Całki

Poprawiono i uzupełniono 16 marca 9:47

Operacja odwrotna do różniczkowania nazywana jest całkowaniem. Dana funkcja traktowana jest jako pochodna pewnej funkcji, którą trzeba znaleźć. Zaczniemy od definicji.

Definicja 10.1 (funkcji pierwotnej czyli całki nieoznaczonej)
Niech $G \subset \mathbb{R}$ będzie sumą pewnej rodziny parami rozłącznych przedziałów. Jeżeli $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją na zbiorze G, to każda funkcję $F\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$, dla której równość $F'(x) = f(x)$ ma miejsce dla każdego $x \in G$ nazywamy funkcją pierwotną lub całką nieoznaczoną funkcji f. Stosujemy oznaczenie $F(x) = \int f(x)\,dx$. ■

Zauważmy, że jeśli F jest funkcją pierwotną funkcji f, to dla każdej liczby rzeczywistej C funkcja $F + C$ też jest funkcją pierwotną funkcji f. Zachodzi

Twierdzenie 10.2 (o jednoznaczności funkcji pierwotnej)
Jeśli P jest przedziałem, $f\colon P \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcją a F_1 i F_2 jej funkcjami pierwotnymi, to istnieje liczba $C \in \mathbb{R}$, taka że dla każdego $x \in P$ zachodzi równość $F_2(x) = F_1(x) + C$.

Teza wynika natychmiast z tego, że pochodną funkcji $F_2 - F_1$ jest funkcja tożsamościowo równa 0, więc funkcja $F_2 - F_1$ jest stała. ■

Podkreślić od razu wypada, że jeśli dziedzina nie jest przedziałem, to teza przestaje być prawdziwa. Funkcja $\ln|x|$ jest funkcją pierwotną funkcji $\frac{1}{x}$. Niech $F_1(x) = \ln|x|$. Niech $F_2(x) = 1 + \ln x$ dla $x > 0$ i $F_2(x) = \ln(-x)$ dla $x < 0$. Jasne jest, że $F_2'(x) = \frac{1}{x}$ dla każdego $x \neq 0$, więc F_2 jest funkcją pierwotną funkcji $\frac{1}{x}$, podobnie jak F_1. Funkcja $F_2 - F_1$ przyjmuje jednak dwie wartości, mianowicie 0 dla $x < 0$ oraz 1 dla $x > 0$. Nie jest więc stała, chociaż *jest stała na każdym przedziale zawartym w dziedzinie funkcji* f. Czasami taką funkcję nazywamy lokalnie stałą. W dalszym ciągu będziemy, zgodnie z przyjętym zwyczajem, pisać

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C\,,$$

jeśli F jest jakąś funkcją pierwotną funkcji f, przy czym C oznaczać tu będzie zawsze funkcję lokalnie stałą, czyli funkcję *stałą na każdym przedziale zawartym w dziedzinie funkcji* f.

Przykład 10.1 $\int dx = x + C$. ■

Przykład 10.2 $\int e^x\,dx = e^x + C$. ■

Przykład 10.3 $\int \cos x\,dx = \sin x + C$. ■

Przykład 10.4 $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$. ■

Przykład 10.5 $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$. ■

Przykład 10.6 $\int x^a\,dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$ dla $a \neq -1$ i każdego x, dla którego funkcja x^a jest określona (jeśli $a > 0$ jest liczbą wymierną postaci $\frac{k}{2m+1}$, k, m — całkowite, to dziedziną tej funkcji jest $\mathbb{R}$, jeśli $a < 0$ jest liczbą wymierną postaci $\frac{k}{2m+1}$, k, m — całkowite, to dziedziną jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych z wyjątkiem 0, jeśli $a > 0$ jest liczbą rzeczywistą innej postaci to dziedziną jest $[0, \infty)$, w przypadku $a < 0$, które nie jest postaci $\frac{k}{2m+1}$, gdzie k, m są całkowite, dziedziną jest $(0, \infty)$). ■

Przykład 10.7 $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C$. ■

Te wzory należy zapamiętać. Jasne jest, że nie każda funkcja ma funkcję pierwotną. Niech $f(x) = 0$ dla $x \leq 0$ i niech $f(x) = 1$ dla $x > 0$. Jeśli F jest funkcją pierwotną funkcji f, to dla $x \leq 0$ mamy $F'(x) = 0$, więc funkcja F jest stała na półprostej $(-\infty, 0]$. Dla $x > 0$ mamy $F'(x) = 1$, więc musi istnieć stała liczba c, taka że $F(x) = x + c$ dla każdego $x > 0$. Ponieważ F ma być funkcją różniczkowalną w każdym punkcie, w szczególności w punkcie 0, więc musi być $F(x) = c$ dla $x \leq 0$ oraz $F(x) = x + c$ dla $x > 0$. Niestety tak zdefiniowana funkcja nie ma pochodnej w punkcie 0: lewostronna pochodna to 0, a prawostronna to 1. Jest to ilustracja ogólnego zjawiska. Można udowodnić, że jeśli funkcja ma funkcję pierwotną, czyli jest pochodną pewnej funkcji, to na każdym przedziale przysługuje jej własność przyjmowania wartości pośrednich, czyli własność Darboux. Nie przeprowadzimy dowodu, choć jest łatwy, bo potrzebny jest on w zasadzie tylko matematykom, zresztą jest to warunek konieczny, ale nie jest on niestety dostateczny. Można natomiast udowodnić

Twierdzenie 10.3 (o istnieniu funkcji pierwotnej funkcji ciągłej)

Jeśli $f\colon P \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcją ciągłą na przedziale P, to f ma na nim funkcję pierwotną.

Dowód. (szkic) Załóżmy najpierw, że funkcja f jest dodatnia. Niech $x_0 \in P$ i niech $x \geq x_0$. Niech $F(x)$ oznacza pole obszaru ograniczonego z dołu odcinkiem $[x_0, x]$, z góry wykresem funkcji f, z lewej strony prostą pionową przechodzącą przez punkt $(x_0, 0)$, z prawej strony – prostą pionową przechodzącą przez punkt $(x, 0)$. W przypadku $x < x_0$ zamiast pola analogicznego obszaru rozważamy liczbę ujemną, której wartością bezwzględną jest odpowiednie pole. Wykażemy, że $F'(x) = f(x)$ w przypadku $x > x_0$ pozostawiając rozważenie drugiego przypadku, całkowicie analogicznego, czytelnikom. Załóżmy, że $h > 0$ jest tak małą liczbą dodatnią, że $x+h \in P$. W tej sytuacji $F(x+h) - F(x)$ jest polem obszaru ograniczonego z dołu odcinkiem $[x, x+h]$, z góry – wykresem funkcji f, z lewej strony – prostą pionową przechodzącą przez $(x, 0)$, z prawej strony – prostą pionową przechodzącą przez $(x+h, 0)$. Z rysunku i ze znanego wzoru na pole prostokąta widać, że

$$\inf\{f(t)\colon\quad x\le t\le x+h\}\le\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\le\sup\{f(t)\colon\quad x\le t\le x+h\}$$

– opisany obszar zawiera prostokąt o wysokości $\inf\{f(t)\colon\quad x\le t\le x+h\}$ i podstawie h, jest też zawarty w prostokącie o wysokości $\sup\{f(t)\colon\quad x\le t\le x+h\}$ i podstawie h. Z ciągłości funkcji f wynika, że

$$\lim_{h\to 0^+}\inf\{f(t)\colon\quad x\le t\le x+h\}=f(x)=\lim_{h\to 0^+}\sup\{f(t)\colon\quad x\le t\le x+h\}.$$

Stąd i z twierdzenia o trzech funkcjach wynika od razu, że $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$. Drobna zmiana tego rozumowania pokazuje, że również $\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$. Jeśli funkcja f przyjmuje również wartości ujemne, lub tylko ujemne, to można do niej dodać liczbę dodatnią tak dużą, by wartości nowej funkcji w punktach x_0, x i $x+h$ oraz wszystkich leżących między nimi były dodatnie. Można to zrobić, bo funkcja ciągła na przedziale domkniętym jest ograniczona – rozpatrujemy być może tylko część dziedziny, ale tak wolno postępować, bo interesują nas jedynie wartości przyjmowane przez nią w okolicach x. Na tym zakończymy szkicowanie dowodu. ■

Okazuje się więc, że jeśli funkcja $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ jest dodatnia i ciągła, to liczbę $F(b)-F(a)$ należy traktować jako pole obszaru "pod wykresem funkcji".

Dowód istnienia funkcji pierwotnej ma wyjaśnić związek całki z polem. w istocie rzeczy pierwsze wzory na pola figur bardziej skomplikowanych uzyskano już w starożytności (koło, parabola, powierzchnia kuli itd.). Istotny postęp uzyskany został dzięki Archimedesowi. Jednak jego pomysłowe rozumowania długo musiały czekać na kontynuatorów. W praktyce następne poważne osiagnięcia w tej dziedzinie uzyskano dopiero dzięki zauważeniu związku liczenia pól, objętości z różniczkowaniem. Rezultaty Archimedesa i jego współczesnych stały się teraz banalnymi zadaniami, z którymi radzi sobie wielu studentów, choć wielu z nich miałoby istotne trudności ze zrozumieniem tego, co pisał Archimedes (nawet po przetłumaczeniu na polski lub inny język dla nich zrozumiały).

