Pochodne wyższych rzędów

Ostatnie zmiany wprowadzono 5 lutego 2017, godz. 17:45.

Podstawowe definicje i twierdzenia

W wielu przypadkach dochodzi do obliczania pochodnej funkcji, która sama jest pochodną. Przydatne jest to np. wtedy, gdy trzeba ustalić jakie własności ma funkcja. Przyjmuje się następujące określenie.

Definicja 7.1 (pochodnej wyższego rzędu)
Niech f będzie funkcją określoną na zbiorze zawierającym przedział otwarty I zawierający punkt p. Niech $f^{(0)}(x) = f(x)$ dla każdego x z dziedziny funkcji f. Załóżmy, że funkcja f ma pochodną $(n-1)$–ego rzędu $f^{(n-1)}$ w każdym punkcie przedziału I. Jeśli funkcja $f^{(n-1)}$ ma w punkcie p pochodną $\left(f^{(n-1)}\right)'(p)$, to tę pochodną nazywamy *pochodną n–tego rzędu funkcji f w punkcie p* i oznaczamy symbolem $f^{(n)}(p)$. Jeśli pochodna n–tego rzędu jest *skończona*, to mówimy, że funkcja f jest *n–krotnie różniczkowalna* w tym punkcie. ■

Jest jasne, że $f' = f^{(1)}$. Zamiast pisać $f^{(2)}$ piszemy na ogół f''. Niektórzy matematycy zamiast $f^{(3)}$ piszą f'''.

Przykład 7.1 Niech $f(x) = ax+b$. Wtedy dla każdego x mamy $f'(x) = a$, więc $f''(x) = 0$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Wobec tego również $f^{(3)}(x) = 0$, a stąd wynika, że również $f^{(n)}(x) = 0$ dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ i każdej liczby rzeczywistej x. ■

Przykład 7.2 Niech $f(x) = ax^2 + bx + c$. Wtedy $f'(x) = 2ax + b$, wobec tego $f''(x) = 2a$ i wobec tego dla każdej liczby naturalnej $n > 2$ i każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $f^{(n)}(x) = 0$. ■

Przykład 7.3 Niech f będzie wielomianem stopnia m, tzn. istnieją liczby rzeczywiste a_0, $a_1, \ldots, a_m$, przy czym $a_m \neq 0$, takie że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m$. Wtedy $f^{(m)}(x) = m!a_m$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$ oraz $f^{(n)}(x) = 0$ dla każdej liczby naturalnej $n > m$ i każdej liczby rzeczywistej x.
Twierdzenie to wykazaliśmy już w przypadku $m = 1, 2$. Załóżmy, że jest ono prawdziwe dla wszystkich wielomianów stopnia *mniejszego* niż m. Równość

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 + \cdots + ma_mx^{m-1}x$$

zachodzi dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Ponieważ f' jest wielomianem stopnia $m-1$, więc $(f')^{(m-1)}(x) = (m-1)! \cdot ma_m$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Ponieważ $(f')^{(m-1)} = f^{(m)}$ oraz $(m-1)! \cdot m = m!$, więc dla każdej liczby rzeczywistej x

mamy $f^{(m)}(x) = m!a_m$. Stąd oczywiście wynika, że jeśli $n > m$ jest liczbą naturalną, to $f^{(n)}(x) = 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. ■

Przykład 7.4 Niech $f(x) = e^x$. Wtedy $f^{(1)}(x) = f'(x) = e^x$. Wobec tego dla każdej liczby naturalnej n i każdej rzeczywistej x zachodzi równość $f^{(n)}(x) = e^x$. ■

Przykład 7.5 Niech $f(x) = \sin x$. Wtedy $f^{(1)}(x) = f'(x) = \cos x$. Zatem $f^{(2)}(x) = f''(x) = -\sin x = -f(x)$. Stąd wynika, że $f^{(3)}(x) = -f'(x) = -\cos x$ oraz $f^{(4)}(x) = -f''(x) = \sin x$. Jasne jest, że od tego momentu będą się kolejno pojawiać, $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$ i znów $\sin x$ itd. Można więc napisać $f^{(2n)}(x) = (-1)^n \sin x$ oraz $f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos x$ dla dowolnego $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ i $x \in \mathbb{R}$. ■

Przykład 7.6 Podobnie jak w poprzednim przykładzie możemy wykazać, że $(\cos x)^{(2n)} = (-1)^n \cos x$ oraz $(\cos x)^{(2n+1)} = (-1)^{n+1} \sin x$. ■

Przykład 7.7 Niech $f(x) = \ln x$. Zachodzi równość $f^{(1)}(x) = f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$. Wobec tego $f^{(2)}(x) = f''(x) = \left(x^{-1}\right)' = (-1)x^{-1-1} = -x^{-2}$. Następnie otrzymujemy $f^{(3)}(x) = \left(-x^{-2}\right) = 2x^{-3}$, potem $f^{(4)}(x) = 2(-3)x^{-4} = -3!x^{-4}$. Analogicznie $f^{(5)}(x) = 4!x^{-5}$ itd. Ogólnie $f^{(n)}(x) = (\ln(x))^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$ dla każdej liczby całkowitej $n \geq 1$ i każdej liczby rzeczywistej x. ■.

Przykład 7.8 Obliczymy kilka pochodnych funkcji tangens. Mamy $(\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x$. Wobec tego zachodzi równość

$$(\operatorname{tg} x)'' = \left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right)' = 2 \operatorname{tg} x(1 + \operatorname{tg}^2 x) = 2(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x)$$

– skorzystaliśmy z wzoru na pochodną funkcji złożonej. Stąd

$(\operatorname{tg} x)^{(3)} = 2(1 + 3\operatorname{tg}^2 x)(1 + \operatorname{tg}^2 x) = 2(1 + 4\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg}^4 x)$, a stąd

$(\operatorname{tg} x)^{(4)} = 2(8\operatorname{tg} x + 12\operatorname{tg}^3 x)(1 + \operatorname{tg}^2 x) = 8(2\operatorname{tg} x + 5\operatorname{tg}^3 x + 3\operatorname{tg}^5 x)$.

Te obliczenia można kontynuować, jednak w tym przypadku nie da się napisać równie prosto jak w poprzednich przypadkach ogólnego wzoru na n–tą pochodna funkcji. ■

Przykład 7.9 Znajdziemy wzór na n–tą pochodną funkcji $\frac{x}{x^2+5x+6} = \frac{3}{x+3} - \frac{2}{x+2}$. W tym celu wystarczy znaleźć n–tą pochodną funkcji postaci $\frac{1}{x+c}$. Zachodzi równość $\left(\frac{1}{x+c}\right)' = -(x+c)^{-2}$. Stąd wynika, że $\left(\frac{1}{x+c}\right)'' = -(-2)(x+c)^{-2-1} = 2(x+c)^{-3}$. Rozumując dalej w taki sam sposób otrzymujemy kolejną równość

$$\left(\tfrac{1}{x+c}\right)^{(3)} = -6(x+c)^{-4} = -3!(x+c)^{-4}.$$

Bez żadnych trudności piszemy wzór ogólny na n–tą pochodną tej funkcji:

$$\left(\tfrac{1}{x+c}\right)^{(n)} = (-1)^n n!(x+c)^{-n-1}.$$

Stąd wynika już od razu, że $\left(\frac{x}{x^2+5x+6}\right)^{(n)} = (-1)^n n!\left(3(x+3)^{-n-1} - 2(x+2)^{-n-1}\right)$.

