Całki: pola, objętości, środek ciężkości

Po zapoznaniu się z najprostszymi metodami obliczania całek, zajmiemy się pewnymi zastosowaniami teorii.

Twierdzenie 7.2.1 (o porównywaniu całek)
Jeśli funkcje f i g mają funkcje pierwotne na przedziale $[a, b]$ i dla każdego $x \in [a, b]$ zachodzi nierówność $f(x) \leq g(x)$, to również $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

Dowód. Niech F i G oznaczają funkcje pierwotne funkcji f i g. W tej sytuacji

$$G'(x) - F'(x) = g(x) - f(x) \geq 0\,,$$

zatem funkcja $G - F$ jest niemalejąca. Wobec tego

$$\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) - \big(F(b) - F(a)\big) = \\ = \big(G(b) - F(b)\big) - \big(G(a) - F(a)\big) \geq 0\,. \blacksquare$$

Twierdzenie 7.2.2 (o wartości średniej)
Niech $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Wtedy istnieje liczba $c \in [a, b]$, taka że zachodzi równość

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b - a)\,.$$

Dowód. Wynika natychmiast z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej zastosowanego do funkcji pierwotnej funkcji f: $F(b) - F(a) = F'(c)(b - a) = f(c)(b - a)\,.$ $\blacksquare$

Definicja 7.2.3 (wartości średniej funkcji.)
Liczbę $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \quad \big(= f(c)\big)$ nazywamy wartością średnią funkcji f. $\blacksquare$

Można myśleć o niej tak: jeśli funkcja f przyjmuje jedynie wartości dodatnie, to liczba $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ jest wysokością prostokąta o podstawie $b - a$, którego pole równe jest ,,polu pod wykresem" funkcji f. Jeśli $f(x)$ oznacza prędkość w chwili x, to wtedy $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ oznacza iloraz przebytej drogi $\int_a^b f(x)\,dx$* przez czas $b-a$ zużyty na jej przebycie, czyli średnią prędkość w tym ruchu. Następne przykłady, które motywują tę definicję pojawią się niebawem i czytelnik z pewnością je dostrzeże.

---

* Przypomnijmy, że jeśli $F(x)$ oznacza położenie poruszającego się punktu w momencie x, to $f(x)=F'(x)$ oznacza prędkość w tym momencie, mówiliśmy o tym przy okazji definicji pochodnej funkcji jednej zmiennej.

Twierdzenie 7.2.4 (o addytywności całki względem przedziału)
Jeśli $a < c < b$ i funkcja f ma funkcję pierwotną na przedziale $[a,b]$, to zachodzi równość

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,.$$

Dowód. Niech F oznacza funkcję pierwotną funkcji f. Wtedy prawdziwe są wzory:
$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\,, \qquad \int_a^c f(x)\,dx = F(c) - F(a)\,, \qquad \int_c^b f(x)\,dx = F(b) - F(c)\,.$
Z nich teza wynika natychmiast. ■

Punktem wyjścia do wielu zastosowań całki jest

Twierdzenie 7.2.5 (o sumach Riemanna)
Jeśli funkcja $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, to dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$, taka że jeżeli $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, $x_{i-1} \le t_i \le x_i$ oraz $x_i - x_{i-1} < \delta$ dla każdego $i = 1,2,\ldots,n$, to zachodzi nierówność

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \Big(f(t_1)(x_1 - x_0) + f(t_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(t_n)(x_n - x_{n-1})\Big)\right| < \varepsilon\,.$$

Dowód. Ponieważ funkcja f jest ciągła na przedziale $[a,b]$, więc na każdym z przedziałów $[x_{i-1}, x_i]$ przyjmuje kresy. Niech m_i oznacza kres dolny, a M_i — górny. Wobec tego dla każdego $x \in [x_{i-1}, x_i]$ zachodzi nierówność $m_{i-1} \le f(x) \le M_i$. Wobec tego, na mocy twierdzenia o porównywaniu całek zachodzą nierówności:
$$m_i(x_i - x_{i-1}) \le \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \le M_i(x_i - x_{i-1}) \text{ dla każdego } i = 1,2,\ldots,n\,.$$
Dodając je stronami i korzystając z twierdzenia o addytywności funkcji względem przedziału otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) \le \int_a^b f(x)\,dx \le \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})\,.$$

Ponieważ f jest ciągła na przedziale domkniętym $[a,b]$, więc dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$, taka że jeśli $|t - s| < \delta$, to $|f(t) - f(s)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.* Wobec tego jeśli $x_i - x_{i-1} < \delta$, to $M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{b-a}$ dla wszystkich i. Stąd od razu wynika, że zachodzi:
$\displaystyle\sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon$. Stąd teza wynika natychmiast: liczby $\displaystyle\sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1})$ oraz $\int_a^b f(x)\,dx$ leżą między sumami $\displaystyle\sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1})$ i $\displaystyle\sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$, których różnica jest mniejsza od ε. Dowód został zakończony. ■

---

* To nie jest definicja ciągłości i w zasadzie wymaga dowodu!

Sumy $\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$ i $\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$ nazywane są dolną i górną sumą Darboux, suma $\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$ — sumą Riemanna. Istnieją funkcje nieciągłe, które mają funkcje pierwotne, czyli są całkowalne w sensie Newtona, dla których teza twierdzenia o sumach Riemanna nie zachodzi. Przykładów podawać nie będziemy, zainteresowany czytelnik może je znaleźć w pozycjach obszerniejszych, np. we wspominanym już drugim tomie książki G.M.Fichtenholza, "Rachunek różniczkowy i całkowy". Podamy jednak definicję całkowalności w sensie Riemanna.

Definicja 7.2.6 (funkcji całkowalnej w sensie Riemanna)
Funkcja $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba rzeczywista I, taka że dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$, taka że jeżeli $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, $x_{i-1} \le t_i \le x_i$ oraz $x_i - x_{i-1} < \delta$ dla każdego $i = 1, 2, \ldots, n$, to zachodzi nierówność

$$\Big| I - \big(f(t_1)(x_1 - x_0) + f(t_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(t_n)(x_n - x_{n-1})\big) \Big| < \varepsilon .$$

Liczba I nazywana jest całką Riemanna funkcji f na przedziale domkniętym $[a,b]$ i oznaczana jest symbolem $\int_a^b f(x)\,dx$. ■

Z twierdzenia o sumach Riemanna wynika, że funkcje ciągłe są całkowalne w sensie Riemanna i że ich całki Riemanna oraz Newtona to te same liczby. Stosowanie tego samego symbolu jest więc w pełni uzasadnione tym bardziej, że można udowodnić, że jeśli funkcja (nieciągła) jest całkowalna zarówno w sensie Riemanna jak i w sensie Newtona, to obie całki się pokrywają. O funkcjach całkowalnych w sensie Riemanna powiemy niewiele.

Twierdzenie 7.2.7 (o ograniczoności funkcji całkowalnej w sensie Riemanna) Funkcja całkowalna w sensie Riemanna jest ograniczona. ■

Twierdzenie 7.2.8 (o całkowalności funkcji nieciągłej w skończenie wielu punktach)
Jeśli funkcja $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ograniczona i ma skończenie wiele punktów nieciągłości, to jest całkowalna w sensie Riemanna. ■

Twierdzenie 7.2.9 (o całkowalności funkcji monotonicznej)
Jeśli funkcja $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest monotoniczna, to jest całkowalna w sensie Riemanna. ■

Dowody tych twierdzeń pomijamy, choć nie są ani trudne, ani długie. Zajmijmy się raczej interpretacją sum Riemanna. Załóżmy, że f jest funkcją dodatnią. By rozpatrzeć sumę Riemanna podzieliliśmy przedział $[a,b]$ na krótkie przedzialiki. W każdym z nich wybraliśmy punkt t_i. Składnik $f(t_i)(x_i - x_{i-1})$, to pole prostokąta o podstawie $[x_{i-1}, x_i]$ i wysokości

$f(t_i)$. Górna podstawa tego prostokąta ma punkt wspólny w wykresem funkcji f na przedziale $[x_{i-1}, x_i]$. Można więc myśleć, że przybliżamy ,,pole pod wykresem" za pomocą wielu wąskich prostokątów. Dolna suma Darboux związana jest z przybliżaniem tego samego pola z dołu, w tym przypadku prostokąty mieszczą się pod wykresem. Górna suma Darboux to suma pól nieco wyższych prostokątów, tak że ich suma zawiera ,,pole pod wykresem". Zinterpretownie sum w przypadku funkcji ujemnej nie nastręcza kłopotów. W przypadku funkcji zmieniającej znak należy podzielić przedział na części tak, by na każdej z nich funkcja miała stały znak (niestety może się okazać, że musi ich być nieskończenie wiele). Gdyby całki służyły jedynie do obliczania pól nie musielibyśmy o nich w ogóle o takich funkcjach mówić. Pokażemy jeszcze kilka przykładów geometryczne i fizycznych. W dalszym ciągu w przypadku **zbioru** $A \subseteq \mathbb{R}^3$ przez $|A|$ lub $|A|_3$ oznaczać będziemy jego objętość (matematycy często używają terminu: miarę trójwymiarową). Pole zbioru A oznaczać będziemy przez $|A|$ lub $|A|_2$, jeśli możliwe będą wątpliwości dotyczące wymiaru. Podobnie długość krzywej C oznaczymy przez $|C|$ lub $|C|_1$.

Obliczanie objętości

Załóżmy, że $A \subset \mathbb{R}^3$ jest przyzwoitym zbiorem ograniczonym.* Niech $P(z)$ oznacza pole przekroju zbioru A płaszczyzną przechodzącą przez punkt $(0,0,z)$, prostopadłą do osi $\overrightarrow{OZ}$. Wtedy objętość $|A|$ zbioru A równa jest $\int_a^b P(z)\,dz$, przy czym a i b są tak dobrane, by płaszczyzna, o której mowa nie przecinała zbioru A, gdy $z \notin [a,b]$. Ścisłego dowodu tego wzoru nie podamy, spróbujemy jednak wyjaśnić jego genezę. Punktem wyjścia będzie stwierdzenie, że jeśli zbiór A składa się z podstawy B zawartej w pewnej płaszczyźnie Π i wszystkich odcinków do niej prostopadłych, tej samej długości h, których jeden koniec leży w zbiorze B i które leżą po jednej stronie płaszczyzny Π,♣ to objętość zbioru $|A| = |B| \cdot h$. To stwierdzenie uogólnia wzory na objętość *walca, prostopadłościanu, czy graniastosłupa prostego.*

Załóżmy teraz, że zbiór A jest ,,dostatecznie przyzwoity" oraz że

$$a = z_0 < z_1 < z_2 < \ldots < z_{n-1} < z_n = b$$

jest podziałem przedziału $[a,b]$ na dostatecznie krótkie przedziały. Wtedy objętość tej części zbioru A, która jest zawarta między płaszczyznami o równaniach $z = z_{i-1}$ i $z = z_i$ równa jest $P(t_i)(z_i - z_{i-1})$, gdzie $t_i \in [z_{i-1}, z_i]$ jest odpowiednio dobranym punktem $\Big($liczba $P(t_i)$ ma być średnią wartością pól $P(z)$ dla $z \in [z_{i-1}, z_i]$ — ta część zbioru A to *nieomal* walec, na ogół niekołowy, o polu podstawy $P(t_i)\Big)$. W tej sytuacji możemy twierdzić, że objętość równa jest

---

* Nie możemy tu wyjaśniać o jakie zbiory może w rzeczywistości chodzić. Wystarczy powiedzieć, że to o czym chcemy powiedzieć może być stosowane w przypadku zbiorów otwartych, domkniętych i wielu innych, kiedyś myślano, że do wszystkich, ale tak nie jest. Rozstrzyganie tych kwestii należy pozostawić matematykom. Niematematyk może przyjąć, że chodzi o wszystkie zbiory.

♣ Matematycy nazywają taki zbiór walcem o podstawie B, a zwykły walec — walcem kołowym.

$\sum_{i=1}^{n} P(t_i)(z_i - z_{i-1})$. Gdybyśmy nie starali się wybrać punktu t_i tak, by zachodziła równość, to i tak zachodziłaby równość przybliżona przy założeniu, że pole $P(z)$ jest funkcją ciągłą, a przynajmniej całkowalną w sensie Riemanna, zmiennej z. To mówi o tym jak należy myśleć o objętości. Powinna być równa $|A| = \int_a^b P(z)\,dz$. Można albo uściślić definicję objętości, albo przyjąć, że podany wzór to jej definicja. Pokażemy teraz na kilku przykładach jak ten wzór działa. Zaczniemy od wzorów znanych ze szkoły.