Warto też wyraźnie stwierdzić, że choć wiemy, że funkcje ciągłe mają funkcje pierwotne, to jednak nie zawsze daje się je wyrazić za pomocą funkcji, którymi do tej pory operujemy, wiele z nich to tzw. funkcje nieelementarne. Ważny przykład to e^{-x^2}. Jej funkcji pierwotnej nie można wyrazić za pomocą wielomianów, sinusa, kosinusa, funkcji wykładniczej, funkcji odwrotnych do wymienionych, jeśli dopuścimy działania arytmetyczne i składanie funkcji. Tego typu twierdzenia udało się wykazać w drugiej połowie XIX wieku. Ich dowody, a nawet dokładniejsze omówienie, daleko wykraczają poza program nauczania matematyki w wyższych uczelniach, z wyjątkiem niektórych wydziałów matematyki. Wspominamy jednak o tych twierdzeniach, bo funkcja e^{-x^2} jest jedną z częściej używanych w statystyce. Z przyczyn podanych przed chwilą stworzono tablice jej całek, można wybierać funkcję pierwotną tak, by jej granicą przy $x \longrightarrow -\infty$ była liczba 0. Druga przyczyna to ostrzeżenie, że problemy wyglądające na elementarne czasem są nierozwiązywalne. Jest wiele innych funkcji tego typu, np. $\frac{\sin x}{x}$, $\sin x^2$, $\sqrt{Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E}$ przy założeniu, że wyrażenie pod pierwiastkiem jest wielomianem stopnia > 2 i to nie szczególnie dobranym (x^4+2x^2+1 nie powoduje żadnych kłopotów, bo pierwiastek to tylko dekoracja!). Często też pozornie mała zmiana zmienia zasadniczo trudność problemu, który trzeba rozwiązać: całka z funkcji e^{-x^2} jest nieelementarna, natomiast $\int xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$!

Wniosek 10.4 (z dowodu tw. o istnieniu funkcji pierwotnej funkcji ciągłej)
Jeśli funkcja f jest ciągła i nieujemna na przedziale $[a,b]$, F jest funkcją pierwotną funkcji f, to pole obszaru $A=\{(x,y):\quad a\le x\le b,\ 0\le y\le f(x)\}$, tzw. „pole pod wykresem funkcji f ”, równe jest

$$F(b)-F(a)\,.$$

Dowód. W dowodzie twierdzenia o istnieniu funkcji pierwotnej funkcji wskazaliśmy funkcję pierwotną F funkcji f, dla której wzór wypisany we wniosku ma miejsce. Ze względu na twierdzenie o jednoznaczności funkcji pierwotnej różnica $F(b)-F(a)$ nie zależy od wyboru funkcji pierwotnej (różne funkcje pierwotne na przedziale różnią się o stałą). ■

Definicja 10.5 (całki oznaczonej Newtona)
Całką oznaczoną funkcji $f\colon[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ nazywamy liczbę $f(b)-F(a)$, gdzie F oznacza funkcję pierwotną funkcji f. Stosujemy oznaczenie

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)\,. \quad ■$$

Stosujemy też inne oznaczenie: $F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b$, więc można pisać

$$\int_a^b F(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b\,.$$

Przykład 10.8 $\int_a^b dx = b-a$, bo pole prostokąta o podstawie $b-a$ i wysokości 1 równe jest $b-a$. ■

Przykład 10.9 $\int_a^b x\,dx=\frac{b^2-a^2}{2}$, bo $\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2+C$. To też żadna sensacja. Jeśli $0\le a$, to $\int_a^b x\,dx$ to pole trapezu o podstawach a i b, którego wysokość równa jest $b-a$, czyli

$\frac{1}{2}(b+a)(b-a) = \frac{1}{2}(b^2-a^2)$. Jeśli $b \le 0$, to podstawy trapezu równe są $|a| = -a$ oraz $|b| = -b$, a wysokość równa jest $b-a$, zatem całka jest liczbą przeciwną do pola, więc równa jest $-\frac{1}{2}\big(-b+(-a)\big)(b-a) = \frac{b^2-a^2}{2}$. Pozostał jeszcze jeden przypadek: $a < 0 < b$. Mamy oczywiście $\int_a^b x\,dx = \int_a^0 x\,dx + \int_0^b x\,dx$. Wobec tego tym razem całka równa jest różnicy pól dwóch trójkątów prostokątnych równoramiennych o ramionach $|a|$ i b. Te pola to oczywiście $\frac{1}{2}b^2$ i $\frac{1}{2}a^2$, całka równa jest $\frac{1}{2}(b^2-a^2)$. ■

Przykład 10.10 $\int_0^a x^2\,dx = \frac{a^3}{3}$, bo $\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$. Wobec tego „pole pod parabolą" równe jest $\frac{1}{3}$ pola prostokąta o wierzchołkach $(0,0)$, $(a,0)$, $\big(a^2,a\big)$, $\big(0,a^2\big)$. Wzór ten znany był już Archimedesowi, ale jego wyprowadzenie — nie znano jeszcze wtedy całek — było trudne. ■

Obliczanie całek jest na ogół dosyć trudne, wymaga pomysłowości. My podamy kilka prostych wzorów i pokażemy jak można je stosować w prostych sytuacjach. Obecnie istnieją liczne programy komputerowe, np. Mathematica, Maple, Derive, za pomocą których można obliczyć wiele całek. Tym nie mniej warto znać podstawowe wzory i umieć stosować w prostych sytuacjach.

Twierdzenie 10.6 (o całce sumy dwu funkcji.)
Załóżmy, że funkcje f i g mają funkcje pierwotne. Wtedy funkcje $f \pm g$ też mają funkcje pierwotne i zachodzą wzory

$$\int \big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx \qquad \text{oraz}$$

$$\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Pierwszy z tych wzorów wynika od razu z tego, że pochodna sumy jest sumą pochodnych, różnicy — różnicą pochodnych. Wzór drugi wynika z pierwszego. ■

Twierdzenie 10.7 (o całce iloczynu funkcji przez liczbę)
Jeśli funkcja f ma funkcję pierwotną, to dla każdej liczby rzeczywistej c funkcja cf ma funkcję pierwotną i zachodzi równość

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx\,.$$

Dla całki oznaczonej

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Wzory wynikają od razu z odpowiednich własności pochodnej. ■

Z obliczaniem całki iloczynu jest o wiele gorzej, bo wzór na pochodną iloczynu jest bardziej skomplikowany, zresztą istnieją funkcje (nieciągłe), które maja funkcje pierwotne, a ich iloczyn — nie. Podamy teraz dwa twierdzenia, które w niektórych sytuacjach pozwalają uprościć obliczanie całki z iloczynów bardzo szczególnej postaci.

Twierdzenie 10.8 (o całkowaniu przez części)
Załóżmy, że funkcje f i g mają ciągłe pochodne. Wtedy zachodzi wzór:

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx\,.$$

Dla całki oznaczonej
$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx =$

$$= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx\,.$$

Wzór ten jest natychmiastową konsekwencją twierdzenia o pochodnej iloczynu. ■

Twierdzenie 10.9 (o całkowaniu przez podstawienie)
Załóżmy, że funkcje f i g' są ciągłe oraz że F jest funkcją pierwotną funkcji f. Wtedy

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

Dla całki oznaczonej

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} F(y)\,dy = F(g(b)) - F(g(a))\,.$$

Ten wzór wynika natychmiast z twierdzenia o pochodnej złożenia dwu funkcji. ■

Ostatnie dwa twierdzenia w połączeniu z poprzednimi stanowią dobrą podstawę do znajdowania całek z licznych funkcji zdefiniowanych elementarnie. Zanim pokażemy, jak można to robić, powiemy jakie oznaczenia są często stosowane.

