}}_2 \in \mathbb{R}^3$.
Znaleźć $F(\vec{\mathbf{w}})$.
Znaleźć macierz tej izometrii dla $\vec{\mathbf{w}} = (0,0,1)$, dla $\vec{\mathbf{w}} = (1,0,0)$ oraz dla $\vec{\mathbf{w}} = =(1,1,1)$ i obliczyć wartości własne znalezionych macierzy.

8.16 Narysować obraz kwadratu o wierzchołkach $(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$ w przekształceniu liniowym zdefiniowanym za pomocą macierzy A, jeśli $A =$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

8.17 Wykazać, że macierze A i $C^{-1} \cdot A \cdot C$ mają ten sam wielomian charakterystyczny, zakładamy oczywiście, że $\det(C) \neq 0$.

8.18 Wykazać, że dla dowolnej macierzy A wymiaru $m \times n$ i dowolnego wektora (pionowego) $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ i dowolnego wektora (pionowego) $\vec{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^m$ zachodzi równość $\big(A\vec{\mathbf{x}}\big) \cdot \vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{x}} \cdot \big(A^T\vec{\mathbf{y}}\big)$

8.19 Wykazać, że jeśli macierz rzeczywista A jest symetryczna, czyli $A = A^T$, to jej wartości własne są liczbami rzeczywistymi.

8.20 Wykazać, że jeśli macierz rzeczywista A jest symetryczna, czyli $A = A^T$, to wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym są prostopadłe.

8.21 Niech $M = \begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$. Dowieść, że dla każdej pary liczb całkowitych a, b istnieje taka para liczb wymiernych x, y, że zachodzi równość: $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
Czy liczby x, y muszą być całkowite?
Znaleźć wartości i wektory własne macierzy M oraz macierzy M^2.
Znaleźć macierz M^{-1} i jej wartości oraz wektory własne.
Narysować zbiór złożony ze wszystkich tych punktów postaci $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, dla których liczby x, y spełniają nierówności $0 \leq x, y \leq 1$.

8.22 Niech $A = \begin{pmatrix} -2 & 1,5 & -0,5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = 2A^2$.
Znaleźć wartości i wektory własne macierzy A oraz macierzy B^{-1}.
Znaleźć wartości i **wszystkie** wektory własne macierzy A^3 i macierzy A^{2013}.
Znaleźć macierze A^3, B^3, B^{-3}, A^{2013} i B^{2013}.
Niech $F(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = A \cdot \overrightarrow{\mathbf{x}}$. Czy F jest symetrią względem punktu $(0, 0, 0)$ lub względem pewnej płaszczyzny?

8.23 Niech $C = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Obliczyć $C \cdot \mathbf{v}$ oraz znaleźć wartości i wektory własne macierzy C.
Znaleźć wartości i **rzeczywiste** wektory własne macierzy C^3, a potem macierzy C^{-3}.
Znaleźć macierze C^6 i C^{2013}.
Niech $G(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = C \cdot \overrightarrow{\mathbf{x}}$. Czy przekształcenie G jest obrotem wokół pewnej prostej?

8.24 Niech $M = \begin{pmatrix} A & 0_{k,m} \\ C & D \end{pmatrix}$ będzie macierzą wymiaru $k+m \times k+m$ złożoną z macierzy kwadratowej A wymiaru $k \times k$ znajdującej się w lewym górnym rogu M, macierzy prostokątnej $0_{k,m}$ wymiaru $k \times m$, złożonej z samych zer, znajdującej się w prawym górnym rogu M, macierzy prostokątnej C wymiaru $m \times k$ znajdującej się w lewym dolnym rogu M i wreszcie macierzy kwadratowej D wymiaru $m \times m$ znajdującej się w prawym dolnym rogu.
Dowieść, że $\det(M) = \det(A) \cdot \det(D)$.
Oczywiście teza pozostanie w mocy, gdy zastąpimy macierz C macierzą $0_{m,k}$, a macierz $0_{k,m}$ dowolną macierzą wymiaru $k \times m$.

8.25 Niech $M = \begin{pmatrix} 0_{k,m} & B \\ C & D \end{pmatrix}$ będzie macierzą wymiaru $k+m \times k+m$ złożoną macierzy prostokątnej $0_{k,m}$ wymiaru $k \times m$, złożonej z samych zer, znajdującej się w lewym górnym rogu M, z macierzy kwadratowej B wymiaru $k \times k$ znajdującej się w prawym górnym rogu M, macierzy kwadratowej C wymiaru $m \times m$ znajdującej się w lewym dolnym rogu M i wreszcie macierzy prostokątnej D wymiaru $m \times k$ znajdującej się w prawym dolnym rogu.
Dowieść, że $\det(M) = (-1)^k \det(B) \cdot \det(C)$.

8.26 Niech $M_1 = (a_{i,j})$ i $M_2 = (b_{i,j})$ będą macierzami kwadratowymi wymiaru $k \times k$, niech $I_{k,k}$ oznacza macierz jednostkową wymiaru $k \times k$, tzn. $I = (\delta_{r,s})$, gdzie $\delta_{r,r} = 1$ i $\delta_{r,s} = 0$ dla $r \neq s$, $1 \leqslant r, s \leqslant k$, $0_{k,k}$ oznacza macierz zerową wymiaru $k \times k$. Niech $M = \begin{pmatrix} M_1 \cdot M_2 & 0_{k,k} \\ M_2 & I_{k,k} \end{pmatrix}$ będzie macierzą kwadratową wymiaru $2k \times 2k$ złożoną ze wskazanych macierzy kwadratowych w pokazany sposób.
Dowieść, że $\det(M) = \det\left(\begin{pmatrix} 0_{k,k} & -M_1 \\ M_2 & I_{k,k} \end{pmatrix}\right)$.
Wywnioskować z otrzymanej równości, że $\det(M_1 M_2) = \det(M_1)\det(M_2)$.
W tym zadaniu pokazujmy nieco inny dowód twierdzenia Cauchy'ego, według którego wyznacznik iloczynu dwu macierzy jest iloczynem ich wyznaczników.