Przykład 7.2.1 Niech B będzie zbiorem zawartym w płaszczyźnie Π, którego pole równe jest P. Niech W będzie punktem leżącym poza płaszczyzną Π i niech S oznacza sumę wszystkich odcinków zaczynających się w punkcie W, których drugi koniec leży w zbiorze B (jeśli B jest kołem i punkt W leży nad jego środkiem, to S jest stożkiem o podstawie B i wierzchołku W; jeśli B jest wielokątem, to S jest ostrosłupem o wierzchołku W i podstawie B) — taki zbiór S matematycy nazywają stożkiem o podstawie B i wierzchołku W. Niech h oznacza odległość punktu W od płaszczyzny Π, czyli wysokość stożka S. Przetnijmy stożek S płaszczyzną równoległą do Π, której odległość od płaszczyzny Π równa jest $z \in [0,h]$. Otrzymany przekrój jest figurą podobną do B, w skali $\frac{h-z}{h}$. Ponieważ stosunek pól figur podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa, więc pole $P(z)$ tego przekroju jest równe $\left(\frac{h-z}{h}\right)^2 P$. Wobec tego

$$|S| = \int_0^h \left(\tfrac{h-z}{h}\right)^2 P\,dz = \tfrac{P}{h^2}\int_0^h \left(h^2 - 2hz + z^2\right) dz = \tfrac{P}{h^2}\left(h^3 - h^3 + \tfrac{1}{3}h^3\right) = \tfrac{1}{3}Ph.$$

Otrzymaliśmy więc podawane w szkołach wzory na objętość stożka i ostrosłupa jednocześnie, w rzeczywistości wzór otrzymany w tym przykładzie jest nieco ogólniejszy. ■

Przykład 7.2.2 Załóżmy, że każdy przekrój poziomy zbioru A otrzymany w wyniku przecięcia zbioru A płaszczyzną znajdującą się na wysokości $z \in [0,h]$ ma to samo pole P i że przekroje płaszczyznami poziomymi znajdującymi się na innych wysokościach są puste. Wobec tego zachodzi równość $|A| = \int_0^h P\,dz = Ph$. Otrzymany wynik stosuje się oczywiście do prostopadłościanu, ale również do równoległościanu, mogą dojść skręcenia różne na różnych poziomach. Twierdzenie to zostało sformułowane w XVII w. przez Cavalieri'ego. Jest zwane zasadą Cavalieri'ego. W czasach kiedy autor tego tekstu był uczniem liceum, zasada ta znajdowała się w podręczniku do geometrii, z którego uczyli się wtedy wszyscy licealiści w Polsce. ■

Przykład 7.2.3 Zajmijmy się kulą o promieniu r. Bez straty ogólności rozważań można przyjąć, że jej środkiem jest punkt $\mathbf{0}$. Przecinając kulę płaszczyzną złożoną z punktów, których trzecia współrzędna równa jest z otrzymujemy koło o promieniu $\sqrt{r^2 - z^2}$. Pole tego koła równe jest $\pi(r^2 - z^2)$. Wobec tego objętość kuli równa jest

$$\int_{-r}^{r}\pi(r^2-z^2)\,dz=\pi\left(r^2\cdot 2r-\left(\tfrac{1}{3}r^3-\tfrac{1}{3}(-r)^3\right)\right)=\tfrac{4}{3}\pi r^3 .$$

Znów otrzymaliśmy w bardzo prosty sposób znany ze szkoły wzór. Otrzymał go dawno temu Archimedes dzięki zręcznemu rozumowaniu geometrycznemu. Nie znano wtedy całek, więc zajęło mu to więcej miejsca niż nam korzystającym z wielu znacznie późniejszych pomysłów. ■

Przykład 7.2.4 Znajdziemy objętość dętki zakładając, że powstaje ona w wyniku obrotu koła o promieniu $r>0$ wokół prostej leżącej w płaszczyźnie tego koła w odległości $R>r$ od jego środka. Matematycy powierzchnię dętki nazywają torusem, czego oczywiście nie trzeba pamiętać. Przyjmiemy, że środkiem koła o promieniu r jest punkt $(R,0,0)$ oraz że to koło leży w płaszczyźnie $y=0$. Przetnijmy (w myśli) dętkę płaszczyzną poziomą przechodzącą przez punkt $(0,0,z)$. Przekrój jest pierścieniem kołowym, którego promień wewnętrzny równy jest $R-\sqrt{r^2-z^2}$ a zewnętrzny to $R+\sqrt{r^2-z^2}$, zatem polem tego pierścienia kołowego jest liczba

$$\pi\left(R+\sqrt{r^2-z^2}\right)^2-\pi\left(R-\sqrt{r^2-z^2}\right)^2=4\pi R\sqrt{r^2-z^2} .$$

Wynika stąd, że objętością dętki jest $\int_{-r}^{r}4\pi R\sqrt{r^2-z^2}\,dz=4\pi R\cdot\frac{1}{2}\pi r^2=2\pi^2Rr^2$. Zadanie zostało rozwiązane. ■

Tych kilka przykładów nieźle ilustruje skuteczność rachunku całkowego. Otrzymanie tych wzorów bez rachunku całkowego jest możliwe, ale znane autorowi wyprowadzenia w istocie zawierają przejścia graniczne równoważne temu, które pojawia się w twierdzeniu o sumach Riemanna. Można więc twierdzić, że stworzenie rachunku całkowego stanowiło ukoronowanie wysiłków wielu ludzi obliczających różne wielkości, np. objętości.

Obliczanie pól jeszcze raz

Przedstawiliśmy przed chwilą podejście do kwestii obliczania objętości polegające na ,,plasterkowaniu" zbioru trójwymiarowego. Załóżmy, że na przedziale domkniętym dane są dwie funkcje ciągłe $g,f\colon[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$, przy czym dla każdego $x\in[a,b]$ zachodzi równość $g(x)\geq f(x)$. Korzystając z wzoru na pole pod wykresem funkcji i odejmując pola pod wykresem funkcji f od pola pod wykresem funkcji g otrzymujemy $\int_a^b g(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b(g(x)-f(x))\,dx$. Jest to pole obszaru ograniczonego z dołu wykresem funkcji f, a z góry — wykresem funkcji g (można oczywiście założyć, że $f(x)\geq 0$ dla każdego $x\in[a,b]$, bo pole nie zmienia się przy przesunięciu). Jest mniej więcej jasne, że jeśli opuścimy założenie $g\geq f$, to wzór na pole obszaru ograniczonego wykresami funkcji g i f w dalszym ciągu będzie obowiązywać tyle, że w wyniku otrzymamy $\int_a^b|f(x)-g(x)|\,dx$. Okazuje się, że całkujemy długość odcinka otrzymanego w przecięciu obszaru prostą pionową (zamiast pola przekroju w przypadku objętości) i w wyniku otrzymujemy pole obszaru (zamiast objętości). Przykładowo pole koła można obliczać traktując je jako obszar zawarty między wykresami funkcji $-\sqrt{r^2-x^2}$ oraz $\sqrt{r^2-x^2}$. Jest więc ono równe

$\int_{-r}^{r}\left(\sqrt{r^2-x^2}-\left(-\sqrt{r^2-x^2}\right)dx\right)=2\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx=2\frac{\pi r^2}{2}=\pi r^2\,.$

Nie będziemy teraz mnożyć przykładów. Zaznaczyć chcieliśmy jedynie, że pola można obliczać posługując się tą samą ideą, która ma zastosowanie w przypadku objętości. Sugeruje to możliwość zbudowania ogólniejszej teorii niezależnej od wymiaru. Dokonali tego matematycy na przełomie XIX i XX wieku, dwa najważniejsze nazwiska to B.Riemann i H.Lebesgue. Teoria Lebesgue'a zyskała wielką popularność ze względu na znacznie wygodniejsze w użyciu twierdzenia pozwalające na obliczanie granic ciągów całek. Tych problemów nie będziemy tu omawiać. Są przedstawione w wielu podręcznikach przeznaczonych dla matematyków i fizyków teoretyków.

Długość wykresu funkcji

Załóżmy, że funkcja $f\colon[a,b]\longrightarrow(0,+\infty)$ jest różniczkowalna i że jej pochodna f' jest ciągła na przedziale $[a,b]$. Jasne jest, że długość krzywej powinniśmy przybliżać długością łamanej (linii złożonej z odcinków), której wierzchołki dzielą wykres funkcji f na małe fragmenty. Omówimy to nieco dokładniej.

Niech $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$. Niech l_i oznacza długość odcinka łączącego punkty $\big(x_{i-1},f(x_{i-1})\big)$ i $\big(x_i,f(x_i)\big)$. Mamy więc

$$l_i=\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+\big(f(x_i)-f(x_{i-1})\big)^2}\,.$$

Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika, że istnieje taka liczba $t_i\in[x_{i-1},x_i]$, że zachodzi równość

$$l_i=\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+f'(t_i)^2(x_i-x_{i-1})^2}=(x_i-x_{i-1})\sqrt{1+(f'(t_i)^2)}\,.$$

Stąd wynika, że długość łamanej równa jest

$$l_1+l_2+\ldots+l_n=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\sqrt{1+(f'(t_i)^2)}\,.$$

Długość wykresu funkcji f to wobec tego $\int_a^b\sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}\,dx$ — wynika to oczywiście z twierdzenia o sumach Riemanna.

Ten wynik jest bardzo jasny z punktu widzenia fizyki. Załóżmy, że wykres funkcji to np. szosa, po której porusza się samochód w ten sposób, że składowa pozioma wektora prędkości równa jest 1. Niech x oznacza czas. Wtedy w chwili x znajdujemy się w punkcie $\big(x,f(x)\big)$ — zakładamy, że startujemy z punktu $\big(a,f(a)\big)$, wtedy $f'(x)$ mierzy prędkość zmian wartości funkcji f w chwili x, jest więc to składowa pionowa wektora prędkości naszego pojazdu. Jego prędkością skalarną jest więc długość wektora prędkości, czyli liczba $\sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}$, ta prędkość jest oczywiście zależna od czasu. Przebytą drogę należy obliczać mnożąc czas przez prędkość. Ponieważ prędkość jest zmienna, więc prowadzi to do dzielenia czasu podróży, na krótkie odcinki, w krótkim okresie czasu prędkość jest prawie stała (prędkość jest funkcją ciągłą czasu), następnie mnożymy ten krótki czas przez prędkość z jaką się w nim poruszamy i sumujemy.

Otrzymujemy sumę Riemanna funkcji $\sqrt{1+(f'(x))^2}$, a po przejściu granicznym (rozpatrywane odcinki czasu są coraz bliższe 0) otrzymujemy całkę $\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$. Rozumując analogicznie dojść można do wniosku, że $\int_a^b f(x)\,dx$ jest drogą przebytą przez pojazd poruszający się po prostoliniowej drodze w ten sposób, że w chwili x jego prędkością jest $f(x)$.

Ten argument jest bardzo ważny historycznie: Newton tworzył rachunek różniczkowy i całkowy w silnym związku z fizyką. Pojęcie prędkości nie jest trudne, przemawia do wyobraźni, więc studenci proszeni są o chwilę zastanowienia nad tym tekstem! Warto też zdać sobie sprawę z tego, że całkowicie analogicznie przyspieszenie jest powiązane z prędkością — po prostu wszędzie zastępujemy *położenie* przez prędkość i jednocześnie *prędkość* przez przyspieszenie. ■

Przykład 7.2.5 Obliczymy długość łuku paraboli $y=x^2$ zaczynającego się w punkcie $(0,0)$ i kończącego się w punkcie $\left(a,a^2\right)$. Zgodnie z poprzedzającymi ten przykład rozważaniami ta długość równa jest $\int_0^a \sqrt{1+(2x)^2}\,dx$. Podobną całkę obliczyliśmy w przykładzie 10.28. Teraz zrobimy to nieco inaczej. Niech $x=\frac{1}{2}\operatorname{tg} t$. Wtedy $\sqrt{1+4x^2}=\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}=\sqrt{\frac{1}{\cos^t}}=\frac{1}{\cos t}$ — możemy tak napisać, bo możemy przyjmować, że $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ i wobec tego $\cos t>0$. Jeśli $x=\frac{1}{2}\operatorname{tg} t$, to $dx=\frac{1}{2\cos^2 t}\,dt$, więc

$\int\sqrt{1+4x^2}\,dx=\int\frac{1}{2\cos^3 t}\,dt=\int\frac{\cos^2 t+\sin^2 t}{2\cos^3 t}\,dt=$

$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\cos t}\,dt+\frac{1}{2}\int\sin t\frac{\sin t}{\cos^3 t}\,dt \overset{\text{przez}}{\underset{\text{części}}{=\!=\!=}} \frac{1}{2}\int\frac{1}{\cos t}\,dt+\frac{1}{2}\sin t\frac{1}{2\cos^2 t}-\frac{1}{2}\int\frac{\cos t}{2\cos^2 t}\,dt=$

$=\frac{\sin t}{4\cos^2 t}+\frac{1}{4}\int\frac{1}{\cos t}\,dt=\frac{\sin t}{4\cos^2 t}+\frac{1}{4}\int\frac{\cos t}{1-\sin^2 t}\,dt=$

$=\frac{\sin t}{4\cos^2 t}+\frac{1}{8}\int\frac{\cos t}{1-\sin t}\,dt+\frac{1}{8}\int\frac{\cos t}{1+\sin t}\,dt+C=\frac{\sin t}{4\cos^2 t}-\frac{1}{8}\ln(1-\sin t)+\frac{1}{8}\ln(1+\sin t)+C=$

$=\frac{\sin t}{4\cos^2 t}+\frac{1}{8}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t}+C=\frac{\sin t}{4\cos^2 t}+\frac{1}{8}\ln\frac{(1+\sin t)^2}{1-\sin^2 t}+C=\frac{\sin t}{4\cos^2 t}+\frac{1}{4}\ln\frac{1+\sin t}{\cos t}+C=$

$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\cos t}\cdot\operatorname{tg} t+\ln\left(\frac{1}{\cos t}+\operatorname{tg} t\right)\right)+C=\frac{1}{4}\left(\sqrt{1+4x^2}\cdot 2x+\ln\left(\sqrt{1+4x^2}+2x\right)\right)+C$

Stąd wynika, że ten łuk paraboli ma długość. $\frac{a}{2}\sqrt{1+4a^2}+\frac{1}{4}\ln\left(2a+\sqrt{1+4a^2}\right)$. ■

Okazuje się, że wynik jest zadziwiająco skomplikowany. W XIX w. matematykom udało się wykazać, że długość elipsy, która nie jest okręgiem, nie daje się wyrazić za pomocą tzw. funkcji elementarnych. Można to zrobić za pomocą tzw. funkcji eliptycznych. Piszemy o tym po to jedynie, by raz jeszcze przestrzec, że mówimy tu jedynie o rzeczach w matematyce najprostszych, bo te tylko znajdują się w i tak wypełnionych programach studiów.

Obliczymy teraz długość okręgu, a właściwie jego połowy, choć wszyscy dobrze wiedzą, co otrzymamy. Tu rachunek będzie bardzo prosty, a różnica między okręgiem i elipsą tak niewielka. Niewielka ale bardzo istotna: w całce, którą trzeba znaleźć w przypadku elipsy występuje iloraz *dwóch* wielomianów kwadratowych, w przypadku okręgu wielomian jest tylko *jeden*.