Umowa 10.10 (w kwestii oznaczeń)
Zamiast $g'(x)\,dx$ będziemy czasem pisać $dg(x)$; w konsekwencji jeżeli $y = g(x)$, to piszemy $dy = g'(x)\,dx = dg(x)$. ■

Zauważmy, że jeśli funkcja g jest różnowartościowa, czyli ma funkcję odwrotną g^{-1}, to równość $y = g(x)$ równoważna jest równości $x = g^{-1}(y)$. Wtedy, zgodnie z przyjętą umową, możemy napisać $dx = d(g^{-1})(y) = (g^{-1})'(y)\,dy$. Na mocy twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej mamy $\big(g^{-1}\big)'(y) = \big(g^{-1}\big)'\big(g(x)\big) = \frac{1}{g'(x)}$. Wobec tego $dx = d\big(g^{-1}\big)(y) = \frac{1}{g'(x)}\,dy$, co w świetle wzoru $dy = dg(x) = g'(x)\,dx$, wygląda na zupełnie oczywiste stwierdzenie. Jednak należy pamiętać o tym, że symbole dx, dy nie oznaczają liczb, w ogóle nie były przez nas zdefiniowane. Występują jedynie w połączeniu z innymi. Wobec tego nie jest całkiem jasne, czy reguły działań na liczbach maja zastosowanie również w tym przypadku, a dokładniej: które reguły pozostają w mocy. Okazało się, że wnioskowanie, jeśli $dy = g'(x)\,dx$, to $dx = \frac{1}{g'(x)}\,dy$ ma sens dzięki twierdzeniu o pochodnej funkcji odwrotnej! Przypomnieć wypada, że oprócz stosowanego przez nas oznaczenia pochodnej $y' = g'(x)$ stosowane jest oznaczenie $\frac{dy}{dx} = g'(x)$. Symbol $\frac{dy}{dx}$ jest oznaczeniem pochodnej, nie jest ułamkiem. Można go jednak traktować jak iloraz. Czytelnicy przekonają się jeszcze wiele razy, że upraszcza to manipulowanie wzorami. Zauważmy jeszcze, że jeśli $x = h(t)$, to oprócz równości $dy = g'(x)\,dx$ mamy też $dx = h'(t)\,dt$. Chciałoby się wywnioskować z tych wzorów, że $dy = g'(x)h'(t)\,dt$. Można, bo $y = g\big(h(t)\big)$, więc $dy = (g\circ h)'(t)\,dt$, ale na mocy twierdzenia o pochodnej złożenia dwu funkcji zachodzi równość $\big(g\circ h\big)'(t) = g'\big(h(t)\big)h'(t)$, zatem również $dy = g'\big(h(t)\big)h'(t)\,dt$. Widać więc znów analogię zułamkami: $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$, czyli $dy = (g\circ h)'(t)\,dt = g'(h(t))h'(t)\,dt = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}\cdot dt$. Zakończymy te przydługie rozważania na temat oznaczeń stwierdzeniem, że wzór na całkowanie przez części zwykle zapisywany jest w postaci:

$$\int f(x)g'(x)\,dx = \int f\,dg = fg - \int g\,df = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx$$

a wzór na całkowanie przez podstawienie – w postaci:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(y)\,dy\,.$$

Przykład 10.11

$\int e^{2x}\,dx \xlongequal[dy=2\,dx]{y=2x} \int e^y \frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}e^y + C = \frac{1}{2}e^{2x} + C\,.$ ■

Przykład 10.12

$\int xe^{x^2}\,dx \xlongequal[dy=2xdx]{y=x^2} \int e^y\frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}\int e^y\,dy = \frac{1}{2}e^y + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C\,.$ ■

Przykład 10.13

$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx \xlongequal[dy=-\sin x\,dx]{y=\cos x} -\int \frac{1}{y}\,dy = -\ln|y| + C = -\ln|\cos x| + C\,.$ ■

Przykład 10.14

$\int \sqrt{r^2 - x^2}\,dx \xlongequal[dx=r\cos t\,dt]{x=r\sin t} \int \sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t}\; r\cos t\,dt = \int \sqrt{r^2\cos^2 t}\; r\cos t\,dt =$

$= \int r^2\cos^2 t\,dt = r^2\int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt \xlongequal[du=2dt]{u=2t} r^2\int\frac{1+\cos u}{2}\cdot\frac{du}{2} = \frac{r^2}{2}\left(\frac{u}{2} + \frac{\sin u}{2}\right) + C =$

$= \frac{r^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C = \frac{r^2}{2}\left(t+\sin t\cos t\right)+C = \frac{r^2}{2}\arcsin\frac{x}{r}+\frac{x}{2}\sqrt{r^2-x^2}+C$ – w tym przypadku przyjęliśmy $x = r\sin t$, możemy przyjąć, że $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, bo wtedy x będzie przyjmować wszystkie wartości z przedziału $[-r,r]$, w tej sytuacji $\cos t \geq 0$ i wobec tego zachodzi równość $\sqrt{\cos^2 t} = \cos t$. ■

Przykład 10.15

$\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[r^2\arcsin\frac{r}{r}+r\sqrt{r^2-r^2}-r^2\arcsin\frac{-r}{r}-(-r)\sqrt{r^2-(-r)^2}\right] =$

$= \frac{1}{2}\left[2r^2\arcsin 1\right] = r^2\frac{\pi}{2} = \frac{\pi r^2}{2}$. Skorzystaliśmy tu oczywiście z wyniku otrzymanego w przykładzie poprzednim. Obliczana całka okazała się połową koła o promieniu r, co nie jest specjalnie dziwne, bo wykresem funkcji $\sqrt{r^2-x^2}$ jest górna połowa okręgu o środku $(0,0)$ i promieniu r, więc „pole pod wykresem” to połowa pola koła o promieniu r. ■

Przykład 10.16

$\int xe^x\,dx = \int x\,(e^x)'\,dx \overset{\text{całkujemy}}{\underset{\text{przez części}}{=\!=\!=}} xe^x - \int (x)'e^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C$. ■

Przykład 10.17

$\int x^2e^x\,dx = \int x^2\,(e^x)'\,dx \overset{\text{całkujemy}}{\underset{\text{przez części}}{=\!=\!=}} x^2e^x - \int \left(x^2\right)'e^x\,dx = x^2e^x - \int 2xe^x\,dx =$

$= x^2e^x - 2\int xe^x\,dx \overset{\text{poprzedni}}{\underset{\text{przykład}}{=\!=\!=}} x^2e^x - 2\left(xe^x - e^x\right)+C = e^x(x^2-2x+2)+C$. W tym przykładzie skorzystaliśmy z wyniku uzyskanego w poprzednim. Widać, że postępując analogicznie można obliczać całki z funkcji x^3e^x, x^4e^x itd. – jednokrotne całkowanie przez części obniża stopień wielomianu, przez który mnożymy funkcję wykładniczą o 1, więc wielokrotne pozwala na pozbycie się go, czyli sprowadzenie problemu do obliczenia całki $\int e^x\,dx$, a z tym już umiemy sobie poradzić. ■

Przykład 10.18

$\int xe^{3x}\,dx = \int x\left(\frac{1}{3}e^{3x}\right)'\,dx \overset{\text{całkujemy}}{\underset{\text{przez części}}{=\!=\!=}} \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\int (x)'e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\,dx =$

$= \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C$ — ostatnie całkowanie przez podstawienie ($y = 3x$) potraktowaliśmy już jako na tyle oczywiste, że nawet tego specjalnie nie zaznaczyliśmy. ■

Przykład 10.19

$\int x\cos(5x)\,dx = \int x\left(\frac{1}{5}\sin(5x)\right)'\,dx \overset{\text{całkujemy}}{\underset{\text{przez części}}{=\!=\!=}} \frac{1}{5}x\sin(5x) - \frac{1}{5}\int (x)'\sin(5x)\,dx =$

$$= \frac{1}{5}x\sin(5x) - \frac{1}{5}\int \sin(5x)\,dx = \frac{1}{5}x\sin(5x) - \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{5}\cos(5x)\right) + C =$$

$$= \frac{1}{5}x\sin(5x) + \frac{1}{25}\cos(5x) + C\,. \quad ■$$

Przykład 10.20

$\int \ln x\,dx \xlongequal[\text{przez części}]{\text{całkujemy}} x\ln x - \int x\,d(\ln x) = x\ln x - \int x\frac{1}{x}\,dx =$

$$= x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C\,. \quad \blacksquare$$

Przykład 10.21

$\int \arcsin x\,dx \xlongequal[\text{przez części}]{\text{całkujemy}} x\arcsin x - \int x\,d(\arcsin x) = x\arcsin x - \int x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$

$\xlongequal[dy=-2xdx]{y=1-x^2} x\arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy = x\arcsin x + \frac{1}{2}\int y^{-1/2}\,dy =$

$$= x\arcsin x + \frac{1}{2(1+(-1/2))}y^{1+(-1/2)} + C = x\arcsin x + \left(1-x^2\right)^{1/2} + C =$$

$$= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C\,. \quad \blacksquare$$

Przykład 10.22

$\int \frac{dx}{2x-3} \xlongequal[dy=2dx]{y=2x-3} \int \frac{1}{y}\cdot\frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}\ln|y| + C = \frac{1}{2}\ln|2x-3| + C\,. \quad \blacksquare$

Przykład 10.23

$\int \frac{x}{x^2+3x+2}\,dx = \int \frac{x}{(x+1)(x+2)}\,dx\,.$

Można spodziewać się, że wyrażenie $\frac{x}{x^2+3x+2}$ jest sumą ułamków postaci $\frac{A}{x+1}$ i $\frac{B}{x+2}$. Aby równość $\frac{x}{x^2+3x+2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$ miała miejsce, musi być $x = A(x+2)+B(x+1)$ dla wszystkich liczb rzeczywistych $x \neq -1,\ -2$.♠ Wobec tego musi być $A+B=1$ i $2A+B=0$, więc $A=-1$ i $B=2$. Mamy więc