Bez rozłożenia na czynniki mianownika, a potem przedstawienia funkcji w postaci różnicy dwu ułamków nasze szanse na sukces byłyby mniejsze. ■

Przykład 7.10 Wykazaliśmy poprzednio, że jeśli funkcja jest różniczkowalna na pewnym *przedziale* i jej pochodna jest na tym przedziale równa 0, to funkcja ta jest stała. Załóżmy teraz, że $f''(x) = 0$ dla wszystkich $x \in (a,b)$, dla pewnych $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$. Wtedy na mocy poprzednio wykazanego stwierdzenia funkcja f' jest stała na przedziale (a,b). Niech $f'(x) = A$ dla wszystkich $x \in (a,b)$. Niech $g(x) = f(x) - Ax$. Zachodzi oczywista równość $g'(x) = 0$ dla każdej liczby $x \in (a,b)$. Wobec tego g jest funkcją stałą. Oznaczając jej jedyną wartość przez B otrzymujemy równość $B = g(x) = f(x) - Ax$. Stąd od razu wynika, że $f(x) = Ax + B$ dla każdej liczby $x \in (a,b)$. Wykazaliśmy więc, że jeśli druga pochodna jest tożsamościowo równa 0, to funkcja jest wielomianem stopnia nie większego niż 1.

Podobnie można wykazać, że jeśli trzecia pochodna jest tożsamościowo równa 0 na pewnym przedziale, to funkcja jest na tym przedziale wielomianem stopnia nie większego niż 2. Jeśli bowiem $f^{(3)}(x) = 0$ dla każdego $x \in (a,b)$, to na mocy poprzedniego stwierdzenia funkcja f' jest wielomianem postaci $Ax + B$. Bez trudu zgadujemy, że $\left(\frac{1}{2}Ax^2 + Bx\right)' = Ax + B$. Stąd wynika, że $\left(f(x) - \frac{1}{2}Ax^2 - Bx\right)' = 0$ dla wszystkich $x \in (a,b)$. Wobec tego funkcja $f(x) - \frac{1}{2}Ax^2 - Bx$ jest stała, co kończy dowód tego, że f jest wielomianem, którego stopień jest mniejszy niż 3. Jest całkowicie jasne, że kontynuując to rozumowanie wykażemy, że jeśli n–ta pochodna pewnej funkcji jest równa 0 w każdym punkcie pewnego przedziału, to funkcja ta na tym przedziale jest wielomianem, którego stopień jest mniejszy niż n. ■

Przykład 7.11 Załóżmy, że f jest funkcją różniczkowalną na pewnym przedziale oraz że dla pewnej liczby rzeczywistej k równość $f'(x) = kf(x)$ zachodzi dla wszystkich x. Wykazaliśmy w poprzednim rozdziale (twierdzenie o wzroście wykładniczym), że w tej sytuacji istnieje stała $C \in \mathbb{R}$, taka że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $f(x) = Ce^{kx}$. Przypomnijmy, że w celu uzyskania tej równości starczy wykazać, że iloraz $\frac{f(x)}{e^{kx}}$ jest funkcja stałą, czyli że pochodna tego ilorazu jest wszędzie równa 0. Mamy $\left(\frac{f(x)}{e^{kx}}\right)' = \frac{f'(x)e^{kx} - ke^{kx}f(x)}{e^{2kx}} = \frac{f'(x) - kf(x)}{e^{kx}} = 0$ — ostatnia równość wynika z założenia o funkcji f. Wykazaliśmy więc, że iloraz jest funkcją stałą. Tę stałą oznaczamy przez C. Jasne jest, że $f(x) = Ce^{kx}$.

Rozważymy teraz nieco bardziej skomplikowaną zależność. Mianowicie założymy, f jest funkcją dwukrotnie różniczkowalną w każdym punkcie prostej * oraz że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $f''(x) = f(x)$. Bez trudu można podać dwa

* Nie jest istotne, że dziedziną jest prosta, może być dowolny przedział.

przykłady funkcji spełniających to równanie: $g(x) = e^x$ oraz $h(x) = e^{-x}$. Mając dwa, można ich podać o nieskończenie wiele. Jeśli c, d są dowolnymi liczbami rzeczywistymi, to funkcja $cg(x) + dh(x) = ce^x + de^{-x}$ również spełnia to równanie. Jasne jest, że również funkcja $u(x) = f(x) - cg(x) - dh(x)$ spełnia to równanie. Liczby c i d można dobrać w ten sposób, że $u(0) = 0 = u'(0)$ – wystarczy rozwiązać układ równań: $f(0) = c + d$, $f'(0) = c - d$ traktując c i d jako niewiadome, a $f(0)$ i $f'(0)$ jako dane liczby. Otrzymujemy $c = \frac{f(0)+f'(0)}{2}$ oraz $d = \frac{f(0)-f'(0)}{2}$. Poszukujemy więc dwukrotnie różniczkowalnej funkcji u, takiej że dla każdego x zachodzi równość $u''(x) = u(x)$ oraz $u'(0) = 0 = u(0)$. Wykażemy, że u jest funkcją zerową. Zauważmy najpierw, że $u''u' = uu'$, i wobec tego $\left(\frac{1}{2}(u')^2\right)' = \left(\frac{1}{2}u^2\right)'$. Stąd wynika, że funkcja $(u')^2 - u^2$ ma zerową pochodną, więc jest stała. Ponieważ $(u'(0))^2 - u(0)^2 = 0$, więc funkcja $(u')^2 - u^2$ jest zerowa, czyli $u'(x)^2 = u(x)^2$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Załóżmy, że funkcja u przyjmuje w pewnym punkcie p wartość różną od 0. Są dwie możliwości: $u'(p) = u(p) \neq 0$, $u'(p) = -u(p) \neq 0$. Ponieważ obie funkcje u i u' są ciągłe, więc w pierwszym przypadku równość $u'(x) = u(x)$ zachodzi dla wszystkich x dostatecznie bliskich p, zaś w drugim przypadku dla wszystkich x dostatecznie bliskich p zachodzi równość $u'(x) = -u(x)$. *Dostatecznie bliskich* oznacza w tym przypadku dla wszystkich x z pewnego przedziału otwartego I zwierającego punkt p, na którym funkcja u nie ma pierwiastków. Z pierwszej równości wynika, że istnieje stała C, taka że $u(x) = Ce^x$ dla wszystkich x z przedziału I. Z drugiej równości wynika istnienie stałej C, takiej że dla wszystkich x z przedziału I zachodzi równość $u(x) = Ce^{-x}$. Można założyć, że I jest maksymalnym przedziałem, który zawiera punkt p i w którym funkcja u nie ma pierwiastków. Oczywiście 0 nie leży w przedziale I. Wobec tego między p i 0 leży koniec q przedziału I, drugi koniec przedziału I znajduje się po przeciwnej stronie punktu p i nie jest wykluczone, że jest nieskończonością. Jest jasne, że $u(q) = 0$ – gdyby tak nie było, to przedział I sięgałby poza q. Ponieważ funkcja u jest ciągła i na przedziale I obowiązuje wzór $u(x) = Ce^x$ lub wzór $u(x) = Ce^{-x}$, więc w punkcie q mamy $u(q) = Ce^{\pm x}$. Jednocześnie $u(q) = 0$. Z dwóch ostatnich stwierdzeń wynika, że $C = 0$, a to oznacza, że wbrew uczynionemu założeniu $Ce^{\pm p} = u(p) = 0$. Wykazaliśmy więc, że u jest funkcją zerową, a to oznacza, że funkcja f jest postaci $ce^x + de^{-x}$. ■