Przykład 7.2.6 Półokrąg o promieniu $r>0$ możemy potraktować jako wykres funkcji

$\sqrt{r^2-x^2}$ zdefiniowanej na przedziale $[-r,r]$. Wobec tego jego długość równa jest
$\int_{-r}^{r}\sqrt{1+\Big(\big(\sqrt{r^2-x^2}\big)'\Big)^2}\,dx=\int_{-r}^{r}\sqrt{1+\Big(\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}\Big)^2}\,dx=\int_{-r}^{r}\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx=$

$$\int_{-r}^{r}\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx \xlongequal[dx=r\cos t\,dt]{x=r\sin t} = r\int_{-\pi/2}^{\pi/2}dt=\pi r\,.$$

Otrzymaliśmy więc dobrze znany wynik.* ■

Pola powierzchni brył obrotowych

Pokażemy teraz jest jeszcze jedno zastosowanie geometryczne całek, tym razem do obliczania pola powierzchni bryły obrotowej. Tym razem punktem wyjścia będzie wzór na pole powierzchni bocznej stożka πrl, gdzie r to promień podstawy stożka, a l to długość tworzącej. Z tego wzoru bez trudu można wyprowadzić wzór na pole powierzchni bocznej stożka ściętego, w którym większa podstawa ma promień r_1, mniejsza — promień r_2, a tworząca to l. Ten stożek ścięty można potraktować jako wynik odcięcia od stożka o promieniu podstawy r_1 i tworzącej $l\frac{r_1}{r_1-r_2}$ stożka o promieniu podstawy r_2 i tworzącej $l\frac{r_2}{r_1-r_2}$ — wynika to z podobieństwa trójkątów. Wobec tego pole powierzchni bocznej stożka ściętego jest równe $\pi\frac{lr_1^2}{r_1-r_2}-\pi\frac{lr_2^2}{r_1-r_2}=\pi l\,(r_1+r_2)$.*

Załóżmy, że funkcja $f\colon[a,b]\longrightarrow(0,+\infty)$ jest różniczkowalna i że jej pochodna jest ciągła. Obrócimy wykres funkcji f wokół osi x. W wyniku otrzymamy powierzchnię, której pole obliczymy. Zauważmy jeszcze tylko, że jeśli funkcja f jest liniowa, to w wyniku tego obrotu otrzymujemy powierzchnię boczną stożka ściętego ewentualnie walca, jeśli funkcja jest stała. Podzielimy przedział $[a,b]$ punktami $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$ na krótkie, niekoniecznie równe, przedziały. To, co powstaje w wyniku obrotu części wykresu odpowiadającej przedziałowi $[x_{i-1},x_i]$, można przybliżyć stożkiem ściętym o wysokości x_i-x_{i-1} i promieniach podstaw $f(x_i)$, $f(x_{i-1})$ — ten stożek staje się walcem, gdy $f(x_{i-1})=f(x_i)$. Pole powierzchni bocznej takiego stożka, to zgodnie z przypomnianymi przed chwilą wzorami $\pi l_i\big(f(x_{i-1})+f(x_i)\big)$, gdzie l_i oznacza jego tworzącą, czyli

$$l_i=\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+\big(f(x_i)-f(x_{i-1})\big)^2}=(x_i-x_{i-1})\sqrt{1+\big(f'(t_i)\big)^2}$$

dla pewnego $t_i\in(x_{i-1},x_i)$, istnienie takiej liczby t wynika z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej. Ponieważ przedział $[x_{i-1},x_i]$ jest ,,krótki", więc

$$\pi l_i\left(f(x_{i-1})+f(x_i)\right)\approx 2\pi\cdot f(t_i)\sqrt{1+\big(f'(t_i)\big)^2}\,,$$

przyjęliśmy tu, że $f(x_{i-1})\approx f(t_i)\approx f(x_i)$, co jest dopuszczalne, ale nie chcemy się wdawać w bardziej szczegółowe szacunki, bo dla osób o niewielkiej wprawie będą one trudnawe i na pewno żmudne, dla wprawnych — banalne.

Wobec tego pole powierzchni powstałej w wyniku obrotu wykresu funkcji f można przy-

* Trochę oszukując: funkcja $\sqrt{r^2-x^2}$ nie ma skończonej pochodnej w końcach przedziału, o tym opowiemy później.

* Trochę to przypomina wzór na pole trapezu: $\frac{1}{2}(2\pi r_1+2\pi r_2)l$ – połowa sumy podstaw razy wysokość.

bliżyć sumą $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2\pi\cdot f(t_i)\sqrt{1+\big(f'(t_i)\big)^2}$, która z kolei, na mocy twierdzenia o sumach Riemanna, przybliża całkę $\int_a^b 2\pi f(t)\sqrt{1+\big(f'(t)\big)^2}\,dt$. Ta całka jest więc równa polu powierzchni powstałej w wyniku obrotu funkcji f wokół osi x. Błędy, które popełniamy w kolejnych krokach są małe i to jako błędy względne, co jest ważne, bo pola części, na które poszatkowaliśmy powierzchnię, są małe i jest ich wiele, więc teoretycznie błędy mogłyby się zsumować do czegoś dużego — tak się nie dzieje, bo jak zapewniamy czytelników, błędy **względne** są małe! Tu jeszcze raz stykamy się z jedną z podstawowych idei analizy matematycznej: funkcję przybliżamy funkcją liniową tak, by błąd *względny* był mały! Czas na jakiś przykład.

Przykład 7.2.7 Niech $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ dla $a\le x\le a+h$, przy czym $-r\le a$ oraz $a+h\le r$. W wyniku obrotu wykresu funkcji f określonej na przedziale $[a,a+h]$ otrzymujemy część powierzchni kuli zawartą między dwiema równoległymi płaszczyznami, których odległość równa jest h. Zgodnie z omówionym wzorem pole tej części sfery równe jest

$$2\pi\int_a^{a+h}\sqrt{r^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}\,dx=2\pi r\int_a^{a+h}dx=2\pi rh\,.$$

W szczególności, jeżeli $a=-r$ i $h=2r$ otrzymujemy wzór na pole powierzchni całej kuli, który większość maturzystów miała okazję poznać w szkole. Jednak otrzymaliśmy coś więcej: wzór na pole powierzchni części sfery zawartej między dwiema równoległymi płaszczyznami oddalonymi o h. Zauważmy jeszcze, że we wzorze tym NIE występuje liczba a. Oznacza to, że pole jest od a niezależne, ważne jest tylko to, że obie płaszczyzny przecinają sferę. Może się zdarzyć, że jedna z tych płaszczyzn przechodzi przez jeden z biegunów, a może się zdarzyć, że płaszczyzna równika dzieli przestrzeń między nimi na pół. Pola są równe! Nie jest to chyba całkiem oczywiste, choć Archimedes z pewnością to wiedział.* ■

Przykład 7.2.8 Obliczymy teraz pole powierzchni dętki opisanej już w przykładzie 11.4. Przypomnijmy: powierzchnia dętki była otrzymana jako wynik obrotu okręgu zdefiniowanego równaniami $y=0$, $(x-R)^2+z^2=r^2$ wokół osi z. Można więc przyjąć, że obracamy wokół osi z (a nie wokół osi x) wykresy dwu funkcji zmiennej z $R+\sqrt{r^2-z^2}$ oraz $R-\sqrt{r^2-z^2}$. Część wspólna otrzymanych powierzchni składa się z dwóch okręgów, więc jej pole równe jest 0, zatem możemy obliczyć pola obu powierzchni i dodać. W pierwszym przypadku pole równe jest $2\pi\int_{-r}^{r}\left(R+\sqrt{r^2-z^2}\right)\cdot\sqrt{1+\left(\frac{-z}{\sqrt{r^2-z^2}}\right)^2}\,dz = 2\pi r\int_{-r}^{r}\left(\frac{R}{\sqrt{r^2-z^2}}+1\right)dz = 2\pi^2rR+2\pi r^2$,

*W podręczniku do geometrii używanym we wszystkich polskich liceach, gdy autor tego tekstu był uczniem, twierdzenie to było podane wraz z dowodem nie korzystającym w jawnej postaci z całek. Oczywiście tylko część uczniów je zauważała.

więc w drugim — $2\pi\int_{-r}^{r}\left(R-\sqrt{r^2-z^2}\right)\cdot\sqrt{1+\left(\frac{-z}{\sqrt{r^2-z^2}}\right)^2}\,dz = 2\pi^2rR-2\pi r^2$. Sumując otrzymujemy $4\pi^2rR$. ■

Jest więc widoczne, że za pomocą całek można dać sobie radę z obliczaniem objętości, pól i długości. Dodać warto, że często wyniki nie dają się wyrazić za pomocą funkcji elementarnych. Jednak wyrażenie ich nawet za pomocą samej całki jest ważne, bo wymyślono wiele metod przybliżonego obliczania całek, więc nawet jeśli mamy wynik nieelementarnie wyrażony, to i tak można uzyskiwać istotne oszacowania z dokładnością całkowicie wystarczającą dla zastosowań w matematyce i poza nią. Nie będziemy oczywiście tych tematów rozwijać w ramach wykładu wprowadzającego studentów I roku w matematykę.

Całki niewłaściwe

Spotkaliśmy się przy obliczaniu długości okręgu z problemem całkowania funkcji, która nie była zdefiniowana w końcu przedziału, a nawet w obu końcach. Takie funkcje pojawiają się w wielu sytuacjach. Trzeba więc wyjaśnić nieco dokładniej jak definiujemy całki i co można wnioskować z ich istnienia.

Definicja 7.2.10 (całki niewłaściwej)
Jeśli funkcja $f\colon [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ ma funkcję pierwotną i istnieje granica $\lim\limits_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\,dx$, to granicę tę nazywamy całką niewłaściwą funkcji f na przedziale $[a,b)$. Oznaczamy ją tak samo, jak całkę właściwą: $\int_a^b f(x)\,dx$. Jeśli całka niewłaściwa jest skończona, to mówimy, że jest *zbieżna*.

Analogicznie definiowana jest całka niewłaściwa z funkcji określonej na przedziale otwarto–domkniętym $(a,b]$.

Jeśli funkcja jest określona na przedziale otwartym (a,b) i istnieją całki niewłaściwe na przedziałach $(a,c]$ i $[c,b)$, to ich sumę, jeśli jest zdefiniowana, nazywamy całką niewłaściwą funkcji f na przedziale (a,b). Oznaczamy jak zwykle symbolem $\int_a^b f(x)\,dx$. ■

Przykład 7.2.9 Obliczymy całkę $\int_{-r}^{r}\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx$. Funkcja jest niezdefiniowana w obu końcach przedziału, więc rozpatrzymy oddzielnie dwie całki: $\int_0^r\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx$ oraz $\int_{-r}^{0}\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx$. Zachodzi wzór $\int\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{r}+C$, zatem

$$\lim_{c\to r^-}\int_0^c\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx = \lim_{c\to r^-}\left(\arcsin\tfrac{c}{r}-\arcsin\tfrac{0}{r}\right) = \arcsin\tfrac{r}{r} = \tfrac{\pi}{2}.$$

Podobnie $\lim\limits_{c\to -r^+}\int_c^0\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx = \lim\limits_{c\to -r^+}\left(\arcsin\frac{0}{r}-\arcsin\frac{-r}{r}\right) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$. Obie całki są skończone, czyli zbieżne. Zgodnie z definicją całka $\int_{-r}^{r}\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx$ jest zbieżna do $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$. ■

Przykład 7.2.10 Obliczymy całkę $\int_0^\infty\frac{1}{1+x^2}\,dx$. Zachodzą równości

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{c\to\infty}\int_0^c \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{c\to\infty}\left(\operatorname{arctg} x\right)\Big|_0^c = \lim_{c\to\infty}\left(\operatorname{arctg} c - \operatorname{arctg} 0\right) = \frac{\pi}{2}\,.$$

Całka jest więc skończona, zatem funkcja arctg ma całkę niewłaściwą na półprostej $[0,\infty)$. Bez trudu stwierdzić można, że zachodzi równość $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi$. ■

Przykład 7.2.11 Teraz zajmiemy się całką $\int_1^\infty x^a\,dx$ zakładając, że $a \neq -1$. Mamy

$$\int_1^\infty x^a\,dx = \lim_{c\to\infty}\int_1^c x^a\,dx = \lim_{c\to\infty}\left(\frac{1}{a+1}x^{a+1}\right)\Bigg|_1^c = \lim_{c\to\infty}\frac{c^{a+1}-1}{a+1} = \begin{cases} +\infty & \text{jeśli } a > -1\,, \\ \frac{-1}{a+1} & \text{jeśli } a < -1\,. \end{cases}$$

Okazało się, że im większy wykładnik tym większa całka. Dla ,,dużych" wykładników całka jest nieskończona dla ,,małych" skończona: tym mniejsza im mniejszy wykładnik. Oczywiście słowa ,,mały" i ,,duży" mają znaczenie umowne. ■

Przykład 7.2.12 Obliczymy $\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx$ zakładając, że $\lambda > 0$, w przypadku $\lambda \leq 0$ wartości funkcji podcałkowej nie są mniejsze niż 1, więc całka jest nieskończona, bo musi być większa od pola prostokąta o wysokości 1 i dowolnie długiej podstawie. Mamy

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx = \lim_{c\to\infty}\int_0^c e^{-\lambda x}\,dx = \lim_{c\to\infty}\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right)\Bigg|_0^c \overset{\lambda>0}{=\!=} \frac{1}{\lambda}\,.$$

Wykazaliśmy więc, że dla każdego $\lambda > 0$ funkcja $e^{-\lambda x}$ ma skończoną całkę niewłaściwą na półprostej $[0,\infty)$. ■

Przykład 7.2.13 Wykażemy teraz, że całka $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ jest skończona. Mamy $e^{x^2} \geq 1+x^2$ dla każdej liczby rzeczywistej x, więc $\int_0^c e^{-x^2}\,dx \leq \int_0^c \frac{1}{1+x^2}\,dx < \frac{\pi}{2}$. Całka $\int_0^c e^{-x^2}\,dx$ rośnie wraz z c, oczywiście teraz rozważamy tylko $c > 0$. Wobec tego granica $\lim\limits_{c\to\infty}\int_0^c e^{-x^2}\,dx$ istnieje i jedyną kwestią jest to, czy jest ona skończona. Ponieważ dla każdego $c > 0$ całka jest mniejsza niż $\frac{\pi}{2}$, więc

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \lim_{c\to\infty}\int_0^c e^{-x^2}\,dx \leq \frac{\pi}{2}\,.$$

Spełniliśmy obietnicę: udowodniliśmy, że całka jest skończona, choć jej nie obliczyliśmy, bo to jest nieco trudniejsze. ■

Widać z powyższych przykładów, że powody, dla których trzeba rozpatrywać czasem całki nieoznaczone, bywają różne. Możemy mieć do czynienia z nieograniczoną funkcja lub z nieograniczoną dziedziną funkcji. Nie będziemy tych spraw dokładnie omawiać, bo jak już wielokrotnie mówiliśmy, studenci nie muszą tych kwestii zgłębić, natomiast powinni trochę o nich wiedzieć.