$\int \frac{x}{x^2+3x+2}\,dx = \int \frac{-1}{x+1}\,dx + \int \frac{2}{x+2}\,dx = -\ln|x+1| + 2\ln|x+2| + C = \ln\frac{(x+2)^2}{|x+1|} + C\,. \quad \blacksquare$

Metoda zasygnalizowana w przykładzie 10.23 to tzw. rozkład na ułamki proste. Polega ona na tym, że funkcję wymierną, czyli iloraz dwóch wielomianów przedstawiamy w postaci sumy wielomianu i ułamków prostych, tj. ułamków postaci $\frac{A}{(x+c)^n}$, gdzie $a, c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ lub postaci $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$, gdzie $A, B, p, q \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ oraz $p^2-4q<0$. Można wykazać, że taki rozkład funkcji wymiernej zawsze istnieje. Dowodu w tym wykładzie nie przedstawimy.[2] Pokażemy na kilku przykładach jak ta metoda działa. Autor nie sądzi, by studenci musieli ją opanować do perfekcji, powinni jednak zapoznać się z kilkoma przykładami, by nie wpadać w zdumienie, gdy ktoś będzie rozkładać funkcje wymierne na ułamki proste przy okazji ich całkowania, rozwijania w szereg potęgowy lub w innych przypadkach.

♠ W rzeczywistości ponieważ funkcje x oraz $A(x+2)+B(x+1)$ są ciągłe we wszystkich punktach, w tym w punkcie $x=-1$ i w punkcie $x=-2$, równość musi mieć miejsce również dla $x=-1,-2$.

[2] zob. G.M.Fichtenholz t. II.

Przykład 10.24

$\int \frac{x^3}{x^2+2x+2}\,dx = \int \frac{(x^2+2x+2)(x-2)+2x+4}{x^2+2x+2}\,dx = \int \left(x-2+\frac{2(x+2)}{x^2+2x+2}\right)dx =$
$= \frac{1}{2}x^2-2x+\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx+\int \frac{2}{x^2+2x+2}\,dx = \frac{1}{2}x^2-2x+\int \frac{(x^2+2x+2)'}{x^2+2x+2}\,dx +$
$+\int \frac{2}{(x+1)^2+1}\,d(x+1) \xlongequal[\text{przez podstawienia}]{\text{całkujemy}} \frac{1}{2}x^2-2x+\ln(x^2+2x+2)+2\,\mathrm{arctg}(x+1)+C\,.$

To wygląda trochę na stosowanie jakichś sztuczek. Tak jednak nie jest. Można było przewidzieć jak będą wyglądać ułamki proste, których sumą będzie dana funkcja wymierna. Stopień licznika jest o jeden większy niż stopień mianownika, więc powinien wystąpić wielomian stopnia pierwszego oraz ułamek, którego licznik jest wielomianem stopnia nie większego niż 1, a mianownik równy jest x^2+2x+2. Można więc było spróbować napisać $\frac{x^3}{x^2+2x+2} = ax+b+\frac{px+q}{x^2+2x+2}$. Po pomnożeniu przez mianownik otrzymujemy równość $x^3 = (ax+b)(x^2+2x+2)+px+q =$ $= ax^3+(2a+b)x^2+(2a+2b+p)x+(2b+q)$. Z równości wielomianów wynika równość ich współczynników przy odpowiednich potęgach zmiennej x. Muszą więc być spełnione równości $1=a$, $0=2a+b$, $0=2a+2b+p$ oraz $0=2b+q$. Otrzymaliśmy układ czterech równań z czterema niewiadomymi. Teraz trzeba go rozwiązać, co w tym przypadku nie stanowi żadnego problemu: $a+1$ $b=-2a=-2$, $p=-2a-2b=2$ i wreszcie $q=-2b=4$. Poźniej po prostu obliczyliśmy pochodną mianownika i zapisaliśmy licznik w postaci *stała · pochodna mianownika + inna stała*, co ułatwiło ostateczne obliczenie całki. ■

Przykład 10.25 Obliczymy $\int \frac{1}{1+x^4}\,dx$. Zaczniemy od rozkładu na ułamki proste. W tym celu przedstawimy mianownik w postaci iloczynu wielomianów stopnia nie większego niż 2. Mamy $x^4+1 = \left(x^2+1\right)^2-2x^2 = \left(x^2+1\right)^2-\left(x\sqrt{2}\right)^2 = = \left(x^2-x\sqrt{2}+1\right)\left(x^2+x\sqrt{2}+1\right)$. Teraz znajdziemy liczby rzeczywiste a, b, c i d, takie że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{ax+b}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{cx+d}{x^2+x\sqrt{2}+1}\,.$$

Mnożąc tę równość przez $1+x^4$, skracając co się tylko da i porządkując, otrzymujemy: $1 =$ $(ax+b)(x^2+x\sqrt{2}+1)+(cx+d)(x^2-x\sqrt{2}+1) =$
$= (b+d)+x(a+b\sqrt{2}+c-d\sqrt{2})+x^2\left(b+a\sqrt{2}+d-c\sqrt{2}\right)+x^3(a+c)\,.$

Porównując współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej x otrzymujemy

$$b+d=1\,,\quad a+c+(b-d)\sqrt{2}=0\,,\quad b+d+(a-c)\sqrt{2}=0\,,\quad a+c=0\,.$$

Otrzymaliśmy układ czterech równań z czterema niewiadomymi. Ponieważ $a+c=0$ (równanie czwarte), więc z drugiego równania możemy wywnioskować równość $b=d$, a z niej i z równania pierwszego wynika, że $b=d=\frac{1}{2}$. Z równania trzeciego i już uzyskanych wyników wynika, że $a=-c=\frac{-1}{2\sqrt{2}}$. Wobec tego mamy równość

$$\frac{1}{1+x^4}=\frac{\frac{-1}{2\sqrt2}x+\frac12}{x^2-x\sqrt2+1}+\frac{\frac{1}{2\sqrt2}x+\frac12}{x^2+x\sqrt2+1}\,.$$

Teraz wystarczy scałkować oba składniki. Scałkujemy drugi, bo ma lepszy wygląd zewnętrzny (mniej minusów). Mamy

$$\int\frac{\frac{1}{2\sqrt2}x+\frac12}{x^2+x\sqrt2+1}\,dx=\frac{\sqrt2}{8}\int\frac{2x+2\sqrt2}{x^2+x\sqrt2+1}\,dx=\frac{\sqrt2}{8}\int\frac{\left(x^2+x\sqrt2+1\right)'+\sqrt2}{x^2+x\sqrt2+1}\,dx=$$

$$=\frac{\sqrt2}{8}\int\frac{\left(x^2+x\sqrt2+1\right)'}{x^2+x\sqrt2+1}\,dx+\frac14\int\frac{1}{x^2+x\sqrt2+1}\,dx=$$

$$=\frac{\sqrt2}{8}\ln\left(x^2+x\sqrt2+1\right)+\frac14\int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{\sqrt2}\right)^2+\frac12}\,dx=$$

$$=\frac{\sqrt2}{8}\ln\left(x^2+x\sqrt2+1\right)+\frac14\int\frac{2}{\left(x\sqrt2+1\right)^2+1}\,dx=\frac{\sqrt2}{8}\ln\left(x^2+x\sqrt2+1\right)+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt2}\int\frac{1}{\left(x\sqrt2+1\right)^2+1}\,d(x\sqrt2+1)=\frac{\sqrt2}{8}\ln\left(x^2+x\sqrt2+1\right)+\frac{1}{2\sqrt2}\operatorname{arctg}\left(x\sqrt2+1\right)+C\,.$$

W taki sam sposób można obliczyć drugą całkę, ale nie warto, bowiem:

$$\int\frac{-\frac{1}{2\sqrt2}x+\frac12}{x^2-x\sqrt2+1}\,dx\ \frac{u=-x}{\overline{du=-dx}}\ \int\frac{\frac{1}{2\sqrt2}u+\frac12}{u^2+u\sqrt2+1}\,(-du)=$$

$$=-\frac{\sqrt2}{8}\ln\left(u^2+u\sqrt2+1\right)-\frac{1}{2\sqrt2}\operatorname{arctg}\left(u\sqrt2+1\right)+C=$$

$$=-\frac{\sqrt2}{8}\ln\left(x^2-x\sqrt2+1\right)-\frac{1}{2\sqrt2}\operatorname{arctg}\left(-x\sqrt2+1\right)+C=$$

$$=-\frac{\sqrt2}{8}\ln\left(x^2-x\sqrt2+1\right)+\frac{1}{2\sqrt2}\operatorname{arctg}\left(x\sqrt2-1\right)+C\,.$$

Dodając obliczone całki otrzymujemy

$$\int\frac{1}{1+x^4}\,dx=\frac{\sqrt2}{8}\ln\frac{x^2+x\sqrt2+1}{x^2-x\sqrt2+1}+\frac{1}{2\sqrt2}\Bigg(\operatorname{arctg}\left(x\sqrt2+1\right)+\operatorname{arctg}\left(x\sqrt2-1\right)\Bigg)+C\,.$$

Mamy wynik. Pokażemy teraz jak można go uzyskać nieco inaczej.