Przykład 7.12 Wykazaliśmy poprzednio, że jeśli spełniona jedna z równości $f^{(n)}(x) = 0$, $f'(x) = kf(x)$, $f''(x) = f(x)$ spełniona jest w każdym punkcie pewnego przedziału, to funkcja f wyraża się prostym wzorem. Omówimy jeszcze jeden przykład tego typu. Załóżmy mianowicie, że dla wszystkich punktów pewnego przedziału I spełniona jest zależność $f''(x)=-f(x)$.* Wykażemy, że wtedy istnieją takie liczby $a,b\in\mathbb{R}$, że dla każdej liczby $x\in I$ zachodzi równość $f(x)=a\cos x+b\sin x$. Niech p oznacza dowolny punkt przedziału I. Jasne jest, że w każdym punkcie przedziału I zachodzi równość $(a\cos x+b\sin x)''=-(a\cos x+b\sin x)$, tzn. funkcja postaci $a\cos x+b\sin x$ spełnia rozpatrywane równanie. Wybierzemy liczby a i b tak, by miały miejsce równości $f(p)=a\cos p+b\sin p$ oraz $f'(p)=-a\sin p+b\cos p$, tzn. $a=f(p)\cos p-f'(p)\sin p$ oraz $b=f(p)\sin p+f'(p)\cos p$. Zdefiniujmy pomocniczą funkcję $u(x)=f(x)-a\cos x-b\sin x$. Jest jasne, że $u''(x)=-u(x)$ dla każdej liczby $x\in I$ oraz że $u(p)=0=u'(p)$. Stąd wynika, że

$$\big((u'(x))^2+(u(x))^2\big)'=2\left(u''(x)u'(x)+u'(x)u(x)\right)=0,$$

więc funkcja $(u'(x))^2+(u(x))^2$ jest stała na przedziale I, zatem

$$(u'(x))^2+(u(x))^2=(u'(p))^2+(u(p))^2=0 \text{ dla każdego } x\in I.$$

Suma *kwadratów* liczb rzeczywistych jest równa 0 wtedy i tylko wtedy, gdy obie te liczby są zerami. Wobec tego dla każdego $x\in I$ zachodzi równość $u(x)=0$, a zatem $f(x)=a\cos x+b\sin x$ dla każdego $x\in I$. Okazało się, że również w tym przypadku można łatwo opisać wszystkie funkcje spełniające równanie $f''=-f$. Tego typu równania nazywane są równaniami różniczkowymi. Istnieje obszerna teoria równań różniczkowych. Zajmiemy się takimi równaniami nieco dokładniej w drugim semestrze. Ich znaczenie np. dla fizyki trudno przecenić, np. stosując drugą zasadę dynamiki Newtona zmuszeni jesteśmy od razu do rozpatrywania równań różniczkowych, w których występują pochodne drugiego rzędu (bo przyśpieszenie to pochodna prędkości, więc druga pochodna położenia, a siła to masa pomnożona przez przyspieszenie; równanie wahadła matematycznego to jeden z najprostszych przykładów). ■

Teraz zauważmy, że obliczanie pochodnych wyższego rzędu polega na obliczaniu pochodnych rzędu pierwszego, więc właściwie już się z tym zapoznaliśmy. Jeśli chodzi o wzory ogólne, to oczywistym – i w zasadzie nie wartym wspomnienia – jest wzór na n–tą pochodną sumy dwu funkcji różniczkowalnych n–krotnie:

$$(f+g)^{(n)}=f^{(n)}+g^{(n)}.$$

Leibniz zauważył, że jeśli funkcje f i g są n–krotnie różniczkowalne, to zachodzi wzór bardzo podobny do wzoru dwumianowego Newtona:

$$(f\cdot g)^{(n)}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}f^{(n-j)}g^{(j)} \tag{Leibniz}$$

Prosty dowód tego wzoru wykorzystujący wzór na pochodną iloczynu dwu funkcji i znaną równość $\binom{n}{j}+\binom{n}{j+1}=\binom{n+1}{j+1}$, dzięki której współczynniki dwumianowe można

* Taka zależność, a dokładniej $lf''=-gf$ pojawia się przy analizowaniu ruchu wahadła matematycznego o długości l przy założeniu, że amplituda jest tak mała, że przybliżenie $f\approx\sin f$ jest dostatecznie dokładne, g to przyspieszenie ziemskie.

obliczać za pomocą trójkąta Pascala, pozostawiamy czytelnikom w charakterze bardzo łatwego ćwiczenia. Wzory na n–tą pochodną złożenia i funkcji odwrotnej są na tyle skomplikowane, że właściwie w ogóle nieprzydatne, zresztą trudno je znaleźć w literaturze.

Przejdziemy teraz do sformułowania jednego z najważniejszych wzorów analizy matematycznej, tzw. wzoru Taylora. Pierwszą pochodną funkcji wprowadziliśmy po to, by móc przybliżyć funkcję w pobliżu interesującego nas punktu wielomianem stopnia pierwszego. Drugie pochodne i pochodne wyższych rzędów pojawiły się w kilku miejscach w związku z bardziej szczegółowym badaniem funkcji . Okazuje się, że definicję pochodnej, związaną z przybliżaniem funkcji wielomianem stopnia pierwszego lub zerowego, można uogólnić. Tym zajmiemy się teraz. Efektem będzie zapowiadany wzór Taylora.

Poprzednio błąd przybliżenia miał być mały w porównaniu z pierwszą potęgą zmiany argumentu. Teraz zażądamy, by był mały w porównaniu z wyższymi potęgami h. Niestety nie będzie to możliwe przy użyciu wielomianów stopnia nie przekraczającego 1 — będziemy zmuszeni do użycia wielomianów stopnia wyższego.

Załóżmy, że $0 < |h| < 1$. Wobec tego $|h| > h^2 > |h|^3 > h^4 > \ldots$. Jasne jest też, że jeśli h jest bardzo blisko 0, to h^2 jest znacznie bliżej zera niż h, h^3 znacznie bliżej niż h^2 itd. Jest tak, bo $\lim\limits_{h\to 0}\frac{h^2}{h} = 0$ i ogólnie, jeśli $m > n$, to $\lim\limits_{h\to 0}\frac{h^m}{h^n} = 0$. Można myśleć o tym tak: jeżeli h jest bardzo małe i $m > n$, to liczba $h^m = h^{m-n}\cdot h^n$ stanowi znikomą część liczby h^n, oczywiście obie są wtedy bardzo małe, ale jedna jest istotnie mniejsza niż druga.

Wobec tego, z naszego punktu widzenia, różnica między dwiema funkcjami f i g będzie mała, jeśli będzie dążyć do 0 *po podzieleniu przez* h^n, gdzie n oznacza liczbę naturalną. Następujący lemat podaje warunek konieczny i dostateczny na to, by dwie funkcje były bliskie jedna drugiej w tym sensie .

Lemat 7.2 (o funkcjach ściśle przylegających)

Jeśli funkcje f i g są n–krotnie różniczkowalne w punkcie 0, to $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-g(x)}{x^n} = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy pochodne funkcji f i g w punkcie 0 są równe do n–tego rzędu włącznie: $f^{(j)}(0) = g^{(j)}(0)$ dla $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Dowód. Załóżmy, że $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-g(x)}{x^n} = 0$. Niech $r(x) = f(x) - g(x)$. Trzeba udowodnić, że $r(0) = r'(0) = r''(0) = \ldots = r^{(n)}(0) = 0$.