Wypada stwierdzić, że jedna z podstawowych różnic miedzy całką Riemanna i całką niewłaściwą jest to, że w przypadku całki niewłaściwej nie jest prawdziwe twierdzenie o sumach Riemanna. W przypadku całki niewłaściwej można na ogół po wybraniu drobnego podziału dziedziny wybrać w przedziałach, które tworzą ten podział, punkty w taki sposób, że otrzymana suma Riemanna będzie odległa od całki.

Jeśli np. rozważamy całkę $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, to dzieląc przedział $[0,1]$ na krótkie przedzialiki punktami $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = 1$, nie jesteśmy w stanie uniknąć tego, że w przedziale $[x_{n-1}, x_n)$ funkcja $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ przyjmuje wartości dowolnie duże. Możemy więc wybrać w nim punkt t_n w taki sposób, by liczba $\frac{x_n - x_{n-1}}{\sqrt{1-t_n^2}}$ była większa niż np. 15071410, co spowoduje, że niezależnie od tego jak wybierzemy punkty w pozostałych przedzialikach wartość sumy Riemanna będzie wielokrotnie przewyższać długość okręgu o promieniu 1.

Oczywiście stwarza to problemy z interpretacją całki, ale nic na to nie można poradzić. Całki niewłaściwe pojawiają się w naturalny sposób, bo przecież nie można uznać obliczania długości okręgu za zadanie bardzo sztuczne. Po prostu należy z większą ostrożnością je stosować, ale należy to robić. We wspomnianym przypadku można np. twierdzić, że rozpatrując nieco krótszy łuk odpowiadający przedziałowi $[0,c)$ możemy go przybliżać całką, całka $\int_0^c \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ różni się minimalnie od całki $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, więc sumy Riemanna pierwszej z nich, więc właściwej, przybliżają ją więc krótszy łuk, ale ten krótszy przybliża dłuższy, więc suma Riemanna całki $\int_0^c \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ przybliża ćwierć długości okręgu o promieniu 1.

Ten przykład pokazuje, jak można radzić sobie z tego rodzaju problemami. W dalszym ciągu będziemy przyjmować, że opisane wcześniej interpretacje całek właściwych (długości, pola, objętości) zachowują sens również w przypadku całek niewłaściwych. Pokażemy teraz jak korzystając z tych interpretacji można obliczyć całkę $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$. Przypomijmy, że funkcja pierwotna funkcji e^{-x^2} jest nieelementarna, więc nasze postępowania będzie całkowicie odmienne od prezentowanych dotychczas.

Przykład 7.2.14 Wykażemy, że $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$. Zaczniemy od obliczenia objętości zbioru pod wykresem funkcji $z = e^{-x^2-y^2}$, więc funkcji dwu zmiennych x i y. Opiszmy ten zbiór wzorami: $A = \left\{(x,y,z):\quad 0 \le z \le e^{-x^2-y^2}\right\}$. Jego objętość to zgodnie z tym, o czym wcześniej mówiliśmy, całka (tym razem niewłaściwa) z funkcji $P(z)$, gdzie $P(z)$ oznacza pole przekroju zbioru A płaszczyzną poziomą przechodzącą przez punkt $(0,0,z)$. Ten przekrój to koło leżące w płaszczyźnie poziomej. Składa się ono z tych punktów (x,y,z), dla których spełniona jest nierówność: $0 < z \le e^{-x^2-y^2}$ (przypominamy, że liczba $z > 0$ jest na razie ustalona). Jest ona równoważna nierówności $-\ln z \ge x^2 + y^2$. Wobec tego kwadrat promienia tego koła jest równy $-\ln z$, więc pole tego koła równe jest $-\pi \ln z$.

Teraz spojrzymy na to zagadnienie z nieco innej strony. Przetniemy zbiór A płaszczyzną prostopadłą do osi $\overrightarrow{OY}$ przechodzącą przez punkt $(0,y,0)$. Niech $S(y)$ oznacza pole tego przekroju. Jasne jest, że przekrój składa się z tych punktów postaci (x,y,z), dla których spełniona jest nierówność $0 < z \le e^{-x^2-y^2}$, więc ta sama co poprzednio z tym jednak, że tym razem ustalona jest liczba y, natomiast liczby x oraz z się zmieniają się w podanych granicach. To pole to oczywiście pole pod wykresem funkcji $e^{-x^2-y^2}$, więc równe jest ono $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2}\,dx$, znów całka niewłaściwa. Mamy więc $S(y) = e^{-y^2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$; e^{-y^2} jako wielkość niezależna od x może i powinna być traktowana jako stała, więc można ją wyłączyć przed całkę. Liczba $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ nie zależy od y, więc objętość zbioru A jest równa

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S(y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy\,.$$

Oczywiście $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy$ — wartość całki z danej funkcji jest niezależna od nazwy zmiennej. Mamy więc prawo napisać:

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \int_0^1 \pi(-\ln z)\,dz = -\pi\int_0^1 \ln z\,dz\,.$$

Wystarczy teraz obliczyć $\int_0^1 \ln z\,dz$. Mamy $\int \ln z\,dz = z\ln z - z + C$, tę całkę obliczaliśmy już wcześniej. Wobec tego $\int_0^1 \ln z\,dz = 1\cdot\ln(1) - 1 - \big(\lim\limits_{z\to 0^+} z\ln z - z\big) = -1$, bo $\lim\limits_{z\to 0^+} z\ln z = 0$, co można obliczyć korzystając z reguły de l'Hospitala. Wykazaliśmy zatem, że zachodzi równość $\pi = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2$, a więc po wyciągnięciu pierwiastka z obu stron otrzymujemy obiecaną równość $\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$. ■

Czytelnicy, którzy słyszeli coś o szeregach, z pewnością zauważyli podobieństwa między całkami niewłaściwymi i szeregami, nawet terminologia jest w podobna. Podamy teraz ważne twierdzenie, które to podobieństwo podkreśla i które nie mieści się w programie matematyki dla studentów chemii.

Twierdzenie 7.2.11 (Kryterium całkowe Cauchy'ego Maclaurina zbieżności

Jeśli funkcja $f\colon [1,\infty] \longrightarrow [1,\infty)$ jest nierosnąca, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ jest zbieżny, czyli ciąg o wyrazie $f(1)+f(2)+\cdots+f(n)$ ma skończoną granicę, wtedy i tylko wtedy, gdy całka niewłaściwa $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ jest zbieżna.

Dowód. Nie ma oczywiście żadnego problemu z istnieniem całek $\int_1^c f(c)\,dx$, bowiem ich istnienie jest konsekwencją monotoniczności funkcji f (tego twierdzenia nie dowodziliśmy, jednak przytoczyliśmy je). Podobnie szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ ma sumę być może nieskończoną, bo jego wyrazy są nieujemne. Funkcja f jest nierosnąca, więc nierówność $f(n) \geq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \geq f(n+1)$ ma miejsce dla każdej liczby naturalnej n. Stąd wynika, że $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n) \geq \int_1^{\infty} f(x)\,dx \geq \sum\limits_{n=2}^{\infty} f(n)$. Z tej nierówności teza twierdzenia wynika natychmiast. ■

Warto podkreślić, że twierdzenie bywa użyteczne w wielu przypadkach, czasem łatwiej można stwierdzić zbieżność całki a w innych przypadkach — szeregu. Podajemy je tylko po to, by zilustrować możliwości przeformułowywania zagadnień, nie chcemy jednak wdawać się w analizę przykładów. Omówimy jeszcze jedno bardzo proste zastosowanie całek w fizyce.

Środek masy

Przypomnijmy, że środkiem masy układu dwóch punktów materialnych A, B, których masy są równe m_A, m_B nazywamy taki punkt C odcinka AB, że $|AC|\, m_A = |BC|\, m_B$ (prawo dźwigni). Załóżmy, że $A = (x_A, y_A, z_A)$, $B = (x_B, y_B, z_B)$. Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego dwukrotnie wynika, że

$$|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$$

— jest to długość przekątnej prostopadłościanu (być może zdegenerowanego do prostokąta lub odcinka), którego krawędzie są równoległe do osi układu współrzędnych i którego przeciwległymi wierzchołkami są punkty A i B. Powinna być spełniona równość

$$C = A + \tfrac{m_B}{m_A+m_B}(B - A) =$$
$$= \left(x_A + \tfrac{m_B}{m_A+m_B}(x_B - x_A), y_A + \tfrac{m_B}{m_A+m_B}(y_B - y_A), z_A + \tfrac{m_B}{m_A+m_B}(z_B - z_A)\right) =$$
$$= \left(\tfrac{m_Ax_A+m_Bx_B}{m_A+m_B}, \tfrac{m_Ay_A+m_By_B}{m_A+m_B}, \tfrac{m_Az_A+m_Bz_B}{m_A+m_B}\right) = \tfrac{m_A}{m_A+m_B}A + \tfrac{m_B}{m_A+m_B}B\,.$$

Przyjmujemy tu, że dodajemy punkty (lub wektory) sumując ich pierwsze współrzędne, potem drugie i trzecie. To samo dotyczy mnożenia punktu (wektora) przez liczbę.

Przyjmuje się, że środek masy układu 3 punktów jest środkiem masy pary punktów, z których jeden to którykolwiek z rozpatrywanej trójki, a drugi to środek masy pozostałych dwóch. Definicja ta nie zależy, jak się za chwilę przekonamy od tego, jak trójkę ,,dzielimy''. Gdyby stwierdzenie to nie było prawdą, to definicja musiałaby być zmieniona jako niezbyt dobrze nadająca się do opisu rzeczywistości. Podobnie definiujemy środek masy większej liczby punktów materialnych: wybieramy dwa i zastępujemy je ich środkiem masy (jego masą jest suma mas). Stosując tę definicję do punktów $A_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $A_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $\ldots$, $A_n = (x_n, y_n, z_n)$ stwierdzamy, że ich środek masy to

$$C = \frac{m_1}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}A_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}A_2 + \cdots + \frac{m_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}A_n\,, \text{ czyli}$$

$$C = \left(\frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}, \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \cdots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}, \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + \cdots + m_nz_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}\right).$$

Z tego wzoru natychmiast wynika, że kolejność punktów jest nieistotna. Wadą tego określenia jest to, że układy złożone ze skończenie punktów (np. n) materialnych nie są jedynymi, z którymi mamy do czynienia. Występują też inne, np. ciała sztywne itp. Pokażemy teraz na przykładach jak pojęcie środka masy może być uogólnione na inne przypadki.

Zaczniemy od ,,tworu jednowymiarowego''. Będziemy myśleć dla prostoty o cienkim, *jed-*

norodnym drucie, który ma kształt wykresu funkcji $f\colon[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$. Wyobraźmy sobie, że drut składa się z krótkich „kawałków" odpowiadających podziałowi przedziału $[a,b]$ na przedziały $[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2]$, …, $[x_{n-1},x_n]$, przy czym $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$. Ponieważ te kawałki są krótkie, więc wydaje się rozsądnym założenie, że środek masy i–tego kawałka to punkt $(t_i,f(t_i))$.* Założyliśmy, że drut jest jednorodny, co oznacza, że można przyjąć, że masa jest proporcjonalna do długości. Długość kawałka odpowiadającego przedziałowi $[x_{i-1},x_i]$ to $\int_{x_{i-1}}^{x_i}\sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt$. Przyjmując, że masa właściwa jest równa ϱ możemy przyjąć, że masa i–tego kawałka jest równa

$$\varrho\int_{x_{i-1}}^{x_i}\sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt\approx\varrho(x_i-x_{i-1})\sqrt{1+(f'(t_i))^2}\,.$$

Wobec tego pierwsza współrzędna środka masy drutu jest w przybliżeniu równa

$$\frac{t_1\cdot\varrho\cdot(x_1-x_0)\cdot\sqrt{1+(f'(t_1))^2}+t_2\cdot\varrho\cdot(x_2-x_1)\cdot\sqrt{1+(f'(t_2))^2}+\cdots+t_n\cdot\varrho\cdot(x_n-x_{n-1})\cdot\sqrt{1+(f'(t_n))^2}}{\varrho\cdot(x_1-x_0)\cdot\sqrt{1+(f'(t_1))^2}+\varrho\cdot(x_2-x_1)\cdot\sqrt{1+(f'(t_2))^2}+\cdots+\varrho\cdot(x_n-x_{n-1})\cdot\sqrt{1+(f'(t_n))^2}}\,.$$

Na mocy twierdzenia o sumach Riemanna wielkość ta jest w przybliżeniu równa

$$\frac{\int_a^b t\sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt}{\int_a^b\sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt}\,.$$

Dla drugiej współrzędnej środka masy drutu otrzymujemy kolejno wyrażenia

$$\frac{f(t_1)\cdot\varrho\cdot(x_1-x_0)\cdot\sqrt{1+(f'(t_1))^2}+f(t_2)\cdot\varrho\cdot(x_2-x_1)\cdot\sqrt{1+(f'(t_2))^2}+\cdots+f(t_n)\cdot\varrho\cdot(x_n-x_{n-1})\cdot\sqrt{1+(f'(t_n))^2}}{\varrho\cdot(x_1-x_0)\cdot\sqrt{1+(f'(t_1))^2}+\varrho\cdot(x_2-x_1)\cdot\sqrt{1+(f'(t_2))^2}+\cdots+\varrho\cdot(x_n-x_{n-1})\cdot\sqrt{1+(f'(t_n))^2}}$$

$$\text{oraz}\qquad\frac{\int_a^b f(t)\sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt}{\int_a^b\sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt}\,.$$