Zauważmy, że $\frac{1}{1+x^4}=\frac12\left(\frac{1-x^2}{1+x^4}+\frac{1+x^2}{1+x^4}\right)$. Wobec tego można obliczyć dwie całki: $\int\frac{1-x^2}{1+x^4}\,dx$ oraz $\int\frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx$. Można je oczywiście obliczyć rozkładając funkcje podcałkowe na ułamki proste, ale nie jest to konieczne. Zachodzą równości

$$\int\frac{1-x^2}{1+x^4}\,dx=\int\frac{\frac{1}{x^2}-1}{\frac{1}{x^2}+x^2}\,dx=-\int\frac{d(x+\frac1x)}{\left(x+\frac1x\right)^2-2}\ \frac{y=x+1/x}{\overline{dy=1-1/x^2}}\ -\int\frac{dy}{y^2-2}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt2}\int\left(\frac{1}{y+\sqrt2}-\frac{1}{y-\sqrt2}\right)dy=\frac{1}{2\sqrt2}\Big(\ln|y+\sqrt2|-\ln|y-\sqrt2|+C\Big)=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt2}\ln\left|\frac{y+\sqrt2}{y-\sqrt2}\right|+C=\frac{1}{2\sqrt2}\ln\left|\frac{x+\frac1x+\sqrt2}{x+\frac1x-\sqrt2}\right|+C=\frac{1}{2\sqrt2}\ln\frac{x^2+x\sqrt2+1}{x^2-x\sqrt2+1}+C\,.$$

Pierwsza całka została znaleziona. Teraz zajmiemy się drugą.

$$\int\frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx=\int\frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}+x^2}\,dx=\int\frac{d(x-\frac1x)}{\left(x-\frac1x\right)^2+2}\ \frac{y=x-1/x}{\overline{dy=1+1/x^2}}\ \int\frac{dy}{y^2+2}=$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)}{1+\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2} \xlongequal[dz=dy/(\sqrt{2})]{z=y/(\sqrt{2})} \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} z + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right) + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{x\sqrt{2}}\right) + C\,.$$

Wobec tego otrzymujemy $\int \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{x\sqrt{2}}\right) + C$.* Widzimy więc, że otrzymaliśmy wynik nieco inny niż poprzednio! Można jednak się przekonać, że jest to ten sam wynik. Wystarczy skorzystać z wzoru

$$\operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg} b = \operatorname{arctg}\left(\tfrac{a+b}{1-ab}\right)$$

— by przekonać się o jego prawdziwości wystarczy obliczyć wartość tangensa obu stron tej podejrzanej równości korzystając z wzoru na tangens sumy dwóch kątów a potem jeszcze trochę pomęczyć się z jej interpretacją np. dla $x=0$; wg drugiej wersji wzoru funkcja pierwotna w punkcie 0 określona nie jest, wg. pierwszej jest, z cytowanych twierdzeń ogólnych wynika, że powinna być określona na całej prostej. Pokazaliśmy więc dwie metody, otrzymaliśmy na tyle różnie wyglądające wyniki, że niewielu studentów pierwszego roku stwierdziłoby, że to w istocie rzeczy ten sam wynik różniący się jedynie zapisem. To dosyć częste zjawisko przy całkowaniu, więc je zasygnalizowaliśmy. ■

Przykład 10.26 Obliczymy całkę $\int \frac{x^5}{1+x^4}\,dx$. Można jak w przykładach poprzednich przedstawić funkcję podcałkową w postaci ułamków prostych, ale w tym konkretnym przypadku widać od razu prostszą metodę. Mamy bowiem

$$\int \frac{x^5}{1+x^4}\,dx \xlongequal[dy=2x\,dx]{y=x^2} \frac{1}{2}\int \frac{y^2}{1+y^2}\,dy = \frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+y^2}\right)dy =$$

$$= \frac{1}{2}\left(y - \operatorname{arctg} y\right) + C = \frac{1}{2}\left(x^2 - \operatorname{arctg} x^2\right) + C\,. \blacksquare$$

Przykład 10.27 Obliczymy całkę $\int e^{2x}\sin 3x\,dx$. Będziemy całkować przez części dwukrotnie.

$$\int e^{2x}\sin 3x\,dx = \frac{1}{2}\int \left(e^{2x}\right)'\sin 3x\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{1}{2}\int e^{2x}\left(\sin 3x\right)'\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{2}\int e^{2x}\cos 3x = \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{4}\int \left(e^{2x}\right)'\cos 3x\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{4}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{4}\int e^{2x}\left(\cos 3x\right)'\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{4}e^{2x}\cos 3x - \frac{9}{4}\int e^{2x}\sin 3x\,dx\,.$$

Udało nam się po kilku przekształceniach sprowadzić obliczanie całki $\int e^{2x}\sin 3x\,dx$ do obliczania tej samej całki! To nie jest bez sensu wbrew pozorom: *uzyskaliśmy równanie, w którym*

* Powinna wystąpić suma dwu stałych, ale to i tak jest dowolna stała, a raczej funkcja stała na każdym przedziale zawartym w dziedzinie, więc nie ma potrzeby zmieniać oznaczeń.

niewiadomą jest poszukiwana całka. Starczy je teraz rozwiązać. Otrzymujemy równość

$$\int e^{2x}\sin 3x\,dx = \frac{2}{13}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{13}e^{2x}\cos 3x + C$$

Stałej C w równaniu nie było, ale teraz musi się pojawić. Równość całek nieoznaczonych oznacza jedynie, że różnica między tymi funkcjami pierwotnymi jest funkcją lokalnie stałą, więc gdy wszystkie całki znajdują się po jednej stronie równości trzeba dopisać C po drugiej stronie tej równości. ■

Przykład 10.28

$\int\sqrt{4+x^2}\,dx \xlongequal[dx=2(1+\mathrm{tg}^{\,2}t)\,dt]{x=2\mathrm{tg}\,t} 2\int\sqrt{4+4\,\mathrm{tg}^2\,t}\cdot(1+\mathrm{tg}^2\,t)\,dt = 4\int\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)dt =$

$= 4\int\frac{1}{\cos^3 t}\,dt = 4\int\frac{\cos t}{\cos^4 t}\,dt = 4\int\frac{\cos t}{(1-\sin^2 t)^2}\,dt \xlongequal[dy=\cos t\,dt]{y=\sin t} 4\int\frac{dy}{(1-y^2)^2} =$

$= \int\left(\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1+y}\right)^2 dy = \int\left(\frac{1}{(1-y)^2}+2\frac{1}{1-y}\frac{1}{1+y}+\frac{1}{(1+y)^2}\right)dy =$

$= \int\left(\frac{1}{(1-y)^2}+\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{(1+y)^2}\right) =$

$= \int\Big((1-y)^{-2}+(1-y)^{-1}+(1+y)^{-1}+(1+y)^{-2}\Big)\,dy =$

$= (1-y)^{-1}-\ln|1-y|+\ln|1+y|-(1+y)^{-1}+C = \frac{2y}{1-y^2}+\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right|+C\,.$

Wypada powrócić do zmiennej x. Podstawialiśmy $x = 2\,\mathrm{tg}\,t$. Możemy oczywiście zakładać,że $|t|<\frac{\pi}{2}$, bowiem każda liczbę x można przedstawić w postaci $2\,\mathrm{tg}\,t$ wybierając liczbę t z przedziału $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. Ten wybór liczby t gwarantuje, że $\cos t>0$, z czego zresztą już raz skorzystaliśmy. Mamy więc $\frac{1}{\cos t} = \sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,t} = \sqrt{1+\frac{x^2}{4}} = =\frac{1}{2}\sqrt{4+x^2}$. Stąd wnioskujemy, że zachodzą równości

$$\frac{2y}{1-y^2} = \frac{2\sin t}{\cos^2 t} = 2\,\mathrm{tg}\,t\frac{1}{\cos t} = \frac{1}{2}\cdot x\cdot\sqrt{4+x^2}\,.$$

Mamy też

$\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = \ln\frac{1+y}{1-y} = \ln\frac{(1+y)^2}{1-y^2} = \ln\frac{(1+\sin t)^2}{\cos^2 t} = 2\ln\frac{1+\sin t}{\cos t} =$

$$= 2\ln\left(\frac{1}{\cos t}+\mathrm{tg}\,t\right) = 2\ln\left(\frac{\sqrt{4+x^2}}{2}+\frac{x}{2}\right).$$