Niech $0 \le j \le n$. Zachodzą równości $\lim\limits_{x\to 0}\frac{r(x)}{x^j} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{r(x)}{x^n}\cdot\lim\limits_{x\to 0}x^{n-j} = 0$, bo pierwsza granica jest równa 0, a druga 0 lub 1 w zależności od tego, czy $j < n$ czy też $j = n$. Mamy $\lim\limits_{x\to 0} r(x) = 0$. Stąd i z tego, że funkcja r jest ciągła w punkcie 0, jako różniczkowalna, wynika, że $r(0)=0$. Mamy $0=\lim\limits_{x\to 0}\frac{r(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{r(x)-r(0)}{x}=r'(0)$. Wobec tego $r'(0)=0$. Teraz wykażemy, że $r''(0)=0$ (zakładamy oczywiście, że $n\geq 2$). Stosujemy regułę de l'Hospitala:

$$0=\lim_{x\to 0}\frac{r(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{r'(x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{r'(x)-r'(0)}{x}=\frac{1}{2}r''(0).$$

W taki sam sposób wykażemy, że również trzecia pochodna równa jest 0:

$$0=\lim_{x\to 0}\frac{r(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{r'(x)}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{r''(x)}{6x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{r''(x)-r''(0)}{x}=\frac{1}{6}r^{(3)}(0).$$

Jasne jest, że tę procedurę można kontynuować.

Wykażemy teraz, że jeśli $r(0)=r'(0)=r''(0)=\ldots=r^{(n)}(0)=0$, to $\lim\limits_{x\to 0}\frac{r(x)}{x^n}=0$. Stosujemy regułę de l'Hospitala:

$$\lim_{x\to 0}\frac{r(x)}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{r'(x)}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{r''(x)}{n(n-1)x^{n-2}}=\ldots=\lim_{x\to 0}\frac{r^{(n-1)}(x)}{n(n-1)\ldots 2x}.$$

Mamy dalej $\lim\limits_{x\to 0}\frac{r^{(n-1)}(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{r^{(n-1)}(x)-r^{(n-1)}(0)}{x}=r^{(n)}(0)=0$. Dowód lematu został zakończony. ■

Wniosek 7.3 (z dowodu.)

Jeśli funkcja r jest n–krotnie różniczkowalna w punkcie 0 i spełnione są równości $r(0)=r'(0)=r''(0)=r^{(n-1)}(0)=0$, to $\lim\limits_{x\to 0}\frac{r(x)}{x^n}=\frac{r^{(n)}(0)}{n!}$. ■

Z lematu o funkcjach ściśle przylegających wynika, że jeśli chcemy przybliżyć funkcję w otoczeniu punktu p wielomianem w tak, by błąd przybliżenia był mały w porównaniu z h^n, to pochodne tego wielomianu w punkcie 0, do n–tego rzędu włącznie, muszą być równe odpowiednim pochodnym funkcji f w punkcie p:

$$f^{(j)}(p)=w^{(j)}(0).$$

Jeżeli $w(h)=a_0+a_1h+a_2h^2+\cdots+a_nh^n$ dla każdego $h\in\mathbb{R}$, to $w^{(j)}(0)=j!a_j$ dla $j=0,1,2,\ldots,n$. Stąd wynika, że powinno być $a_j=\frac{f^{(j)}(p)}{j!}$. To motywuje wprowadzenie następującego określenia.

Definicja 7.4 (wielomianu Taylora i reszty)

Załóżmy, że funkcja f ma w punkcie p pochodną n–tego rzędu. n–tym wielomianem Taylora funkcji f w punkcie p nazywamy wielomian

$$f(p)+f'(p)h+\frac{f''(p)}{2!}h^2+\frac{f^{(3)}(p)}{3!}h^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(p)}{n!}h^n,$$

zmiennej h, n–tą resztą nazywamy różnicę

$$r_n(h)=f(p+h)-\left(f(p)+f'(p)h+\frac{f''(p)}{2!}h^2+\frac{f^{(3)}(p)}{3!}h^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(p)}{n!}h^n\right).\ ■$$

Oczywiście wielomian Taylora określony jest dla wszystkich liczb h, natomiast reszta tylko dla takich h, dla których punkt $p+h$ znajduje się w dziedzinie funkcji f.

Jasne jest też, że po to, by móc mówić o pochodnej $f^{(n)}(p)$ trzeba założyć istnienie pochodnej $f^{(n-1)}$ oraz wszystkich pochodnych niższego rzędu w pewnym otoczeniu punktu p. Z lematu o funkcjach ściśle przylegających wynika natychmiast

Twierdzenie 7.5 (G.Peano)

Jeśli f jest funkcją n–krotnie różniczkowalną w punkcie p, to $\lim\limits_{h\to 0}\frac{r_n(h)}{h^n}=0$. ■

Równość $f(p+h)=f(p)+f'(p)h+\frac{f''(p)}{2!}h^2+\frac{f^{(3)}(p)}{3!}h^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(p)}{n!}h^n+r_n(h)$ nazywana bywa wzorem Taylora z resztą Peano, jeśli dodamy informację zawartą w twierdzeniu Peano.

Również z tego lematu wynika, że innego wyboru nie ma, jeśli chcemy mieć tak dokładne przybliżenie i nie chcemy zwiększać stopnia wielomianu ponad niezbędne minimum.

Twierdzenie 7.6 (o jednoznaczności wielomianu Taylora)

Jeśli funkcja f jest n–krotnie różniczkowalna w punkcie p i w jest wielomianem stopnia nie większego niż n, tzn. istnieją liczby a_0, $a_1,\ldots,a_n$, takie że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $w(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ oraz $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(p+h)-w(h)}{h^n}=0$, to dla każdego numeru $j\in\{0,1,2,\ldots,n\}$ zachodzi wzór $f^{(j)}(p)=j!a_j$, a więc w jest wielomianem Taylora funkcji f w punkcie p. ■

Nadmienić wypada, że Taylor był współczesny Newtonowi, wzór Taylora znaleziony został od razu. Idea przybliżania dokładniejszego niż liniowe była obecna w omawianej teorii od samego początku! Współczesny Newtonowi był też Szkot o nazwisku Maclaurin, którego nazwiskiem opatrywany jest wzór Taylora w przypadku $p=0$. Zaznaczmy jeszcze, że z wzorem Taylora związane jest szereg Taylora funkcji: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(p)}{n!}h^n$. Dla wielu funkcji, zwłaszcza najczęściej używanych zachodzi równość $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n:=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{j=0}^{n}\frac{f^{(j)}(p)}{j!}(x-p)^j$, przyjęliśmy $x=p+h$. Jeśli ta granica istnieje, to ma wiele własności przysługujących zwykłym skończonym sumom i dlatego stosowane jest oznaczenie $\sum\limits_{n=0}^{\infty}$. Wyjaśnienie, dla jakich funkcji tego rodzaju wzór może być napisany i dla jakich liczb x równość zachodzi jest w wielu przypadkach trudne i wykracza znacznie poza program tego wykładu. Po to, by w ogóle można było o nim mówić trzeba założyć, że funkcja ma w punkcie p pochodne wszystkich rzędów. Jednak nawet wtedy może zdarzyć się, że dla żadnego $h\neq 0$ granica nie istnieje albo istnieje ale jest różna od $f(x)=f(p+h)$. W przypadku $p=0$ mówi się zazwyczaj o szeregu Maclaurina. W wielu przypadkach pisano szeregi nie troszcząc się zbytnio o to, czy wolno i badano za ich pomocą własności funkcji będących np. przedmiotem zainteresowania fizyków. Dopiero, gdy okazywało się to pożyteczne zaczynano troszczyć się „o szczegóły”.