Przykład 7.2.15 Sprawdzimy jak uzyskane wzory działają w przypadku odcinka. Przyjmijmy, że $f(x)=kx+l$, gdzie k,l są ustalonymi liczbami rzeczywistymi. Rozważamy funkcję f na przedziale domkniętym $[a,b]$. Dla prostoty przyjmujemy, że $\varrho=1$. Oczywiście $f'(x)=k$ dla każdego $x\in[a,b]$. Niech $C=(c_1,c_2)$ oznacza środek masy odcinka, którego końcami są punkty $\big(a,f(a)\big)=\big(a,ka+l\big)$, $\big(b,f(b)\big)=\big(b,kb+l\big)$. Stosując wyprowadzone wzory otrzymujemy

$$c_1=\frac{\int_a^b t\sqrt{1+k^2}\,dt}{\int_a^b\sqrt{1+k^2}\,dt}=\frac{\frac{b^2-a^2}{2}\sqrt{1+k^2}}{(b-a)\sqrt{1+k^2}}=\frac{b+a}{2}\ \text{ oraz}$$

$$c_2=\frac{\int_a^b(kt+l)\sqrt{1+k^2}\,dt}{\int_a^b\sqrt{1+k^2}\,dt}=\frac{\Big(k\frac{b^2-a^2}{2}+l(b-a)\Big)\sqrt{1+k^2}}{(b-a)\sqrt{1+k^2}}=k\frac{b+a}{2}+l\,.$$

Jak widać otrzymaliśmy środek odcinka, czego należało oczekiwać. ■

Przykład 7.2.16 Teraz zajmiemy się łukiem okręgu $x^2+y^2=1$, którego końcami są punkty $(\cos\alpha,\sin\alpha)$ i $(\cos\beta,\sin\beta)$, $0\le\beta<\alpha\le\pi$. Znów zakładamy, że $\varrho=1$. Łuk wybraliśmy tak,

* Trochę naciągamy. Jak się za chwilę przekonamy, środek ciała masy wcale nie musi być punktem tego tego ciała, najprostszy przykład, to skończony układ punktów, a inny to łuk okręgu. Już niedługo!

by mieścił się w całości w górnym półokręgu, bo mówimy jedynie o wykresach funkcji. W tym wypadku o wykresie funkcji $\sqrt{1-x^2}$, której pochodną jest

$$\left(\sqrt{1-x^2}\right)' = \tfrac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2}\cdot(-2x) = \tfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Niech $C=(c_1,c_2)$ oznacza środek masy tego łuku. Mamy więc jak poprzednio

$$c_1 = \frac{\int_{\cos\alpha}^{\cos\beta} t\sqrt{1+\left(\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\right)^2}\,dt}{\int_{\cos\alpha}^{\cos\beta}\sqrt{1+\left(\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\right)^2}\,dt} = \frac{\int_{\cos\alpha}^{\cos\beta}\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt}{\int_{\cos\alpha}^{\cos\beta}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt} = \frac{-\sqrt{1-t^2}\Big|_{\cos\alpha}^{\cos\beta}}{-\arccos(t)\Big|_{\cos\alpha}^{\cos\beta}} = \frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\alpha-\beta}$$

— przypomnieć warto, że arccos to funkcja odwrotna do funkcji cos rozpatrywanej na przedziale $[0,\pi]$. Wzór na jej pochodną można wywnioskować z równości $x=\arccos(\cos x)$; na przedziale $[0,\pi]$ funkcja sinus przyjmuje jedynie nieujemne wartości, więc $\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sin\alpha$ oraz $\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sin\beta$. Analogicznie

$$c_2 = \frac{\int_{\cos\alpha}^{\cos\beta}\sqrt{1-t^2}\sqrt{1+\left(\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\right)^2}\,dt}{\int_{\cos\alpha}^{\cos\beta}\sqrt{1+\left(\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\right)^2}\,dt} = \frac{\int_{\cos\alpha}^{\cos\beta}\frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt}{\int_{\cos\alpha}^{\cos\beta}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt} = \frac{t\Big|_{\cos\alpha}^{\cos\beta}}{-\arccos(t)\Big|_{\cos\alpha}^{\cos\beta}} = \frac{\cos\beta-\cos\alpha}{\alpha-\beta}\,.$$

Wobec tego środkiem masy jednorodnego łuku o końcach $(\cos\alpha,\sin\alpha)$ i $(\cos\beta,\sin\beta)$ jest

$$\left(\tfrac{\sin\alpha-\sin\beta}{\alpha-\beta},\tfrac{\cos\beta-\cos\alpha}{\alpha-\beta}\right).$$

Jest on odległy od środka okręgu o

$$\sqrt{\left(\tfrac{\sin\alpha-\sin\beta}{\alpha-\beta}\right)^2+\left(\tfrac{\cos\beta-\cos\alpha}{\alpha-\beta}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta+\cos^2\beta-2\cos\beta\cos\alpha+\cos^2\alpha}{(\alpha-\beta)^2}} =$$

$$\xlongequal{\cos(\beta-\alpha)=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha}\sqrt{\tfrac{2-2\cos(\beta-\alpha)}{(\alpha-\beta)^2}}\xlongequal{\cos(2\gamma)=1-2\sin^2\gamma}$$

$$=\sqrt{\tfrac{4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}}{(\alpha-\beta)^2}} = \tfrac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\frac{\alpha-\beta}{2}} < 1\,.$$

Widzimy więc, że środek masy tego łuku znajduje się poza tym łukiem. Można sobie wyobrazić, że do łuku dołączono cięciwę, na której jest on oparty i obszar ograniczony przez łuk i cięciwę wypełniono substancją doskonale sztywną o masie 0, masa cięciwy jest również równa 0. Wtedy środek masy tego nowego (abstrakcyjnego) tworu pokrywa się ze środkiem masy łuku i można myśleć, że jest to punkt, w którym to ciało należy podeprzeć, by miało szanse znaleźć się w równowadze w polu grawitacyjnym Ziemi. Nie wydaje się, by ten wynik był całkiem oczywisty, choć oczywiście nie używając całek też można go uzyskać (niekoniecznie w pół minuty). ■

Uwaga 7.2.12 Jeśli $a<b<c$ i $f\colon[a,c]\to\mathbb{R}$ jest funkcją o ciągłej pochodnej, $C_a=(x_a,y_a)$ jest środkiem masy wykresu funkcji $f\colon[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$, $C_c=(x_c,y_c)$ — środkiem masy wykresu funkcji $f\colon[b,c]\longrightarrow\mathbb{R}$ przy założeniu, że $\varrho=1$, to środkiem masy wykresu funkcji $f\colon[a,c]\longrightarrow\mathbb{R}$ jest punkt

$$C=\tfrac{m_a}{m_a+m_c}C_a+\tfrac{m_c}{m_a+m_c}C_c\,,$$

gdzie $m_a=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(t)\right)^2}\,dt$, $m_c=\int_b^c\sqrt{1+\left(f'(t)\right)^2}\,dt$ są masami odpowiednio wykresów

funkcji $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ i $f\colon [b,c]\to\mathbb{R}$.
Wynika to natychmiast z wzoru $\int_a^c g(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt + \int_b^c g(t)\,dt$: jeśli $C=(u,v)$, to

$$u = \frac{\int_a^c t\sqrt{1+\big(f'(t)\big)^2}\,dt}{\int_a^c \sqrt{1+\big(f'(t)\big)^2}\,dt} =$$

$$= \frac{\int_a^b \sqrt{1+\big(f'(t)\big)^2}\,dt}{\int_a^c \sqrt{1+\big(f'(t)\big)^2}\,dt}\cdot\frac{\int_a^b t\sqrt{1+\big(f'(t)\big)^2}\,dt}{\int_a^b \sqrt{1+\big(f'(t)\big)^2}\,dt} + \frac{\int_b^c \sqrt{1+\big(f'(t)\big)^2}\,dt}{\int_a^c \sqrt{1+\big(f'(t)\big)^2}\,dt}\cdot\frac{\int_b^c t\sqrt{1+\big(f'(t)\big)^2}\,dt}{\int_b^c \sqrt{1+\big(f'(t)\big)^2}\,dt} =$$

$= \frac{m_a}{m_a+m_c}\,x_a + \frac{m_c}{m_a+m_c}\,x_c$ oraz

$$v = \frac{\int_a^c f(t)\sqrt{1+\big(f'(t)\big)^2}\,dt}{\int_a^c \sqrt{1+\big(f'(t)\big)^2}\,dt} =$$

$$= \frac{\int_a^b \sqrt{1+\big(f'(t)\big)^2}\,dt}{\int_a^c \sqrt{1+\big(f'(t)\big)^2}\,dt}\cdot\frac{\int_a^b f(t)\sqrt{1+\big(f'(t)\big)^2}\,dt}{\int_a^b \sqrt{1+\big(f'(t)\big)^2}\,dt} + \frac{\int_b^c \sqrt{1+\big(f'(t)\big)^2}\,dt}{\int_a^c \sqrt{1+\big(f'(t)\big)^2}\,dt}\cdot\frac{\int_b^c f(t)\sqrt{1+\big(f'(t)\big)^2}\,dt}{\int_b^c \sqrt{1+\big(f'(t)\big)^2}\,dt} =$$

$= \frac{m_a}{m_a+m_c}\,y_a + \frac{m_c}{m_a+m_c}\,y_c$.

Oznacza to, że definicja środka masy, którą podaliśmy jest niesprzeczna z czynionym w trakcie wyprowadzania wzoru na jego współrzędne założeniem, że można fragmenty ciała zastępować ich środkami masy i traktować później jako punkty materialne. ■

Przykład 7.2.17 (*Trójkąt*)
Znajdziemy środek obwodu trójkąta, znów zakładamy, że $\varrho=1$, którego wierzchołkami są punkty $A,B,C\in\mathbb{R}^2$. Załóżmy, że boki leżące naprzeciwko wierzchołków A, B i C mają odpowiednio długości a, b i c, czyli że masy tych boków równe są a,b,c. Wtedy środkami mas boków a, b i c są punkty $\frac{B+C}{2}$, $\frac{C+A}{2}$ i $\frac{A+B}{2}$, w których umieszczono masy a, b i c. Zgodnie z omówionymi wcześniej wzorami środkiem masy tego układu trzech punktów materialnych jest punkt

$$M = \frac{a}{a+b+c}\cdot\frac{B+C}{2} + \frac{b}{a+b+c}\cdot\frac{A+C}{2} + \frac{c}{a+b+c}\cdot\frac{A+B}{2} = \frac{b+c}{2(a+b+c)}A + \frac{c+a}{2(a+b+c)}B + \frac{a+b}{2(a+b+c)}C$$

Można też spojrzeć na tę równość inaczej: umieszczono w wierzchołku A masę $b+c$, w wierzchołku B — masę $c+a$, w wierzchołku C — masę $a+b$, wtedy środkiem masy układu tych trzech punktów materialnych jest punkt

$$\frac{b+c}{2(a+b+c)}A + \frac{c+a}{2(a+b+c)}B + \frac{a+b}{2(a+b+c)}C,$$

czyli środek masy obwodu trójkąta. Można zapytać: w jakich trójkątach środek masy obwodu trójkąta pokrywa się z punktem $\frac{A+B+C}{3}$, czyli środkiem masy układu trzech punktów materialnych A,B,C z równymi masami? Odpowiedź na to pytanie jest prosta, jeśli punkty A,B,C nie leżą na jednej prostej (czyli są wierzchołkami trójkąta). Jest tak w trójkącie równobocznym (oczywiste) i tylko w nim, co zaraz wykażemy. Rzecz w tym, że jeśli te dwa punkty pokrywają się, to

$$\tfrac{b+c}{2(a+b+c)}A+\tfrac{c+a}{2(a+b+c)}B+\tfrac{a+b}{2(a+b+c)}C=A+\tfrac{c+a}{2(a+b+c)}(B-A)+\tfrac{a+b}{2(a+b+c)}(C-A)\ \text{oraz}$$

$$\tfrac{A+B+C}{3}=A+\tfrac{1}{3}(B-A)+\tfrac{1}{3}(C-A)\,.$$

Wobec tego z równości

$$\tfrac{b+c}{2(a+b+c)}A+\tfrac{c+a}{2(a+b+c)}B+\tfrac{a+b}{2(a+b+c)}C=\tfrac{A+B+C}{3}$$

wynika, że $\big(\tfrac{c+a}{2(a+b+c)}-\tfrac{1}{3}\big)(B-A)=\big(-\tfrac{b+a}{2(a+b+c)}+\tfrac{1}{3}\big)(C-A)$, a ponieważ wektory $\overrightarrow{B-A}$ i $\overrightarrow{C-A}$ nie są równoległe,* więc muszą zachodzić równości: $\tfrac{c+a}{2(a+b+c)}-\tfrac{1}{3}=0=-\tfrac{b+a}{2(a+b+c)}+\tfrac{1}{3}$. Są one równoważne równościom $a+c=2b$ i $a+b=2c$. Z nich wynika, że $2b-c=a=2c-b$, więc $3b=3c$, czyli $b=c$. Wtedy również $a=b$, co oznacza, że trójkąt jest równoboczny. Warto jeszcze zauważyć, że jeśli w wierzchołkach trójkąta umieścimy równe masy, to środkiem masy układu takich trzech punktów materialnych będzie punkt przecięcia środkowych trójkąta, czyli punkt zwany środkiem ciężkości trójkąta. Jest tak, bo środek masy układu dwóch punktów materialnych A,B o równych masach m, środek odcinka łączącego te punkty, w którym umieszczamy masę $2m$. Teraz szukamy środka masy punktu C z masą m i punktu $\frac{A+B}{2}$ z masą $2m$. Jest to punkt $\frac{m}{m+2m}C+\frac{2m}{m+2m}\frac{A+B}{2}=\frac{A+B+C}{3}$, zgodnie z obietnicą.
Zadanko: wykazać, że w przypadku punktów A,B,C leżących na jednej prostej wypowiedziane wyżej twierdzenie nie jest prawdziwe, czyli podać przykład trzech punktów materialnych A,B,C leżących na jednej prostej, których środkiem masy jest punkt $\frac{A+B+C}{3}$, chociaż masy w nich umieszczone nie są równe. ■

Warto dodać, że w różnych przypadkach nie można zakładać, że gęstość masy jest stała, np. część drutu może być zrobiona z jednego metalu, inna część z drugiego. W przypadku badania ruchu np. statku kosmicznego, też nie bardzo można zakładać, że gęstość masy jest stała: inną mają np. ściany (pancerz!), inną kosmonauci, jeszcze inną powietrze, którym oddychają ludzie. Ten komentarz wyjaśnia, że w zasadzie nawet trudno zakładać, że gęstość masy jest ciągła, na ogół nie jest, ale takimi kwestiami zajmować się nie będziemy. Załóżmy na razie, że mamy do czynienia z ciałem, którego kształt jest dobrze opisany jako wykres funkcji $f\colon[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$, która ma ciągłą pochodną w przedziale $[a,b]$. Myślimy o wartości funkcji ϱ jak o granicy ilorazu $\frac{m(x_1,x_2)}{\ell(x_1,x_2)}$, liczba $\ell(x_1,x_2)$ oznacza długość fragmentu wykresu funkcji f, którego końcami są punkty $(x_1,f(x_1))$ i $(x_2,f(x_2))$, a liczba $m(x_1,x_2)$ — jego masę, $x_1\le x\le x_2$, przechodzimy do granicy przy $x_2-x_1\longrightarrow 0$. Zakładamy, że ta granica istnieje i że jest funkcją ciągłą na x $[a,b]$.