Ostatecznie $\int\sqrt{4+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot x\cdot\sqrt{4+x^2}+2\ln\left(\frac{\sqrt{4+x^2}}{2}+\frac{x}{2}\right)+C$. Tę równość można uzyskać nieco szybciej stosując inne podstawienia (tzw. podstawienia Eulera), ale nie będziemy już tego robić. Ogólnie rzecz biorąc wyrażenia zawierające jeden pierwiastek kwadratowy z wielomianu pierwszego lub drugiego stopnia można scałkować stosując jakieś podstawienie trygonometryczne, jak w tym przykładzie, lub podstawienia Eulera, o których mówić tu nie będziemy lub też podstawienia hiperboliczne, którymi również nie będziemy się zajmować. To są zamienne metody. W niektórych sytuacjach jedne dają wynik szybciej niż inne, ale które to zależy od całkowanej funkcji. ■

Przykład 10.29 Obliczymy całkę $\int \frac{x^5}{x^4+x^2+1}\,dx$ dwiema metodami. Zaczniemy od rozkładu na ułamki proste. Wymaga to przedstwienia mianownika w postaci iloczynu wielomianów nierozkładalnych. Mamy

$$x^4+x^2+1=(x^2+1)^2-x^2=(x^2-x+1)(x^2+x+1)\,.$$

Spróbujemy znaleźć takie liczby A,B,C,D,E,F, że dla każdej liczby rzeczywistej x będzie zachodzić równość

$$\tfrac{x^5}{x^4+x^2+1}=\tfrac{x^5}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}=Ax+B+\tfrac{Cx+D}{x^2-x+1}+\tfrac{Ex+F}{x^2+x+1}\,.$$

Po pomnożeniu obu stron tej równości otrzymujemy wzór

$x^5=(Ax+B)(x^2-x+1)(x^2+x+1)+(Cx+D)(x^2+x+1)+(Ex+F)(x^2-x+1)=$
$=(Ax+B)(x^4+x^2+1)+(Cx+D)(x^2+x+1)+(Ex+F)(x^2-x+1)=$
$=Ax^5+Bx^4+(A+C+E)x^3+(B+C+D-E+F)x^2+(A+C+D+E-F)x+B+D+F\,.$

Szukamy liczb A,B,C,D,E,F takich, że $A=1$, $B=0$, $A+C+E=0$, $B+C+D-E+F=0$, $A+C+D+E-F=0$ i $B+D+F=0$, bo współczynniki przy tych samych potęgach x po obu stronach równości muszą być równe. Z trzeciej i z piątej równości wynika, że $D-F=0$, co w połączeniu z równością $B=0$ i $B+D+F=0$ daje $B=D=F=0$. Stąd i z czwartej równości otrzymujemy $C=E$, a ponieważ $C+E=-A=-1$, więc $C=E=-\frac12$. Mamy więc równość $\frac{x^5}{x^4+x^2+1}=x-\frac{x}{2(x^2-x+1)}-\frac{x}{2(x^2+x+1)}$. Mamy $\int x\,dx=\frac12x^2+C$. Mamy również $\int\frac{x}{2(x^2-x+1)}\,dx=\int\frac{x-\frac12}{2(x^2-x+1)}\,dx+\int\frac{1}{4(x^2-x+1)}\,dx=\int\frac{2x-1}{(2x-1)^2+3}\,dx+\int\frac{1}{(2x-1)^2+3}\,dx$. Ponieważ

$\int\frac{2x-1}{(2x-1)^2+3}\,dx \xlongequal[dy=4(2x-1)\,dx]{y=(2x-1)^2+3} \frac14\int\frac{dy}{y}=\frac14\ln|y|+C=\frac14\ln\big((2x-1)^2+3\big)+C=$

$=\frac14\ln(4x^2-4x+4)+C=\frac14\ln(x^2-x+1)+\frac14\ln4+C=\frac14\ln(x^2-x+1)+C_1$ oraz

$\int\frac{1}{(2x-1)^2+3}\,dx==\frac13\int\frac{1}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt3}\right)^2+1}\,dx \xlongequal[dy=\frac{2}{\sqrt3}\,dx]{y=\frac{2x-1}{\sqrt3}} =\frac{\sqrt3}{6}\int\frac{1}{1+y^2}\,dy=$

$=\frac{\sqrt3}{6}\operatorname{arctg}y+C=\frac{\sqrt3}{6}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt3}+C$, więc

$$\int\frac{x}{2(x^2-x+1)}\,dx=\frac14\ln(x^2-x+1)+\frac{\sqrt3}{6}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt3}+C\,.$$

Mamy zatem

$\int\frac{x}{2(x^2+x+1)}\,dx \xlongequal[dt=-\,dx]{t=-x} -\int\frac{(-t)}{2((-t)^2+(-t)+1)}\,dt=\int\frac{t}{2(t^2-t+1)}\,dt=$

$$=\tfrac14\ln\big(t^2-t+1\big)+\tfrac{\sqrt3}{6}\operatorname{arctg}\tfrac{2t-1}{\sqrt3}+C=\tfrac14\ln(x^2+x+1)+\tfrac{\sqrt3}{6}\operatorname{arctg}\tfrac{-2x-1}{\sqrt3}+C=$$
$$=\tfrac14\ln(x^2+x+1)-\tfrac{\sqrt3}{6}\operatorname{arctg}\tfrac{2x+1}{\sqrt3}+C\,.$$

Stąd wnioskujemy, że

$$\int \tfrac{x^5}{x^4+x^2+1}\,dx = \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{4}\ln(x^2-x+1) + \tfrac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\tfrac{2x-1}{\sqrt{3}} + \tfrac{1}{4}\ln(x^2+x+1) - \\ - \tfrac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\tfrac{2x+1}{\sqrt{3}} + C\,.$$

Tę samą całkę można obliczyć stosując nieco inną zamianę zmiennych, mianowicie $y=x^2$. Wtedy $dy = 2x\,dx$ i wobec tego

$$\int \tfrac{x^5}{x^4+x^2+1}\,dx = \tfrac{1}{2}\int \tfrac{y^2}{y^2+y+1}\,dy = \tfrac{1}{2}\int \left[1-\tfrac{y+1}{y^2+y+1}\right]dy = \tfrac{y}{2} - \tfrac{1}{2}\int \tfrac{y+1}{(y+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dy =$$
$$= \tfrac{y}{2} - \tfrac{1}{4}\int \tfrac{2y+1}{(y+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dy - \tfrac{1}{4}\int \tfrac{1}{(y+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dy = \tfrac{y}{2} - \tfrac{1}{4}\ln\left((y+\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{3}{4}\right) - \tfrac{1}{3}\int \tfrac{1}{1+(\frac{2y+1}{\sqrt{3}})^2}\,dy =$$
$$= \tfrac{y}{2} - \tfrac{1}{4}\ln\left(y^2+y+1\right) - \tfrac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\left(\tfrac{2y+1}{\sqrt{3}}\right)dy = \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{4}\ln(x^4+x^2+1) - \\ - \tfrac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\left(\tfrac{2x^2+1}{\sqrt{3}}\right) + C\,.$$

Otrzymaliśmy teraz wynik znacznie szybciej niż poprzednio i trochę krótszy. Oczywiście jest to ta sama funkcja tylko nieco inaczej zapisana. Mamy bowiem

$$\ln(x^2+x+1) + \ln(x^2-x+1) = \ln\left[(x^2+x+1)\cdot(x^2+x+1)\right] = \\ = \ln\left[(x^2+1)^2-x^2\right] = \ln[x^4+x^2+1] \text{ oraz}$$

$$\operatorname{tg}\left[\operatorname{arctg}\tfrac{2x-1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg}\tfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right] = \tfrac{\frac{2x-1}{\sqrt{3}}-\frac{2x+1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2x+1}{\sqrt{3}}} = \tfrac{-2\sqrt{3}}{3+4x^2-1} = -\tfrac{\sqrt{3}}{2x^2+1}\ ^{*}, \text{ więc}$$

$$\operatorname{tg}\left[\operatorname{arctg}\tfrac{2x-1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg}\tfrac{2x+1}{\sqrt{3}} + \tfrac{\pi}{2}\right] = -\operatorname{ctg}\left[\operatorname{arctg}\tfrac{2x-1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg}\tfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right] = \tfrac{2x^2+1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg}\left[\operatorname{arctg}\tfrac{2x^2+1}{\sqrt{3}}\right],$$

zatem $\operatorname{arctg}\tfrac{2x-1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg}\tfrac{2x+1}{\sqrt{3}} + \tfrac{\pi}{2} = \operatorname{arctg}\tfrac{2x^2+1}{\sqrt{3}}$. ■

Przykład 10.30 Obliczymy całkę $\int \frac{x+1}{(x^4+x^2+1)^2}$. Spróbujemy przedstawić funkcje w postaci sumy ułamków prostych. Zauważmy najpierw, że

$$x^4+x^2+1 = (x^2+1)^2 - x^2 = (x^2-x+1)(x^2+x+1)\,.$$

Oczywiście $x^4+x^2+1>0$ dla każdego $x\in\mathbb{R}$, więc wielomiany x^2+x+1 i x^2-x+1 nie mają pierwiastków rzeczywistych, zatem $x^2+x+1>0$ i $x^2-x+1>0$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Wobec tego istnieją takie stałe A,B,C,D,E,F,G,H, że zachodzi równość

$$\frac{x+1}{(x^4+x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2+x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1} + \frac{Ex+F}{(x^2-x+1)^2} + \frac{Gx+H}{x^2-x+1}\,.$$