Czytelnik poznał już rozwinięcia w szereg Maclaurina lub Taylora kilku ważnych funkcji

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{x^n}{n!}\,, \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \tfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,, \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \tfrac{x^{2n}}{(2n)!}\,,$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \tfrac{x^{2n+1}}{2n+1}\,, \qquad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \tfrac{x^n}{n}\,, \qquad (1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \tbinom{a}{n} x^n\,,$$

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{2n+1} \cdot \tfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n} \cdot x^{2n+1}$$

i jednej funkcji wymiernej $\frac{x}{x^2+5x+6} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(-\frac{1}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) x^n\,.$

Definicja 7.7 (lokalnego ekstremum)
Mówimy, że funkcja f określona na zbiorze zawierającym przedział I o środku w punkcie p ma w tym punkcie lokalne maksimum wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki przedział $J \subset I$ o środku w punkcie p, że jeśli $x \in J$, to $f(x) \le f(p)$. Jeśli nierówność jest ostra dla $x \ne p$, to mówimy, że lokalne maksimum jest właściwe. Analogicznie określamy lokalne minimum oraz lokalne minimum właściwe. Jeśli funkcja ma w punkcie p lokalne maksimum lub lokalne minimum, to mówimy, że ma w tym punkcie lokalne ekstremum. ■

Jasne jest, że funkcje x^2, x^4, x^6 ... mają w punkcie 0 minima, natomiast funkcje przeciwne $-x^2$, $-x^4$, $-x^6$ ... mają w punkcie 0 maksima. Funkcje x, x^3, x^5 ... nie mają w punkcie 0 ekstremów, nawet lokalnych. Udowodnimy teraz twierdzenie pozwalające w licznych przypadkach łatwo stwierdzić, czy funkcja n–krotnie różniczkowalna w punkcie p ma w nim lokalne ekstremum.

Twierdzenie 7.8 (o lokalnych ekstremach)
Załóżmy, że funkcja f jest n–krotnie różniczkowalna w punkcie p oraz że zachodzą równości
$0 = f'(p) = f''(p) = \ldots = f^{(n-1)}(p)$ i nierówność $f^{(n)}(p) \ne 0$. Wtedy:

jeśli n jest liczbą nieparzystą, to funkcja f nie ma w punkcie p lokalnego ekstremum — w dowolnie małym otoczeniu punktu p przyjmuje zarówno wartości większe niż w punkcie p jak i wartości większe niż w punkcie p,

jeśli natomiast n jest liczbą parzystą, to funkcja f ma w punkcie p lokalne ekstremum właściwe: minimum właściwe, gdy $f^{(n)}(p) > 0$, maksimum właściwe, gdy $f^{(n)}(p) < 0$.

Dowód. Skorzystamy z wzoru Taylora:

$$f(p+h) = f(p) + \frac{f'(p)}{1!}h + \frac{f''(p)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(p)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(p)}{n!}h^n + r_n(h)$$

Wobec założeń o pochodnych funkcji f w punkcie p możemy napisać

$$f(p+h) = f(p) + \frac{f^{(n)}(p)}{n!}h^n + r_n(h) = f(p) + h^n\left(\frac{f^{(n)}(p)}{n!} + \frac{r_n(h)}{h^n}\right)$$

Ponieważ $\lim\limits_{h\to 0}\frac{r_n(h)}{h^n} = 0$, więc istnieje taka liczba $\delta > 0$, że jeśli $0 < |h| < \delta$, to $\left|\frac{r_n(h)}{h^n}\right| < \left|\frac{f^{(n)}(p)}{n!}\right|$. Znak sumy dwu liczb jest taki sam jak znak tej z nich, której wartość bezwzględna jest większa. W przypadku sumy $\frac{f^{(n)}(p)}{n!} + \frac{r_n(h)}{h^n}$ jest on więc, przy założeniu, że $0 < |h| < \delta$ taki jak znak liczby $f^{(n)}(p)$ ($n!$ nie ma wpływu znak). Jeśli n jest liczbą nieparzystą, to znak iloczynu $h^n\left(\frac{f^{(n)}(p)}{n!} + \frac{r_n(h)}{h^n}\right)$ zmienia się wraz ze zmianą znaku h. Jeśli n jest liczbą parzystą, to znak ten jest niezależny od znaku h: w przypadku $f^{(n)}(p) < 0$ liczba $h^n\left(\frac{f^{(n)}(p)}{n!} + \frac{r_n(h)}{h^n}\right)$ jest ujemna, zaś w przypadku $f^{(n)}(p) > 0$ — dodatnia. Stąd teza wynika od razu. ■

Podany przed chwilą dowód ilustruje jak stosowany jest wzór Taylora: pewna własność przysługuje wielomianowi Taylora, reszta nie jest w stanie jej zmienić, bo jest za mała. Oczywiście istotnym założeniem jest $f^{(n)}(p) \neq 0$ – bez niego nie mamy podstaw do twierdzenia, że reszta jest mała w porównaniu z wielomianem Taylora funkcji $f(x) - f(p)$, przeciwnie w takim przypadku wszystkie informacje o zachowaniu się funkcji w pobliżu punktu p zawarte są w reszcie, o której niewiele wiemy! Po drugie wypada podkreślić, że mówimy tu jedynie o zachowaniu się funkcji w pobliżu punktu p, na nic więcej nie możemy liczyć, bo założenia, które uczyniliśmy dotyczą jedynie pochodnych w tym jednym punkcie! O wielkości liczby δ również nic nie możemy powiedzieć, jeśli w konkretnej sytuacji musimy coś konkretnego o niej powiedzieć, to wymaga to dalszego badania konkretnej funkcji.*

Przykład 7.13 Niech $f(x) = 3x^4 - 28x^3 + 84x^2 - 96x$. Obliczamy pochodną $f'(x) = 12x^3 - 84x^2 + 168x - 96 = 12(x^3 - 7x^2 + 14x - 8) = 12(x-1)(x-2)(x-4)$.

*W wielu podręcznikach słowa maksimum, minimum, ekstremum oznaczają lokalne maksimum, lokalne minimum, lokalne ekstremum. Zdecydowaliśmy się na nieco dłuższe terminy, by uniknąć częstych nieporozumień związanych z krótszymi. Wielu studentów, zwłaszcza słabiej przygotowanych, myli np. lokalne maksima z globalnymi, co może prowadzić do zupełnie bezsensownych wniosków.