Niech $a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$ będą takimi punktami przedziału $[a,b]$, że różnice x_i-x_{i-1} są „małe” dla $i=1,2,\ldots,n$. Niech $x_{i-1}\le t_i\le x_i$. W takiej sytuacji masa

*bo punkty A,B,C nie leżą na jednej prostej.

wykresu funkcji $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest równa w przybliżeniu

$$\varrho(t_1)\sqrt{(x_1-x_0)^2+\big(f(x_1)-f(x_0)\big)^2}+\varrho(t_2)\sqrt{(x_2-x_1)^2+\big(f(x_2)-f(x_1)\big)^2}+\dots+$$
$$+\varrho(t_n)\sqrt{(x_n-x_{n-1})^2+\big(f(x_n)-f(x_{n-1})\big)^2}=$$
$$=\varrho(t_1)(x_1-x_0)\sqrt{1+\big(f'(\tau_1)\big)^2}+\varrho(t_2)(x_2-x_1)\sqrt{1+\big(f'(\tau_2)\big)^2}+\dots+$$
$$+\varrho(t_n)(x_n-x_{n-1})\sqrt{1+\big(f'(\tau_n)\big)^2},$$

istnienie liczb $\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_n$ wynika z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej; oczywiście $x_{i-1}<\tau_i<x_i$ dla $i=1,2,\dots,n$. Liczby $t_1,t_2,\dots,t_n$ zostały wybrane dowolnie z przedziałów $[x_0,x_1]$, $[x_2,x_1]$, $\dots,[x_{n-1},x_n]$. Wobec tego nic nie stoi na przeszkodzie, by przyjąć, że $t_i=\tau_i$ dla wszystkich i. Wtedy masa wykresu funkcji $f\colon [a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ równa jest w przybliżeniu

$$\varrho(\tau_1)(x_1-x_0)\sqrt{1+\big(f'(\tau_1)\big)^2}+\varrho(\tau_2)(x_2-x_1)\sqrt{1+\big(f'(\tau_2)\big)^2}+\dots+$$
$$+\varrho(\tau_n)(x_n-x_{n-1})\sqrt{1+\big(f'(\tau_n)\big)^2}.$$

Prowadzi to, na mocy twierdzenia o sumach Riemanna, do stwierdzenia, że masa krzywej równa jest

$$\int_a^b\varrho(t)\sqrt{1+\big(f'(t)\big)^2}\,dt.$$

Możemy teraz zastanowić się nad współrzędnymi środka masy tej krzywej. Oznaczmy go przez $C=(c_1,c_2)$. Rozumując tak, jak w przypadku stałej gęstości otrzymujemy przybliżone równości:

$$c_1\approx\frac{\tau_1\varrho(\tau_1)(x_1-x_0)\sqrt{1+(f'(\tau_1))^2}+\dots+\tau_n\varrho(\tau_n)\varrho(x_n-x_{n-1})\sqrt{1+(f'(\tau_n))^2}}{\varrho(\tau_1)(x_1-x_0)\sqrt{1+(f'(t_1))^2}+\dots+\varrho(\tau_n)(x_n-x_{n-1})\sqrt{1+(f'(t_n))^2}}\quad\text{oraz}$$
$$c_2\approx\frac{f(\tau_1)\varrho(\tau_1)(x_1-x_0)\sqrt{1+(f'(\tau_1))^2}+\dots+f(\tau_n)\varrho(\tau_n)\varrho(x_n-x_{n-1})\sqrt{1+(f'(\tau_n))^2}}{\varrho(\tau_1)(x_1-x_0)\sqrt{1+(f'(t_1))^2}+\dots+\varrho(\tau_n)(x_n-x_{n-1})\sqrt{1+(f'(t_n))^2}}.$$

Stąd i z twierdzenia o sumach Riemanna wnioskujemy, że

$$c_1=\frac{\int_a^b t\varrho(t)\sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt}{\int_a^b\varrho(t)\sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt}\qquad\text{i}\qquad c_2=\frac{\int_a^b f(t)\varrho(t)\sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt}{\int_a^b\varrho(t)\sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt}.$$

Z punktu widzenia matematyka te równości to definicja środka masy, dla fizyka to zapewne twierdzenie, którego dowód podany został wyżej.

Zajmiemy się teraz środkiem masy obszaru płaskiego. Dla uproszczenia zajmować się będziemy obszarem postaci $G=\{(x,y)\colon\ \ a\le x\le b,\,0\le y\le f(x)\}$, gdzie $f\colon[a,b]\longrightarrow[0,\infty)$ oznacza funkcję ciągłą. Zakładamy od razu, że masa nie ma stałej gęstości i oznaczamy gęstość masy przez $\varrho(x,y)$ — definicja gęstości analogiczna do poprzednio podanej z tym, że teraz rozpatrujemy zbiory dwuwymiarowe, więc możemy np. dzielić masę małego koła przez jego pole i obliczać granicę zakładając, że promień dąży do 0. Tak jak poprzednio zakładamy, że ϱ jest funkcją ciągłą w zbiorze G.

Znów podzielimy przedział $[a,b]$ na krótkie przedziały:

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b\,.$$

Zaczniemy od jednego pionowego ,,paska":

$$S_i=\{(x,y):\quad x_{i-1}\le x\le x_i,\ 0\le y\le f(x)\}\,.$$

Można przyjąć, że ze względu na ciągłość gęstości masy ϱ i znikomą szerokość S_i gęstość zależy tylko od zmiennej y. Rozumując tak jak w przypadku krzywej dochodzimy do wniosku, że środek masy zbioru S_i to $\left(t_i,\frac{\int_0^{f(t_i)}s\varrho(t_i,s)ds}{\int_0^{f(t_i)}\varrho(t_i,s)ds}\right)$, gdzie t_i oznacza odpowiednio dobrany punkt przedziału $[x_{i-1},x_i]$. Można więc przyjąć (i to właściwie robimy), że środkiem masy pionowego odcinka o końcach $(x,0)$, $(x,f(x))$ jest punkt $\left(x,\frac{\int_0^{f(x)}s\varrho(x,s)ds}{\int_0^{f(x)}\varrho(x,s)ds}\right)$ i że masa w nim skupiona to $\int_0^{f(x)}\varrho(x,s)ds$. Niech $C=(c_1,c_2)$ oznacza poszukiwany środek masy obszaru G. Rozumując tak jak poprzednio stwierdzamy, że

$$c_1=\frac{\int_a^b\left(x\int_0^{f(x)}\varrho(x,s)ds\right)dx}{\int_a^b\left(\int_0^{f(x)}\varrho(x,s)ds\right)dx}\,,$$

$$c_2=\frac{\displaystyle\int_a^b\left(\frac{\int_0^{f(x)}s\varrho(x,s)ds}{\int_0^{f(x)}\varrho(x,s)ds}\cdot\int_0^{f(x)}\varrho(x,s)ds\right)dx}{\int_a^b\left(\int_0^{f(x)}\varrho(x,s)ds\right)dx}=\frac{\int_a^b\left(\int_0^{f(x)}s\varrho(x,s)ds\right)dx}{\int_a^b\left(\int_0^{f(x)}\varrho(x,s)ds\right)dx}\,.$$

Widzimy, że w obu wzorach mianownik jest taki sam: to masa zbioru G. W liczniku całkujemy raz pierwszą współrzędną wymnożoną przez gęstość masy, raz drugą. Dodać należy, że można rozpatrzeć zbiór ograniczony z góry wykresem funkcji ciągłej $g\colon[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ i z dołu wykresem funkcji ciągłej $f\colon[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ założywszy, że $f(x)\le g(x)$ dla $a\le x\le b$. Jest mniej więcej jasne, że uzyskane wzory będą wyglądać tak:

$$c_1=\frac{\int_a^b\left(x\int_{f(x)}^{g(x)}\varrho(x,s)ds\right)dx}{\int_a^b\left(\int_{f(x)}^{g(x)}\varrho(x,s)ds\right)dx},\qquad c_2=\frac{\int_a^b\left(\int_{f(x)}^{g(x)}s\varrho(x,s)ds\right)dx}{\int_a^b\left(\int_{f(x)}^{g(x)}\varrho(x,s)ds\right)dx}\,. \tag{śr.m.}$$

Podkreślić wypada, że rozważania poprzedzające te wzory to nie dowód (przynajmniej nie z punktu widzenia matematyka) — są to argumenty za przyjęciem, że wzory (śr.m.) **definiują** środek masy zbioru $G=\{x,y\colon\quad a\le x\le b,\ f(x)\le y\le g(x)\}$ przy założeniu, że funkcja ciągła $\varrho\colon G\longrightarrow[0,\infty)$ jest gęstością masy. Zapewne fizyk teoretyk byłby skłonny zgodzić się z matematykiem, ale fizyk eksperymentator uznałby te rozważania za dowód. Nie będziemy teraz rozważać żadnych przykładów ze zmienną gęstością masy, więc na zakończenie tych rozważań napiszmy jeszcze, że w przypadku stałej gęstości, dla prostoty przyjmujemy $\varrho\equiv1$, otrzymujemy

$$c_1=\frac{\int_a^b x\left(g(x)-f(x)\right)dx}{\int_a^b\left(g(x)-f(x)\right)dx}\,,\qquad c_2=\frac{\int_a^b\left(\int_{f(x)}^{g(x)}sds\right)dx}{\int_a^b\left(g(x)-f(x)\right)dx}=\frac{\int_a^b\frac12\left((g(x))^2-(f(x))^2\right)dx}{\int_a^b\left(g(x)-f(x)\right)dx} \tag{śr.m.'}$$

Przykład 7.2.18 Znajdziemy teraz środek masy trójkąta zakładając, że gęstość masy równa jest 1 we wszystkich jego punktach (tzn. trójkąt jest jednorodny). Załóżmy, że wierzchołkami trójkąta są punkty $A=(0,0)$, $B=(b_1,b_2)$ i $C=(c_1,c_2)$ przy czym $0\le c_1\le b_1$, $b_1>0$. Oczywiście zakładamy, że $A\neq B\neq C\neq A$. Zakładamy też, że $-b_2c_1+b_1c_2>0$, ten warunek mówi, że punkt C leży „nad" prostą $-b_2x+b_1y=0$, która przechodzi przez punkty A i B.♡ Niech $f(x)=\frac{b_2}{b_1}x$. Wykresem funkcji f jest prosta AB. Ograniczmy jej dziedzinę do przedziału $[0,b_1]$. Wtedy jej wykresem jest odcinek AB. Na tym samym przedziale określimy funkcję g: $g(x)=\frac{c_2}{c_1}x$ dla $0\le x\le c_1$ i $g(x)=\frac{b_2-c_2}{b_1-c_1}(x-c_1)+c_2=\frac{b_2-c_2}{b_1-c_1}(x-b_1)+b_2$ dla $c_1\le x\le b_1$, oczywiście jeśli $c_1=0$ — obowiązuje jedynie drugi wzór, a jeśli $c_1=b_1$ — tylko pierwszy. Funkcje f,g zdefiniowaliśmy, by móc stwierdzić, że zbiór

$$G=\{(x,y):\quad 0\le x\le b_1,\ f(x)\le y\le g(x)\}$$

jest trójkątem o wierzchołkach A,B,C i zastosować wzory na współrzędne środka masy tak określonego zbioru. Niech $M=(m_1,m_2)$ będzie środkiem masy G. Znajdziemy najpierw pole $|G|$ trójkąta G. Mamy

$$|G|=\int_0^{b_1}\big(g(x)-f(x)\big)dx=\int_0^{c_1}\big(g(x)-f(x)\big)dx+\int_{c_1}^{b_1}\big(g(x)-f(x)\big)dx=$$
$$=\int_0^{c_1}\big(\tfrac{c_2}{c_1}-\tfrac{b_2}{b_1}\big)x\,dx+\int_{c_1}^{b_1}\big(\tfrac{b_2-c_2}{b_1-c_1}(x-b_1)+b_2-\tfrac{b_2}{b_1}x\big)dx=$$
$$=\int_0^{c_1}\tfrac{b_1c_2-b_2c_1}{b_1c_1}x\,dx+\int_{c_1}^{b_1}\big(\tfrac{b_2-c_2}{b_1-c_1}(x-b_1)-\tfrac{b_2}{b_1}(x-b_1)\big)dx=$$
$$=\int_0^{c_1}\tfrac{b_1c_2-b_2c_1}{b_1c_1}x\,dx+\int_{c_1}^{b_1}\big(\tfrac{b_2-c_2}{b_1-c_1}-\tfrac{b_2}{b_1}\big)(x-b_1)dx=$$
$$=\left(\tfrac{b_1c_2-b_2c_1}{b_1c_1}\tfrac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{c_1}+\left(\tfrac{b_2c_1-b_1c_2}{b_1(b_1-c_1)}\tfrac{(x-b_1)^2}{2}\right)\Big|_{c_1}^{b_1}=$$
$$=\tfrac{b_1c_2-b_2c_1}{b_1c_1}\tfrac{c_1^2}{2}-\tfrac{b_2c_1-b_1c_2}{b_1(b_1-c_1)}\tfrac{(c_1-b_1)^2}{2}=\tfrac{b_1c_2-b_2c_1}{2b_1}(c_1+b_1-c_1)=\tfrac12\big(b_1c_2-b_2c_1\big)$$