Po przemnożeniu tej równości przez $(x^4+x^2+1)^2$ otrzymujemy

$$x+1 = (Ax+B)(x^2-x+1)^2 + (Cx+D)(x^2+x+1)(x^2-x+1)^2 + (Ex+F)(x^2+x+1)^2 + \\ + (Gx+H)(x^2-x+1)(x^2+x+1)^2 =$$
$$= (Ax+B)(x^4-2x^3+3x^2-2x+1) + (Cx+D)(x^2-x+1)(x^4+x^2+1) + \\ + (Ex+F)(x^4+2x^3+3x^2+2x+1) + (Gx+H)(x^2+x+1)(x^4+x^2+1) =$$
$$= \big((A+E)x+B+F\big)(x^4+3x^2+1) + 2\big((-A+E)x-B+F\big)(x^3+x) + \\ + \big((C+G)x^3 + (-C+D+G+H)x^2 + (C-D+G+H)x + (D+H)\big)(x^4+x^2+1) =$$

* bo $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$

$= (C+G)x^7 + (-C+D+G+H)x^6 + (A+E+C-D+G+H)x^5 +$
$+(B+F-2A+2E-C+D+G+H+D+H)x^4 + (3A+3E-2B+2F+C+G+C-D+G+H)x^3 +$
$+(3B+3F-2A+2E-C+D+G+H+D+H)x^2 + (A+E-2B+2F+C-D+G+H)x +$
$+(B+F+D+H)$.

Po lewej stronie nie występują $x^7, x^6, x^5 x^4, x^3, x^2$, zatem współczynniki przy tych potęgach zmiennej x po prawej stronie są równe 0, a współczynnik przy x oraz wyraz wolny są równe swym odpowiednikom po lewej stronie równości, więc są równe 1. Otrzymujemy więc następujący układ równań:

$0 = C + G$

$0 = -C + D + G + H = -2C + D + H$ — skorzystaliśmy już z pierwszego równania,

$0 = A + E + C - D + G + H = A + E - D + H = A + 2C - 2D + E$,

$0 = B+F-2A+2E-C+D+G+H+D+H = -2A+B+2C+2E+F = -4A+B-2C+4D+F$,

$0 = 3A + 3E - 2B + 2F + C + G + C - D + G + H = 2(A - B + E + F)$,

$0 = 3B + 3F - 2A + 2E - C + D + G + H + D + H = -2A + 3B + 2C + 2E + 3F$,

$1 = A + E - 2B + 2F + C - D + G + H = -2B + 2F$,

$1 = B + F + D + H = B + 2C + F$.

G i H występują tylko w dwóch pierwszych równaniach. Z ostatnich dwóch równań wynika, że $F = B + \frac{1}{2}$ oraz
$C = \frac{1}{2}(1 - B - F) = \frac{1}{2}(1 - 2B - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - B$. Z trzeciego równania otrzykujemy teraz $E = -A + 2B + 2D - \frac{1}{2}$. Czwarte można przepisać tak:
$0 = -4A + B - \frac{1}{2} + 2B + 4D + B + \frac{1}{2} = -4A + 4B + 4D$, więc $A = B + D$. Kolej na piąte
$0 = A - B - A + 2B + 2D - \frac{1}{2} + B + \frac{1}{2} = 2D + 2B$, więc $D = -B$ i $A = 0$. Teraz szóste
$0 = -2A + 3B + \frac{1}{2} - 2B - 2A - 1 + 3B + \frac{3}{2} = 4B + 1$, zatem $B = -\frac{1}{4}$. Stąd $F = \frac{1}{4}$, $C = \frac{1}{2}$, $D = \frac{1}{4}$, $E = -\frac{1}{2}$, $G = -C = -\frac{1}{2}$, $H = 2C - D = \frac{3}{4}$. Udowodniliśmy zatem, że

$$\frac{x+1}{(x^4+x^2+1)^2} = \frac{-1}{4(x^2+x+1)^2} + \frac{2x+1}{4(x^2+x+1)} + \frac{-2x+1}{4(x^2-x+1)^2} + \frac{-2x+3}{x^2-x+1}. \qquad (*)$$

Równość $(*)$ można uzasadnić prościej, co pokażemy jeszcze przed scałkowaniem otrzymanych ułamków prostych.

Mamy $\frac{1}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)} = \frac{x+1}{2(x^2+x+1)} - \frac{x-1}{2(x^2-x+1)}$ — tę równość można uzyskać pisząc $\frac{1}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)} = \frac{\alpha x+\beta}{x^2+x+1} + \frac{\gamma x+\delta}{x^2-x+1} = \frac{(\alpha x+\beta)(x^2-x+1)+(\gamma x+\delta)(x^2+x+1)}{x^2+x+1} =$
$= \frac{(\alpha+\gamma)x^3+(-\alpha+\beta+\gamma+\delta)x^2+(\alpha-\beta+\gamma+\delta)x+(\beta+\delta)}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}$

i rozwiązując układ równań:

$0 = \alpha + \gamma$, $\quad 0 = -\alpha + \beta + \gamma + \delta$, $\quad 0 = \alpha - \beta + \gamma + \delta$, $\quad 1 = \beta + \delta$.

Prawie natychmiast dostajemy $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \gamma = \delta = \frac{1}{2}$.

Można również postąpić tak $\frac{1}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)} = \frac{x^3+1-(x^3-1)}{2(x^2-x+1)(x^2+x+1)} =$
$= \frac{x^3+1}{2(x^2-x+1)(x^2+x+1)} - \frac{x^3-1}{2(x^2-x+1)(x^2+x+1)} = \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{2(x^2-x+1)(x^2+x+1)} - \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{2(x^2-x+1)(x^2+x+1)} =$
$= \frac{x+1}{2(x^2+x+1)} - \frac{x-1}{2(x^2-x+1)}$ — wymaga to pamiętania wzoru $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$.

Z otrzymanej równości wynika też
$\frac{x+1}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)} = \frac{(x+1)^2}{2(x^2+x+1)} - \frac{x^2-1}{2(x^2-x+1)} = \frac{x^2+x+1+x}{2(x^2+x+1)} - \frac{x^2-x+1+x-2}{2(x^2-x+1)} = \frac{x}{2(x^2+x+1)} - \frac{x-2}{2(x^2-x+1)}$.

Mnożymy uzyskaną równość stronami przez $\frac{1}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)} = \frac{x+1}{2(x^2+x+1)} - \frac{x-1}{2(x^2-x+1)}$ i przekształcamy korzystając z otrzymanych przed chwilą wzorów:
$\frac{x+1}{(x^2-x+1)^2(x^2+x+1)^2} = \left(\frac{x+1}{2(x^2+x+1)} - \frac{x-1}{2(x^2-x+1)}\right)\left(\frac{x}{2(x^2+x+1)} - \frac{x-2}{2(x^2-x+1)}\right) =$
$= \frac{x^2+x}{4(x^2+x+1)^2} + \frac{x^2-x-2x+2}{4(x^2-x+1)^2} - \frac{x^2-x+x^2+x-2x-2}{4(x^2-x+1)(x^2+x+1)} =$
$= \frac{1}{4(x^2+x+1)} - \frac{1}{4(x^2+x+1)^2} + \frac{1}{4(x^2-x+1)} - \frac{2x-1}{4(x^2-x+1)^2} - \frac{2x^2-2x+2-4}{4(x^2-x+1)(x^2+x+1)} =$
$= \frac{-1}{4(x^2+x+1)} - \frac{1}{4(x^2+x+1)^2} + \frac{1}{4(x^2-x+1)} - \frac{2x-1}{4(x^2-x+1)^2} + \frac{1}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)} =$
$= \frac{-1}{4(x^2+x+1)} - \frac{1}{4(x^2+x+1)^2} + \frac{1}{4(x^2-x+1)} - \frac{2x-1}{4(x^2-x+1)^2} + \frac{x+1}{2(x^2+x+1)} - \frac{x-1}{2(x^2-x+1)} =$
$= \frac{2x+1}{4(x^2+x+1)} - \frac{1}{4(x^2+x+1)^2} + \frac{-2x+3}{4(x^2-x+1)} - \frac{2x-1}{4(x^2-x+1)^2}$.
Autor tego tekstu woli drugą z przedstawionych metod postępowania, ale zdaje sobie sprawę z tego, że dla osób, które mają niewielką wprawę w przekształceniach algebraicznych, może być ona trudna.