Pochodna f' zeruje się jedynie w punktach 1, 2, 4. Druga pochodna jest równa $f''(x) = 36x^2 - 168x + 168 = 12(3x^2 - 14x + 14)$. Wobec tego $f''(1) > 0$, $f''(2) < 0$ i $f''(4) > 0$, więc z twierdzenia o lokalnych ekstremach wynika, że w punktach 1 i 4 funkcja f ma lokalne minima, a w punkcie 2 ma lokalne maksimum. Z tego twierdzenia już więcej nic nie jesteśmy w stanie wywnioskować. Nie wiemy np. czy $f(1)$ jest najmniejszą wartością funkcji na całej prostej i czy ta funkcja w ogóle ma najmniejszą wartość. Natomiast z twierdzenia o monotoniczności funkcji różniczkowalnych wynika, że na każdym z przedziałów $(-\infty, 1]$, $[1, 2]$, $[2, 4]$ oraz $[4, +\infty)$ funkcja f jest ściśle monotoniczna, bowiem w ich punktach wewnętrznych pochodna f' funkcji f nie zeruje się. Mamy $f(1) = -37$, $f(2) = -32$ oraz $f(4) = -64$. Wiemy więc, że funkcja f na przedziale $[1, 2]$ rośnie, na przedziale $[2, 4]$ maleje. Obliczywszy $f(0) = 0 > -37 = f(1)$ stwierdzamy, że na przedziale $(-\infty, 1]$ ta funkcja maleje (wcześniej już stwierdziliśmy, że f jest na tej półprostej ściśle monotoniczna!). Analogicznie z tego, że $f(5) = -5 > -64 = f(4)$ wynika, że na półprostej $[4, +\infty)$ funkcja f jest ściśle rosnąca. Z tego wszystkiego wynika, że $f(4) = -64$ jest najmniejszą wartością funkcji f na całej prostej, $f(1) = -37$ jest najmniejszą wartością funkcji f na przedziale $(-\infty, 2]$ (to nie jest maksymalny przedział, na którym ta wartość jest najmniejsza, ale ustalenie maksymalnego wymagałoby dalszych rozumowań, np. rozwiązania równania $f(x) = f(1)$ w przedziale $[2, 4]$). ■

Przykład 7.14 Zajmiemy się funkcją badaną już w poprzednim przykładzie:
$$f(x) = 3x^4 - 28x^3 + 84x^2 - 96x\,.$$
Teraz ustalimy jaka jest największa wartość tej funkcji na przedziale $[1, 5]$. Pochodna w tym przedziale zeruje się w punktach 1, 2, 4, w punktach 1 i 4 druga pochodna jest dodatnia, więc funkcja ma w nich lokalne minima *właściwe*, więc na pewno nie ma tam wartości największej. Ponieważ f jest ciągła i rozpatrujemy ją na przedziale domkniętym i ograniczonym, więc w pewnym punkcie tego przedziału przyjmuje wartość największą (spośród przyjmowanych na tym przedziale).♣ Wartość największa musi być przyjęta albo w punkcie 2, albo w punkcie 5, czyli w końcu dziedziny (lewy koniec przedziału $[1, 5]$ wyeliminowaliśmy wcześniej). Wobec tego w naszym przypadku jest jeszcze jedna możliwość $x = 5$. Mamy $f(5) = -5 > -32 = f(2)$, więc największą wartością funkcji f na przedziale $[1, 5]$ jest liczba $-5 = f(5)$. Dodajmy, że ten przykład jest bardzo prosty, bo chodzi jedynie o przedstawienie roli poszczególnych twierdzeń w badaniu funkcji. ■

♣ Standardowy błąd polega na stwierdzeniu, że ponieważ jedynym punktem zerowania się pochodnej oprócz punktów, w których funkcja ma lokalne minima jest 2, więc $f(2){=}{-32}$ jest wartością największą funkcji f na przedziale $[1{,}5]$. W rzeczywistości po ustaleniu, gdzie pochodna się zeruje należy rozważyć jeszcze końce przedziału oraz punkty, w których pochodna nie istnieje (w tym przypadku istnieje wszędzie).

Przykład 7.15 Pokażemy teraz jak można stosować wzór Taylora do obliczania granic funkcji. Obliczymy mianowicie granicę ilorazu $\frac{(\ln(\cos x))^5}{(x^2-\sin^2 x)(\mathrm{tg}^2 x)(\cos x-\cos 2x)^2}$ przy $x \longrightarrow 0$. Oczywiście licznik i mianownik dążą do 0, więc można spróbować zastosować regułę de l'Hospitala. Jednak licznik i mianownik wyglądają dosyć nieprzyjemnie i można spodziewać się, że po zróżniczkowaniu nie będą wyglądać lepiej. Wobec tego należy zadać sobie pytanie: jak szybko licznik dąży do 0. Potem to samo pytanie należy odnieść do mianownika. Dokładniej: dla jakiej liczby naturalnej n granica $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\ln(\cos x))^5}{x^n}$ jest skończona i różna od 0. Jeśli taka liczba istnieje, to będziemy mówić, że licznik dąży do 0 tak szybko jak x^n. Wiemy, że $\ln(1+y)=y+r(y)$, gdzie r jest taką funkcją, że $\lim\limits_{y\to 0}\frac{r(y)}{y}=0$ – wynika to z wzoru Taylora zastosowanego do funkcji ln w punkcie $p=1$ i $n=1$, czyli z wzoru na pochodną logarytmu. Jednocześnie zachodzi równość $\cos x = 1-\frac12 x^2+\varrho(x)$, gdzie ϱ jest taką funkcją, że $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\varrho(x)}{x^2}=0$ — znów stosujemy wzór Taylora, tym razem chodzi o funkcję kosinus w punkcie 0, $n=2$.♡ Stąd wnioskujemy, że $\ln(\cos x) = = \ln\left(1-\frac12 x^2+\varrho(x)\right)=\ln\Big(1+\left(-\frac12 x^2+\varrho(x)\right)\Big)=-\frac12 x^2+\varrho(x)+r\left(-\frac12 x^2+\varrho(x)\right)$. Mamy $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\varrho(x)}{x^2}=0$ i $\lim\limits_{x\to 0}\frac{r\left(-\frac12 x^2+\varrho(x)\right)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{r\left(-\frac12 x^2+\varrho(x)\right)}{-\frac12 x^2+\varrho(x)}\frac{-\frac12 x^2+\varrho(x)}{x^2}=0\cdot\left(-\frac12\right)=0$, więc $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=-\frac12$. Wykazaliśmy więc, że licznik zachowuje się jak $(x^2)^5=x^{10}$. Teraz zajmiemy się kolejno poszczególnymi członami mianownika. Zaczniemy od $x^2-\sin^2 x$. Mamy $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\tilde r(x)$, gdzie $\frac{\tilde r(x)}{x^3}\longrightarrow 0$, gdy $x\longrightarrow 0$. Wobec tego zachodzi równość $x^2-\sin^2 x = x^2-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\tilde r(x)\right)^2=2x\frac{x^3}{3!}+\widehat r(x)$, gdzie przez $\widehat r(x)$ oznaczyliśmy sumę wszystkich pozostałych (niezredukowanych) składników tj. $-\left(\frac{x^3}{3!}\right)^2-\left(\tilde r(x)\right)^2-2x\tilde r(x)+2\frac{x^3}{3!}\tilde r(x)$. Jasne jest, że $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\widehat{r(x)}}{x^4}=0$. Stąd łatwo wynika, że $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}=2\frac{1}{3!}=\frac13$. Jasne jest, że $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,x}{x}=1$, więc $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}^2 x}{x^2}=1$. Pozostał ostatni czynnik mianownika. Zastosujemy wzór Maclaurina dla funkcji kosinus i $n=2$. Mamy $\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\tilde\varrho(x)$, gdzie $\tilde\varrho$ jest taką funkcją, że $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tilde\varrho(x)}{x^2}=0$ (w rzeczywistości dzięki temu, że wiemy jak przedstawić można funkcję kosinus w postaci sumy szeregu potęgowego, możemy napisać, że $\tilde\varrho(x)=\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$). Wobec tego $\cos x-\cos(2x) = 1-\frac{x^2}{2!}+\tilde\varrho(x)-\left(1-\frac{(2x)^2}{2!}+\tilde\varrho(2x)\right)=\frac32 x^2+\widehat\varrho(x)$, gdzie $\widehat\varrho$ jest taką funkcją, że $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\widehat{\varrho}(x)}{x^2}=0$. Wobec tego $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos(2x)}{x^2}=\frac32$, zatem