— otrzymaliśmy wzór na pole trójkąta, oczywiście mogliśmy obejść się bez całek, ale z całkami jest wygodniej ze względu na stosowany tu opis trójkąta. Teraz trzeba znaleźć jeszcze dwie całki. Mamy

$$m_1|G|=\int_0^{b_1}x\big(g(x)-f(x)\big)\,dx=\int_0^{c_1}x\big(g(x)-f(x)\big)dx+\int_{c_1}^{b_1}x\big(g(x)-f(x)\big)dx=$$
$$=\int_0^{c_1}\big(\tfrac{c_2}{c_1}-\tfrac{b_2}{b_1}\big)x^2\,dx+\int_{c_1}^{b_1}x\big(\tfrac{b_2-c_2}{b_1-c_1}(x-b_1)+b_2-\tfrac{b_2}{b_1}x\big)dx=$$
$$=\int_0^{c_1}\tfrac{c_2b_1-c_1b_2}{c_1b_1}x^2\,dx+\int_{c_1}^{b_1}x\big(\tfrac{b_2-c_2}{b_1-c_1}(x-b_1)-\tfrac{b_2}{b_1}(x-b_1)\big)dx=$$
$$=\int_0^{c_1}\tfrac{c_2b_1-c_1b_2}{c_1b_1}x^2\,dx+\int_{c_1}^{b_1}\big(\tfrac{b_2-c_2}{b_1-c_1}-\tfrac{b_2}{b_1}\big)(x^2-b_1x)dx=$$
$$=\left(\tfrac{c_2b_1-c_1b_2}{c_1b_1}\tfrac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{c_1}+\left(\tfrac{b_2c_1-b_1c_2}{b_1(b_1-c_1)}\big(\tfrac{x^3}{3}-b_1\tfrac{x^2}{2}\big)\right)\Big|_{c_1}^{b_1}=$$

♡ Każdy trójkąt można przesunąć bez obracania, tak, by jego skrajny lewy punkt znalazł się na osi OY, jeśli tych skrajnych lewych punktów jest wiele, to na osi rzędnych znajduje się cały bok, trójkąt przesuwamy tak, by najniższy ze skrajnych lewych punktów znalazł się w początku układu współrzędnych. Jedyne ograniczające założenie to $c_1\le b_1$, ale rozważenie drugiego przypadku nie nastręcza żadnych trudności. Zresztą, gdybyśmy dopuścili obroty nie ograniczając się do przesuwania w ogóle żadnych kłopotów tego rodzaju by nie było.

$= \frac{c_2b_1-c_1b_2}{c_1b_1}\frac{c_1^3}{3} + \frac{b_2c_1-b_1c_2}{b_1(b_1-c_1)}\Big(\frac{b_1^3-c_1^3}{3} - b_1\frac{b_1^2-c_1^2}{2}\Big) =$
$= \frac{(b_1c_2-b_2c_1)c_1^2}{3b_1} + \frac{b_2c_1-b_1c_2}{b_1}\Big(\frac{b_1^2+b_1c_1+c_1^2}{3} - b_1\frac{b_1+c_1}{2}\Big) =$
$= \frac{c_1^2(b_1c_2-b_2c_1)}{3b_1} + \frac{b_2c_1-b_1c_2}{b_1}\cdot\frac{-b_1^2-b_1c_1+2c_1^2}{6} = \frac{(b_1c_2-b_2c_1)}{6b_1}\big(2c_1^2+b_1^2+b_1c_1-2c_1^2\big) =$
$= \frac{(b_1c_2-b_2c_1)(b_1+c_1)}{6}$,
zatem $m_1 = \frac{b_1+c_1}{3} = \frac{0+b_1+c_1}{3}$. Otrzymaliśmy wzór zgodny z obietnicą: pierwsza środka masy trójkąta jednorodnego to średnia arytmetyczna pierwszych współrzędnych jego wierzchołków. Znajdziemy drugą współrzędną. Środek masy odcinka jednorodnego $[f(x), g(x)]$ to oczywiście $\frac{f(x)+g(x)}{2}$, jego (umowna) masa to $g(x)-f(x)$, zatem $m_2|G| = \frac{1}{2}\int_0^{b_1}\big(g(x)^2-f(x)^2\big)\,dx =$
$= \frac{1}{2}\int_0^{c_1} x^2\Big(\big(\frac{c_2}{c_1}\big)^2 - \big(\frac{b_2}{b_1}\big)^2\Big)\,dx + \frac{1}{2}\int_{c_1}^{b_1}\Big(\big(\frac{b_2-c_2}{b_1-c_1}(x-b_1)+b_2\big)^2 - \big(\frac{b_2}{b_1}x\big)^2\Big)\,dx =$
$= \frac{1}{2}\int_0^{c_1}\frac{b_1^2c_2^2-b_2^2c_1^2}{b_1^2c_1^2}x^2\,dx + \frac{1}{2}\int_{c_1}^{b_1}\big[\frac{b_2-c_2}{b_1-c_1}(x-b_1)+b_2-\frac{b_2}{b_1}x\big]\big[\frac{b_2-c_2}{b_1-c_1}(x-b_1)+b_2+\frac{b_2}{b_1}x\big]\,dx =$
$= \frac{b_1^2c_2^2-b_2^2c_1^2}{6b_1^2c_1^2}c_1^3 + \frac{1}{2}\int_{c_1}^{b_1}\big[\frac{b_2c_1-b_1c_2}{b_1(b_1-c_1)}(x-b_1)\big]\big[\frac{2b_1b_2-b_1c_2-b_2c_1}{b_1(b_1-c_1)}(x-b_1)+2b_2\big]\,dx =$
$= \frac{b_1^2c_2^2-b_2^2c_1^2}{6b_1^2}c_1 + \frac{1}{2}\int_{c_1}^{b_1}\big[\frac{b_2c_1-b_1c_2}{b_1(b_1-c_1)}\frac{2b_1b_2-b_1c_2-b_2c_1}{b_1(b_1-c_1)}(x-b_1)^2 + 2b_2\frac{b_2c_1-b_1c_2}{b_1(b_1-c_1)}(x-b_1)\big]\,dx =$
$= \frac{b_1^2c_2^2-b_2^2c_1^2}{6b_1^2}c_1 + \Big[\frac{(b_2c_1-b_1c_2)(2b_1b_2-b_1c_2-b_2c_1)}{6b_1^2(b_1-c_1)^2}(x-b_1)^3 + b_2\frac{b_2c_1-b_1c_2}{2b_1(b_1-c_1)}(x-b_1)^2\Big]\Big|_{c_1}^{b_1} =$
$= \frac{b_1^2c_2^2-b_2^2c_1^2}{6b_1^2}c_1 - \Big[\frac{(b_2c_1-b_1c_2)(2b_1b_2-b_1c_2-b_2c_1)}{6b_1^2(b_1-c_1)^2}(c_1-b_1)^3 + b_2\frac{b_2c_1-b_1c_2}{2b_1(b_1-c_1)}(c_1-b_1)^2\Big] =$
$= \frac{(b_1^2c_2^2-b_2^2c_1^2)c_1-(b_2c_1-b_1c_2)(2b_1b_2-b_1c_2-b_2c_1)(c_1-b_1)+3b_1b_2(b_2c_1-b_1c_2)(c_1-b_1)}{6b_1^2} =$
$= (b_1c_2-b_2c_1)\frac{(b_1c_2+b_2c_1)c_1+(2b_1b_2-b_1c_2-b_2c_1)(c_1-b_1)-3b_1b_2(c_1-b_1)}{6b_1^2} =$
$= (b_1c_2-b_2c_1)\frac{-b_1b_2c_1-(-b_1b_2-b_1c_2-b_2c_1)b_1}{6b_1^2} = (b_1c_2-b_2c_1)\frac{b_2+c_2}{6} = \frac{b_1c_2-b_2c_1}{2}\cdot\frac{b_2+c_2}{3}$.
Wynika stąd, że $m_2 = \frac{b_2+c_2}{3} = \frac{0+b_2+c_2}{3}$, a to jest wynik, który chcieliśmy uzyskać. Po długich i ciężkich cierpieniach zakończyliśmy dowód tego, że środek ciężkości trójkąta jest środkiem masy jednorodnego trójkąta. No i nareszcie **KONIEC!**

Pokażemy jak można to rozumowanie skrócić. Zaczniemy od pola trójkąta. Znajdziemy najpierw odległość punktu $C=(c_1,c_2)$ od prostej $b_2x-b_1y=0$. Prosta składa się z punktów postaci (tb_1,tb_2), $t\in\mathbb{R}$. Znajdziemy najmniejszą z liczb $\sqrt{(c_1-tb_1)^2+(c_2-tb_2)^2}$. Mamy
$(c_1-tb_1)^2+(c_2-tb_2)^2 = t^2(b_1^2+b_2^2)-2t(b_1c_1+b_2c_2)+c_1^2+c_2^2 =$
$$= (b_1^2+b_2^2)\big(t-\frac{b_1c_1+b_2c_2}{b_1^2+b_2^2}\big)^2 - \frac{(b_1c_1+b_2c_2)^2}{b_1^2+b_2^2} + c_1^2+c_2^2.$$
Stąd wynika, że najmniejsza wartość wyrażenia $(c_1-tb_1)^2+(c_2-tb_2)^2$ jest równa
$-\frac{(b_1c_1+b_2c_2)^2}{b_1^2+b_2^2}+c_1^2+c_2^2 = \frac{(b_1^2+b_2^2)(c_1^2+c_2^2)-(b_1c_1+b_2c_2)^2}{b_1^2+b_2^2} =$
$$= \frac{b_1^2c_1^2+b_2^2c_1^2+b_1^2c_2^2+b_2^2c_2^2-(b_1^2c_1^2+b_2^2c_2^2+2b_1b_2c_1c_2)}{b_1^2+b_2^2} = \frac{b_2^2c_1^2+b_1^2c_2^2-2b_1b_2c_1c_2}{b_1^2+b_2^2} = \frac{(b_1c_2-b_2c_1)^2}{b_1^2+b_2^2}.$$
Wynika stąd, że odległość punktu $C=(c_1,c_2)$ od prostej $b_2x-b_1y=0$ jest równa $\frac{|b_1c_2-b_2c_1|}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}} =$

$=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$. ♡ Znaleźliśmy wysokość trójkąta ABC. Jego pole to

$$|\triangle(ABC)| = \tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}\cdot\tfrac{b_1c_2-b_2c_1}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}} = \tfrac{b_1c_2-b_2c_1}{2}.$$

A teraz już pora na środek masy trójkąta ABC ale „na raty". Punkt $D:=(c_1,\frac{b_2c_1}{b_1})$ leży na boku AB trójkąta ABC. Jeśli $0<c_1<b_1$, to odcinek CD dzieli trójkąt ABC na dwa trójkąty ADC i DBC.

Zachodzi równość $|\triangle(ADC)| = \frac{1}{2}\cdot c_1\cdot\big(c_2-\frac{b_2c_1}{b_1}\big) = \frac{c_1}{2b_1}\big(b_1c_2-b_2c_1\big)$. ♠ Niech $E=(e_1,e_2)$ oznacza środek masy trójkąta ADB. Mamy w tej sytuacji

$e_1\cdot|\triangle(ADC)| = e_1\cdot\frac{c_1}{2b_1}\big(b_1c_2-b_2c_1\big) = \int_0^{c_1} x\big(\frac{c_2}{c_1}x-\frac{b_2}{b_1}x\big)\,dx = \int_0^{c_1}\frac{c_2b_1-c_1b_2}{c_1b_1}x^2\,dx =$
$=\left(\frac{c_2b_1-c_1b_2}{c_1b_1}\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{c_1} = \frac{c_2b_1-c_1b_2}{c_1b_1}\frac{c_1^3}{3} = \frac{(b_1c_2-b_2c_1)c_1^2}{3b_1}$,

zatem $e_1=\frac{2}{3}c_1=\frac{1}{3}\big(0+c_1+c_1\big)$. Następnie

$e_2\cdot|\triangle(ADC)| = e_2\cdot\frac{c_1}{2b_1}\big(b_1c_2-b_2c_1\big) = \int_0^{c_1}\frac{1}{2}\Big(\big(\frac{c_2}{c_1}x\big)^2-\big(\frac{b_2}{b_1}x\big)^2\Big)\,dx =$
$=\int_0^{c_1}\frac{1}{2}\Big(\big(\frac{c_2}{c_1}\big)^2-\big(\frac{b_2}{b_1}\big)^2\Big)x^2\,dx = \frac{b_1^2c_2^2-b_2^2c_1^2}{3\cdot 2b_1^2c_1^2}x^3\Big|_0^{c_1} = \frac{b_1^2c_2^2-b_2^2c_1^2}{3\cdot 2b_1^2c_1^2}c_1^3 = \frac{(b_1c_2-b_2c_1)(b_1c_2+b_2c_1)}{3\cdot 2b_1^2}c_1$,

zatem $e_2=\frac{b_1c_2+b_2c_1}{3b_1}=\frac{1}{3}\big(0+c_2+\frac{b_2c_1}{b_1}\big)$.