Pozostało scałkować otrzymane wyrażenie. Mamy kolejno
$\int \frac{2x+1}{4(x^2+x+1)}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{4}\ln(x^2+x+1) + \text{const}$,
$\int \frac{-2x+3}{4(x^2-x+1)}\,dx = -\frac{1}{4}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx = -\frac{1}{4}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx =$
$= -\frac{1}{4}\ln(x^2-x+1) + \frac{2}{3}\int \frac{1}{\frac{4}{3}\cdot(x-\frac{1}{2})^2+1}\,dx = -\frac{1}{4}\ln(x^2-x+1) + \frac{2}{3}\int \frac{1}{1+(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})^2}\,dx =$
$= -\frac{1}{4}\ln(x^2-x+1) + \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \text{const} = -\frac{1}{4}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \text{const}$,
$\int \frac{2x-1}{4(x^2-x+1)^2}\,dx = \frac{1}{4}\int (x^2-x+1)'\cdot(x^2-x+1)^{-2}\,dx = -\frac{1}{4}(x^2-x+1)^{-1} + \text{const} = \frac{-1}{4(x^2-x+1)} + \text{const}$,

$\int \frac{1}{4(x^2+x+1)^2}\,dx = \int \frac{1}{4((x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4})^2}\,dx = \frac{4}{9}\int \frac{1}{(1+\frac{4}{3}(x+\frac{1}{2})^2)^2}\,dx = \frac{4}{9}\int \frac{1}{(1+(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2)^2}\,dx \;\overset{u=\frac{2x+1}{\sqrt{3}}}{\underset{du=\frac{2}{\sqrt{3}}\,dx}{=\!=\!=}}$

$= \frac{4}{9}\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{1}{(1+u^2)^2}\,du = \frac{2}{3\sqrt{3}}\int\left(\frac{1}{1+u^2} - \frac{u^2}{(1+u^2)^2}\right)du = \frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}u + \frac{1}{3\sqrt{3}}\int u((1+u^2)^{-1})'\,du =$
$= \frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}u + \frac{1}{3\sqrt{3}}\left(u(1+u^2)^{-1} - \int \frac{1}{1+u^2}\,du\right) = \frac{1}{3\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}u + \frac{u}{1+u^2}\right) + \text{const} =$
$= \frac{1}{3\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{\frac{2x+1}{\sqrt{3}}}{1+(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2}\right) + \text{const} = \frac{1}{3\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{(2x+1)\sqrt{3}}{4(x^2+x+1)}\right) + \text{const}$.

Obliczyliśmy wszystkie cztery całki, więc możemy napisać
$\frac{x+1}{(x^4+x^2+1)^2} = \frac{1}{4}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{(2x+1)\sqrt{3}}{4(x^2+x+1)}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \text{C}$.

Wafrto przyjrzeć się tym obliczeniom, by zrouzmieć sposób postępowania, choć całki z którymi spotkają się studenci na kolokwiach lub egzaminach będą prostsze. ■

Na tym przykładzie kończymy demonstracje metod całkowania. Podkreślić należy, że dalecy jesteśmy od wyczerpania tematu, ale student powinien raczej wiedzieć, że są całki, których obliczenie może zlecić komputerowi (o ile wzmiankowane urządzenie jest wyposażone w odpowiedni program). Może też, w razie potrzeby, posłużyć się tablicami, jeśli nie lubi komputerów i wreszcie może skontaktować się z jakimś matematykiem, który umie obliczać całki. Niewątpliwie należy umieć stosować twierdzenie o zamianie zmiennych i twierdzenie o całkowaniu przez części (bez pomocy sprzętu elektronicznego lub tablic). Na zakończenie kilka zadań.

ZADANIA

7.01 Obliczyć $\int f(x)dx$, jeśli $f(x) =$

a. $(1-x)(1-2x)(1-3x)$ **b.** $\frac{x+1}{\sqrt{x}}$ **c.** $\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}$

d. $(1-\frac{1}{x^2})\sqrt{x\sqrt{x}}$ **e.** $\left(\frac{x-1}{x}\right)^2$ **f.** $\frac{2^{x+1}-5^{x+1}}{10^x}$

g. $\frac{e^{3x}+1}{e^x+1}$ **h.** $\frac{x^2+3}{x^2-1}$ **i.** $\left(2^x+3^x\right)^2$

j. $\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}$ **k.** $\frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x}\,dx$ **l.** $\frac{1}{1+9x^2}$

ł. $\frac{1}{2-3x^2}$ **m.** $\frac{1}{2-3x}\,dx$ **n.** $\frac{1}{3x^2-2}$

o. $\frac{x^3}{x^8-2}$ **ó.** $\frac{x}{x^4+1}\,dx$ **p.** xe^{-x^2}

r. $\frac{e^x}{2+e^x}$ **ś.** $\sin^5 x\cos x$ **t.** $\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$

u. $\frac{x^2}{(1-x)^{100}}$ **v.** $\frac{x^3}{3+x}$ **w.** $\frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)}$

x. $\frac{1}{(x^2-2)(x^2+3)}$ **y.** $\frac{1}{x^4+1}$ **z.** $\frac{1}{e^x+1}$

7.02 Obliczyć $\int f(x)dx$, jeśli $f(x) =$

a. $x+3x^2-12x^4$ **b.** $x(1+x^2)^4$ **c.** e^{2x}

d. $\sin 3x$ **e.** $x\sin(x^2)$ **f.** $\frac{1}{1+4x^2}$

g. $\frac{x}{1+4x^2}$ **h.** $\frac{1}{1+3x^2}$ **i.** $\frac{1}{2+3x^2}$

j. $\frac{x^2+2x-2}{2+3x^2}$ **k.** $\operatorname{tg} x$ **l.** $\frac{1}{1+2x}$

m. $\frac{x}{1+2x}$ **n.** $\frac{x^2+2x+3}{x+2}$ **o.** $\frac{1}{(x+1)(x-2)}$

p. $\frac{x}{(x+1)(x-2)}$ **q.** $\sin x\cos x$ **r.** $\frac{e^x}{1+e^x}$

s. $x^2\sqrt{x^3-1}$ **t.** $e^{\sqrt{x}}$ **u.** $x\sin 2x$

v. $x^2\sin x$ **w.** xe^x **x.** x^2e^{2x}

y. $\operatorname{arctg} x$ **z.** $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ **ż.** $\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$

ź. $\sin^3 x$ α. $\frac{1}{\sin^2 x}$ β. $\cos x\cdot e^{\sin x}$

γ. $\frac{\ln x}{x}$ δ. $e^x\sin x$ ε. $e^{2x}\sin 5x$

7. 03 Obliczyć pole obszaru ograniczonego przez wykresy funkcji:

a. $f(x) = x^2$ i $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$,

b. $f(x) = x^2$ i $g(x) = -x^2$ oraz proste $x = -1$, $x = 1$,

c. $f(x) = x^2$ i $g(x) = 1 - x^2$,

d. $f(x) = x^2$, $g(x) = 1 - x^2$ i $h(x) = 2$,

e. $f(x) = x^2$ i $g(x) = x^2 - 2x + 4$ oraz oś OY,

f. $f(x) = \sqrt{x}$ i $g(x) = 0$ oraz prostą $x = 2$,

g. $f(x) = x^2$ oraz parabolę $x = y^2$,

h. $f(x) = x \sin 4x$ i $g(x) = 0$ oraz prostą $x = \frac{\pi}{8}$,

i. $F(y) = \frac{1}{2}y^2$ i okręgiem o równaniu $x^2 + y^2 - 4x = 0$.

7. 04 **a.** Obliczyć $\int \sqrt{x^2 - 1}\,dx$.

b. Załóżmy, że $w \geq 1$. Znaleźć pole obszaru $\{(x,y)\colon\quad y^2 \leq x^2 - 1 \text{ i } 1 \leq x \leq w\}$.

c. Niech t oznacza pole obszaru $\{(x,y)\colon\quad \max(0, x^2-1) \leq wy \leq x\sqrt{w^2-1}\}$, tzn. obszaru ograniczonego prostymi $y = \frac{\sqrt{w^2-1}}{w}x$, $y = -\frac{\sqrt{w^2-1}}{w}x$ i łukiem krzywej $x^2 - y^2 = 1$, którego rzutem na oś OX jest przedział $1 \leq x \leq w$. Wykazać, że $w = \frac{1}{2}\big(e^t + e^{-t}\big)$ oraz $\sqrt{w^2-1} = \frac{1}{2}\big(e^t - e^{-t}\big)$.

Uwaga: funkcje zdefiniowane wzorami $\cosh t = \frac{1}{2}\big(e^t + e^{-t}\big)$ *i* $\sinh t = \frac{1}{2}\big(e^t - e^{-t}\big)$ *nazywane są kosinusem i sinusem hiperbolicznym liczby* t. *Jeśli* $0 < t < \pi$, *to pole wycinka koła o środku* $(0,0)$ *i promieniu* 1 *opartego tym łuku o końcach* $\big(\cos t, \sin t\big)$ *i* $\big(\cos(-t), \sin(-t)\big)$, *który zawiera punkt* $(1,0)$ *jest równe* t. *Widać więc pewną analogię między kosinusem i sinusem z jednej strony i kosinusem hiperbolicznym i sinusem hiperbolicznym z drugiej strony: zamiast okręgu* $x^2 + y^2 = 1$ *mamy do czynienia z hiperbolą* $x^2 - y^2 = 1$.