♡ Ponieważ $\ln(1+y)=y-\frac12 y^2+\cdots$, więc $r(y)=-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\cdots$. Analogicznie stosując wzór $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots$ otrzymujemy równość $\varrho(x)=\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\cos x-\cos(2x))^2}{x^4}=\frac{9}{4}$. Pozostało stwierdzić, że szukana granica to $\frac{(-\frac{1}{2})^5}{\frac{1}{3}\cdot 1\cdot\frac{9}{4}}=-\frac{1}{24}$. Postępowanie nasze polegało tu na tym, że zastępowaliśmy funkcje sinus, kosinus, logarytm naturalny wielomianami *odpowiedniego* stopnia, co ułatwiało obliczanie granicy. Można zastosować regułę de l'Hospitala zamiast wzoru Taylora, ale wzór Taylora jest wygodniejszy i nie wymaga większego namysłu. ■

W ostatnim przykładzie pojawiały się w dużych ilościach funkcje, których dokładne definicje nie miały żadnego znaczenia: r, ϱ, $\tilde{r}$, $\tilde{\varrho}$, $\widehat{r}$, $\widehat{\varrho}$. Istotne było jedynie to, że po podzieleniu przez odpowiednią potęgę funkcji x granicą każdej z nich przy $x\longrightarrow 0$ była liczba 0. Zwykle nie wprowadza się tylu oznaczeń. Stosowany jest symbol o. Przyjmujemy mianowicie następującą umowę: piszemy $f(x)=o(g(x))$ przy $x\longrightarrow p$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)}=0$. Można więc napisać np. $\ln(1+y)=y+o(y)$ przy $y\longrightarrow 0$, bo $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)-y}{y}=0$. Można też napisać, że $x^{10}=o(e^x)$ przy $x\longrightarrow+\infty$, bo $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{10}}{e^x}=0$. Mamy również $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$, $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+o(x^2)$ – to są oczywiste wnioski z wzoru Taylora. Przy użyciu właśnie wprowadzonego oznaczenia można zapisać twierdzenie Peano w następujący sposób:

$$f(p+h)=f(p)+\frac{f'(p)}{1!}h+\frac{f''(p)}{2!}h^2+\frac{f^{(3)}(p)}{3!}h^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(p)}{n!}h^n+o(h^n)\quad\text{przy } h\longrightarrow 0.$$

Oczywiście jeżeli $f(x)=o(x^k)$ przy $x\longrightarrow 0$, to $x^nf(x)=o(x^{n+k})$ przy $x\to 0$. Jeżeli $f(x)=o(x^k)$ przy $x\to 0$ i $g(x)=o(x^n)$ przy $x\to 0$, to $f(x)g(x)=o(x^{k+n})$ i $f(x)+g(x)=o(x^l)$ przy $x\to 0$, gdzie $l=\min(k,n)$. W przypadku sumy rezultat nie jest oczywiście „dokładny”. Może się zdarzyć, że suma dąży do 0 „szybciej”, bo człony decydujące o prędkości zbieżności mogą się zredukować przy dodawaniu lub odejmowaniu. Pokażemy teraz jak przy użyciu symbolu o można opisać rozwiązanie zadania przedstawione w ostatnim przykładzie.

Przykład 7.16 Mamy znaleźć granicę $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\ln(\cos x))^5}{(x^2-\sin^2 x)(\operatorname{tg}^2 x)(\cos x-\cos 2x)^2}$. Skorzystamy z równości $\ln(1+x)=x+o(x)$, $\operatorname{tg} x=x+o(x)$, $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$ i $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+o(x^2)$ przy $x\to 0$. Z nich wynika, że przy $x\to 0$ zachodzi wzór

$$\ln(\cos x)=\ln(1-\tfrac{x^2}{2!}+o(x^2))=-\tfrac{x^2}{2}+o(x^2)+o\big(-\tfrac{x^2}{2}+o(x^2)\big)=-\tfrac{x^2}{2}+o(x^2)$$

— ostatni wzór wynika stąd, że $\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2}=-\frac{1}{2}\neq\pm\infty$. Rozumując dalej w taki sam sposób otrzymujemy

$$x^2-\sin^2 x=x^2-\big(x-\tfrac{x^3}{3!}+o(x^3)\big)^2=x^2-\big(x^2-2x\tfrac{x^3}{3!}+o(x^4)\big)=\tfrac{x^4}{3}+o(x^4)$$

— nie jest oczywiście istotne, czy piszemy $o(x^4)$ czy też $-o(x^4)$.

Ponieważ $\operatorname{tg} x=x+o(x)$, więc

$$\operatorname{tg}^2 x=(x+o(x))^2=x^2+2xo(x)+(o(x))^2=x^2+o(x^2).$$

Przejdźmy do ostatniego etapu: $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$, wobec tego $\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + o((2x)^2) = 1 - 2x^2 + o(x^2)$. Odejmując dwie ostatnie równości stronami otrzymujemy: $\cos x - \cos 2x = \left(-\frac{1}{2} + 2\right)x^2 + o(x^2) = \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$. Stąd $(\cos x - \cos 2x)^2 = \left(\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)\right)^2 = \frac{9}{4}x^4 + 3x^2 o(x^2) + (o(x^2))^2 = \frac{9}{4}x^4 + o(x^4)$. Wobec tego

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\ln(\cos x))^5}{(x^2-\sin^2 x)(\mathrm{tg}^2\, x)(\cos x - \cos 2x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(-\frac{x^2}{2}+o(x^2))^5}{(\frac{x^4}{3}+o(x^4))(x^2+o(x^2))(\frac{9}{4}x^4+o(x^4))} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^{10}\left(-\frac{1}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}\right)^5}{\left(x^4\left(\frac{1}{3}+\frac{o(x^4)}{x^4}\right)\right)\left(x^2\left(1+\frac{o(x^2)}{x^2}\right)\right)\left(x^4\left(\frac{9}{4}+\frac{o(x^4)}{x^4}\right)\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(-\frac{1}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}\right)^5}{\left(\frac{1}{3}+\frac{o(x^4)}{x^4}\right)\left(1+\frac{o(x^2)}{x^2}\right)\left(\frac{9}{4}+\frac{o(x^4)}{x^4}\right)} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^5}{\frac{1}{3}\cdot 1\cdot\frac{9}{4}} = -\frac{1}{24}\,. \blacksquare$$

W ten sposób łatwiej jest operować wzorem Taylora, obliczać granice itp. Jednak trzeba pamiętać o tym, że symbol o nie oznacza funkcji — napis $f(x) = o(g(x))$ to skrót zdania mówiącego, że iloraz $\frac{f(x)}{g(x)}$ jest zbieżny do 0, np. z równości (prawdziwej) $x - \sin x = o(x^2)$ przy $x \to 0$ wynika równość $x - \sin x = o(x)$ przy $x \to 0$, ale z tej drugiej równości pierwsza nie wynika: pierwsza równość oznacza bowiem, że $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^2} = 0$ i z niej wynika oczywiście, że $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x} = 0$, bo $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x-\sin x}{x^2}\cdot x\right) = 0$. W przeciwną stronę wnioskować nie można. Trzeba równość $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^2} = 0$ uzasadnić inaczej, można np. skorzystać z wzoru Maclaurina dla funkcji $x - \sin x$ i $n = 2$: druga pochodna tej funkcji w punkcie 0 jest równa 0, więc pierwszy wielomian Taylora w punkcie 0 pokrywa się z drugim wielomianem Taylora w punkcie 0. Ogólnie jeśli $f(x) = o(x^2)$ przy $x \to 0$, to również $f(x) = o(x)$ przy $x \to 0$. Na odwrót być nie musi: $\ln(1+x) - x = o(x)$, natomiast nie jest prawdą, że $\ln(1+x) - x = o(x^2)$!