Pole trójkąta DBC równe jest $\frac{1}{2}(b_1-c_1)\big(c_2-\frac{b_2c_1}{b_1}\big) = \frac{b_1-c_1}{2b_1}\big(b_1c_2-b_2c_1\big)$. ♣
Niech $F=(f_1,f_2)$ oznacza środek ciężkości trójkąta DBC. Mamy więc

$f_1\cdot|\triangle(DBC)| = f_1\cdot\frac{b_1-c_1}{2b_1}\big(b_1c_2-b_2c_1\big) =$
$=\int_{c_1}^{b_1} x\Big[\big(\frac{b_2-c_2}{b_1-c_1}(x-b_1)+b_2\big)-\big(\frac{b_2}{b_1}(x-b_1)+b_2\big)\Big]\,dx = \int_{c_1}^{b_1}\Big[\frac{b_2-c_2}{b_1-c_1}-\frac{b_2}{b_1}\Big](x^2-b_1x)\,dx =$
$=-\frac{b_1c_2-b_2c_1}{b_1(b_1-c_1)}\int_{c_1}^{b_1}(x^2-b_1x)\,dx = -\frac{b_1c_2-b_2c_1}{b_1(b_1-c_1)}\big(\frac{x^3}{3}-b_1\frac{x^2}{2}\big)\Big|_{c_1}^{b_1} =$
$=-\frac{b_1c_2-b_2c_1}{b_1(b_1-c_1)}\left(\frac{b_1^3-c_1^3}{3}-b_1\frac{b_1^2-c_1^2}{2}\right) = -\frac{b_1c_2-b_2c_1}{6b_1}\big(2(b_1^2+b_1c_1+c_1^2)-3b_1(b_1+c_1)\big) =$
$=-\frac{b_1c_2-b_2c_1}{6b_1}\big(-b_1^2-b_1c_1+2c_1^2\big) = \frac{b_1c_2-b_2c_1}{6b_1}\big(b_1^2-c_1^2+b_1c_1-c_1^2\big) =$
$=\frac{(b_1c_2-b_2c_1)(b_1-c_1)}{2b_1}\cdot\frac{1}{3}\cdot\big(b_1+c_1+c_1\big)$.

Wobec tego $f_1=\frac{1}{3}\cdot(b_1+c_1+c_1)$.

Znajdziemy drugą współrzędną środka masy trójkąta DBC. Zachodzą równości

$f_2\cdot|\triangle(DBC)| = f_2\cdot\frac{b_1-c_1}{2b_1}\big(b_1c_2-b_2c_1\big) = \frac{1}{2}\int_{c_1}^{b_1}\Big[\big(\frac{b_2-c_2}{b_1-c_1}(x-b_1)+b_2\big)^2-\big(\frac{b_2}{b_1}(x-b_1)+b_2\big)^2\Big]\,dx =$
$=\left(\frac{b_1-c_1}{6(b_2-c_2)}\big(\frac{b_2-c_2}{b_1-c_1}(x-b_1)+b_2\big)^3-\frac{b_1}{6b_2}\big(\frac{b_2}{b_1}(x-b_1)+b_2\big)^3\right)\Big|_{c_1}^{b_1} =$
$=\frac{b_1-c_1}{6(b_2-c_2)}b_2^3-\frac{b_1}{6b_2}b_2^3-\frac{b_1-c_1}{6(b_2-c_2)}c_2^3+\frac{b_1}{6b_2}\big(\frac{b_2c_1}{b_1}\big)^3 = \frac{b_1-c_1}{6(b_2-c_2)}\big(b_2^3-c_2^3\big)-\frac{b_2^2}{6b_1^2}\big(b_1^3-c_1^3\big) =$
$=\frac{b_1-c_1}{6b_1^2}\big(b_1^2(b_2^2+b_2c_2+c_2^2)-b_2^2(b_1^2+b_1c_1+c_1^2)\big) =$

♡ Założyliśmy na wstępie, że $b_1c_2-b_2c_1>0$.

♠ Podstawą jest bok CD

♣ Podstawą jest bok CD

$= \frac{b_1-c_1}{6b_1^2}\big(b_1b_2(b_1c_2-b_2c_1)+(b_1c_2+b_2c_1)(b_1c_2-b_2c_1)\big) =$
$= \frac{(b_1-c_1)(b_1c_2-b_2c_1)}{6b_1^2}\big(b_1b_2+b_1c_2+b_2c_1\big) = \frac{(b_1-c_1)(b_1c_2-b_2c_1)}{2b_1}\cdot\frac{1}{3}\cdot\big(b_2+c_2+\frac{b_2c_1}{b_1}\big)$.
Wobec tego $f_2 = \frac{1}{3}\cdot\big(b_2+c_2+\frac{b_2c_1}{b_1}\big)$. ■

Kilka zadań

7.2. 01 Obliczyć objętość stożka obrotowego o promieniu podstawy $r>0$ i wysokości $h>0$.

7.2. 02 Obliczyć objętość ostrosłupa o polu podstawy $P>0$ i wysokości $h>0$.

7.2. 03 Obliczyć objętość elipsoidy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$.

7.2. 04 Obliczyć długość krzywej o równaniu: $y^2=4x^3$, przy czym $y\ge 0,\quad 0\le x\le \frac{8}{9}$.

7.2. 05 Obliczyć długość krzywej o równaniu $y=2\sqrt{x}$, przy czym $1\le x\le 9$.

7.2. 06 Obliczyć długość krzywej o równaniu $y=\ln x$, przy czym $1\le x\le 2$.

7.2. 07 Obliczyć długość krzywej o równaniu $y=\ln\cos x$, przy czym $0\le x\le\frac{\pi}{4}$.

7.2. 08 Porównać całki nie obliczając ich:

a. $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^6 x\,dx$ i $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^3 x\,dx$, **b.** $\int_0^1 e^{-x}\,dx$ i $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

7.2. 09 Określić znak całki

a. $\int_0^{2\pi}x\sin x\,dx$, **b.** $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^2\ln x\,dx$, **c.** $\int_{-2}^2 x^3 2^x\,dx$, **d.** $\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx$.

7.2. 10 Obliczyć całki niewłaściwe

a. $\int_0^1\frac{x}{1-x}\,dx$, **b.** $\int_0^1\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$,

c. $\int_0^\infty x^2e^{-x^2}\,dx$, wiedząc, że $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, **d.** $\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx$.

7.2. 11 Obliczyć granicę ciągu (a_n) przez obliczenie pewnej całki, jeśli $a_n=$

(a) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots\frac{1}{n+n}$, (b) $\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}$,

(c) $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$, (d) $\frac{1^7+2^7+\cdots+n^7}{n^8}$.

7.2. 12 Dla jakich wartości parametru $a\in R$ całka $\int_0^1 x^a\,dx$ jest skończona?

7.2. 13 Dla jakich wartości parametru $a\in R$ całka $\int_1^\infty x^a\,dx$ jest skończona?

7.2. 14 Dla jakich wartości parametru $a\in R$ całka $\int_1^\infty\frac{1}{x\ln^a x}\,dx$ jest skończona?

7.2. 15 Wykazać, że całka $\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}\,dx$ jest zbieżna, zaś całka $\int_0^\infty\left|\frac{\sin x}{x}\right|\,dx$ jest rozbieżna.

7.2. 16 Obliczyć pochodną funkcji f, jeśli $f(x)=$

a. $\int_1^{x+1}e^{t^2}\,dt$, **b.** $\int_1^{x^2}e^{t^2}\,dt$, **c.** $\int_{x-1}^1 e^{t^2}\,dt$, **d.** $\int_{x-1}^{x^2}e^{t^2}\,dt$.

7.2. 17 Obliczyć całkę

a. $\int_1^{10}\frac{|x-5|}{x-5}(x^2+1)\,dx$ – w punkcie 5 funkcja podcałkowa nie jest zdefiniowana,

b. $\int_{-1}^1(|x|)'(x^2+x)\,dx$ – w punkcie 0 funkcja podcałkowa nie jest zdefiniowana,

c. $\int_{-1}^1|x|\,dx$,

d. $\int_{-10}^{10}|x^2-5x+6|\,dx$.

7.2. 18 Znaleźć środek masy jednorodnego wycinka koła $\{(x,y)\colon\quad x^2+y^2\le r^2,\ |y|\le x\operatorname{tg}\alpha\}$, gdzie $r>0$ i $0<\alpha\le\frac{\pi}{2}$.

7.2. 19 Znaleźć środek masy jednorodnego łuku okręgu $\{(x,y)\colon\quad x^2+y^2=r^2,\ |y|\le x\operatorname{tg}\alpha\}$, gdzie $r>0$ i $0<\alpha\le\frac{\pi}{2}$.

7.2. 20 Znaleźć środek masy jednorodnego łuku paraboli $y=x^2$, $0\le x\le 3$.

7.2. 21 Znaleźć środek masy jednorodnego obszaru $\{(x,y)\colon\quad 0\le y\le x^2, 0\le x\le 3\}$.

7.2. 22 Znaleźć środek masy jednorodnego łuku sinusoidy $y=\sin x$, $0\le x\le\pi$.

Jedna z całek jest nieelementarna, ale można skorzystać z symetrii.

Długość sinusoidy też nie da się , wyrazić za pomocą , funkcji elementarnych, więc proszę o przybliżenie. Aby oszacować z dołu należy np. rozpatrzyć punkty $(0,\sin 0)$, $(\frac{\pi}{6},\sin\frac{\pi}{6})$, $(\frac{\pi}{4},\sin\frac{\pi}{4})$, $(\frac{\pi}{3},\sin\frac{\pi}{3})$, $(\frac{\pi}{2},\sin\frac{\pi}{2})$ i znaleźć długość łamanej (należy skorzystać ze sprzętu elektronicznego). Aby oszacować z góry należy z wymienionych punktów poprowadzić proste styczne do wykresu funkcji sinus, znaleźć punkty przecięcia stycznych w kolejnych punktach i obliczyć długość łamanej opisanej na łuku sinusoidy zaczynającym się w punkcie $(0,\sin 0)$ a kończącym się w punkcie $(\frac{\pi}{2},\sin\frac{\pi}{2})$. Porównać wyniki szacowania.

7.2. 23 Znaleźć środek masy jednorodnego obszaru $\{(x,y)\colon\quad 0\le y\le\sin x, 0\le x\le\pi\}$.

7.2. 24 Znaleźć środek masy jednorodnego obszaru ograniczonego parabolami $2x=y^2$ i $2y=x^2$.

7.2. 25 Znaleźć środek masy jednorodnej ćwiartki elipsy

$$\{(x,y)\colon\quad \tfrac{x^2}{a^2}+\tfrac{y^2}{b^2}\le 1,\ \ 0\le x,\ \ 0\le y\}.$$

7.2. 26 Znaleźć środek masy jednorodnej półkuli o promieniu $r>0$.

7.2. 27 Znaleźć środek masy jednorodnej półsfery o promieniu $r>0$.

7.2. 28 Zaleźć środek masy półtorusa, tj bryły powstałej w wyniku obrotu koła o promieniu $r>0$ wokół prostej leżącej w jego płaszczyźnie w odległości $R>r$ od środka koła.

7.2. 29 Znaleźć środek masy jednorodnego trapezu o wierzchołkach $(a,0)$, $(b,0)$, (h,c) i (h,d), gdzie a,b,c,d,h są takimi liczbami rzeczywistymi, że $a<b$, $d<c$ i $h>0$.

7.2. 30 Dla jakich trójkątów środek masy brzegu pokrywa się ze środkiem masy obszaru trójkątnego?

7.2. 31 Znaleźć środek masy jednorodnego obszaru $D=\{(x,y)\colon\quad (x-1)^2+y^2\ge 1 \text{ i } x^2+y^2\le 4\}$.

7.2. 32 Znaleźć pierwszą współrzędną środka masy jednorodnego łuku wykresu logarytmu naturalnego $\{(x,y)\colon\quad y=\ln x \text{ i } 1\le x\le e\}$.

7.2. 33 Znaleźć środek masy jednorodnego obszaru $D=\{(x,y)\colon\quad \sin x\le y\le\cos x \text{ i } 0\le x\le\frac{\pi}{4}\}$.

7.2. 34 Znaleźć środek masy jednorodnego obszaru $D=\{(x,y,z)\colon\quad x^2+y^2\le z\le 1\}$.

7.2. 35 Znaleźć środek masy jednorodnego obszaru $D=\{(x,y)\colon\quad \frac{1}{2}\le x \text{ i } x^2+y^2\le 1\}$.

7.2. 36 Znaleźć środek masy jednorodnego obszaru $D=\{(x,y)\colon\quad 1\le x+y \text{ i } x^2+y^2\le 1\}$.

7.2. 37 Znaleźć środek masy jednorodnego obszaru $D=\{(x,y)\colon\quad 0\le y\le\sqrt{1+x^2}\le 2\}$.

7.2. 38 Znaleźć środek masy jednorodnego obszaru $D = \{(x,y)\colon \quad 0 \le y \le \sqrt{1+x^2} \le 2\}$.

7.2. 39 Wykazać, że jeśli $0 \le x \le 1$, to $\lim\limits_{n\to\infty} n(n+1)x^n(1-x) = 0$ i jednocześnie zachodzi równość $\displaystyle\int_0^1 n(n+1)x^{n-1}(1-x)\,dx = 1$. *Wynika stąd, że nie można wnioskować tego, że całki dążą do* 0 *z tego tylko, że funkcje podcałkowe dążą do* 0.

7.2. 40* Wyprowadzenie wzoru Wallisa

a. Niech $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$. Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej $n \ge 2$ zachodzi równość $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. Dla dowodu można dwukrotnie scałkować odpowiednie funkcje przez części: $\sin^n x = \sin x \cdot \sin^{n-1} x = \sin^{n-1} x \cdot (-\cos x)'$, ...

b. Obliczyć I_0 oraz I_1, a następnie I_{2n} i I_{2n+1} dla dowolnej liczby całkowitej $n \ge 0$.

c. Wykazać, że $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.

d. Wykazać, że ciąg (I_n) jest malejący oraz że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1$.

e. Wykazać, że $\frac{\pi}{2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}\right)^2$.