Warto stosować symbol o, ale trzeba umieć się nim posługiwać, więc studentom którzy mają kłopoty z analizą matematyczną polecam go z dużymi zastrzeżeniami, ci którzy dobrze zrozumieli pojęcie granicy nie powinni mieć z nim problemów, pod warunkiem starannego prześledzenie kilku rozumowań.

Przykład 7.17 Znajdziemy raz jeszcze granicę $\lim_{x\to 0} \frac{e-(1+x)^{1/x}}{x}$. Mamy

$$(1+x)^{1/x} = e^{(1/x)\cdot\ln(1+x)} = e^{(1/x)(x-x^2/2+o(x^2))} = e^{1-x/2+o(x)} =$$
$$= e\cdot e^{-x/2+o(x)} = e\left(1-\frac{x}{2}+o(x)+o\left(-\frac{x}{2}+o(x)\right)\right) = e\left(1-\frac{x}{2}+o(x)\right).$$

Stąd mamy: $\lim_{x\to 0} \frac{e-(1+x)^{1/x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e-e\left(1-\frac{x}{2}+o(x)\right)}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{e}{2}+\frac{o(x)}{x}\right) = \frac{e}{2}$, można napisać $o(x)$ zamiast $-e\cdot o(x)$, bo po pomnożeniu funkcji, której granicą jest 0, przez liczbę, otrzymujemy znów funkcję, której granicą jest 0. $\blacksquare$

Zajmiemy się teraz przez chwilę wypukłością funkcji dwukrotnie różniczkowalnych. Przypomnijmy, że funkcja różniczkowalna jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna jest niemalejąca, ściśle wypukła - wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna jest ściśle rosnąca. Korzystając z twierdzenia o monotoniczności funkcji różniczkowalnych stwierdzamy natychmiast prawdziwość następującego twierdzenia:

Twierdzenie 7.9 (o wypukłości funkcji dwukrotnie różniczkowalnych)
Jeśli funkcja f jest określona na przedziale otwartym i jest dwukrotnie różniczkowalna w każdym punkcie tego przedziału, to jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy jej druga pochodna f'' przyjmuje jedynie wartości nieujemne.
Dwukrotnie różniczkowalna funkcja określona na przedziale otwartym jest ściśle wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy jej druga pochodna f'' jest nieujemna i w każdym przedziale zawartym w jej dziedzinie znajduje się co najmniej jeden punkt, w którym druga pochodna f'' jest dodatnia. ■

W istocie rzeczy badając wypukłość funkcji w poprzednim rozdziale już stosowaliśmy to twierdzenie. W niektórych przypadkach uzasadnienia wypukłości mogłyby zostać nieznacznie skrócone, gdybyśmy powoływali się wprost na twierdzenie o wypukłości funkcji dwukrotnie różniczkowalnych. Zachęcamy czytelnika do ponownego prześledzenia podanych wcześniej przykładów. Teraz natomiast sformułujemy twierdzenie, które w wielu przypadkach pozwala na łatwe znajdowanie punktów przegięcia funkcji wielokrotnie różniczkowalnej.

Twierdzenie 7.10 (o punktach przegięcia funkcji wielokrotnie różniczkowalnych)

1. Jeśli p jest punktem przegięcia funkcji f, druga pochodna $f''(p)$ istnieje i jest skończona, to $f''(p) = 0$.

2. Jeśli funkcja f jest n–krotnie różniczkowalna w punkcie p, $n > 2$ i
$$0 = f''(p) = f^{(3)}(p) = \ldots = f^{(n-1)}(p) \text{ i } f^{(n)}(p) \neq 0,$$
to jeśli n jest liczbą nieparzystą, to p jest punktem przegięcia funkcji f;
jeśli natomiast liczba n jest parzysta, to p nie jest punktem przegięcia funkcji f.

Dowód. 1. Z definicji punktu przegięcia wynika, że istnieje liczba $\delta > 0$, taka że na jednym z przedziałów $(p-\delta, p]$, $[p, p+\delta)$ funkcją f jest wypukła, a na drugim – wklęsła. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że na przedziale $(p-\delta, p]$ funkcja f jest wypukła, a na przedziale $[p, p+\delta)$ – wklęsła. Ponieważ f jest dwukrotnie różniczkowalna w punkcie p, więc jest różniczkowalna w punktach pewnego przedziału o środku w punkcie p. Bez straty ogólności można przyjąć, że tym przedziałem jest $(p-\delta, p+\delta)$. Wobec tego na przedziale $(p-\delta, p]$ pochodna f' funkcji f jest niemalejąca i wobec tego jej pochodna, czyli f'', jest nieujemna w każdym punkcie, w

którym jest określona, w szczególności $f''(p) \geq 0$. Na przedziale $[p, p+\delta)$ funkcja f jest wklęsła i wobec tego $f''(p) \leq 0$. Ponieważ $f''(p) \leq 0 \leq f''(p)$, więc $f''(p) = 0$.
2. Zastosujemy wzór Taylora do funkcji f'' w punkcie p. Mamy
$$f''(p+h) = f''(p) + \tfrac{f^{(3)}(p)}{1!}h + \cdots + \tfrac{f^{(n)}(p)}{(n-2)!}h^{n-2} + r_{n-2}(h) = h^{n-2}\left(\tfrac{f^{(n)}(p)}{(n-2)!} + \tfrac{r_{n-2}(h)}{h^{n-2}}\right).$$
Niech $\delta > 0$ będzie taką liczbą dodatnią, że jeśli $0 < |h| < \delta$, to $\left|\frac{r_{n-2}(h)}{h^{n-2}}\right| < \frac{|f^{(n)}(p)|}{(n-2)!}$.
Liczby $\frac{f^{(n)}(p)}{(n-2)!} + \frac{r_{n-2}(h)}{h^{n-2}}$ i $\frac{f^{(n)}(p)}{(n-2)!}$ mają więc taki sam znak. Jeżeli liczba n jest nieparzysta, to $h^{n-2} > 0$ dla $h > 0$ oraz $h^{n-2} < 0$ dla $h < 0$. Wynika stąd, że wyrażenie $f''(p+h) = h^{n-2}\left(\frac{f^{(n)}(p)}{(n-2)!} + \frac{r_{n-2}(h)}{h^{n-2}}\right)$ jest na jednym z przedziałów $(-\delta, 0)$, $(0, \delta)$ dodatnie, a na drugim — ujemne. Wobec tego na jednym z przedziałów $(p-\delta, p]$, $[p, p+\delta)$ funkcja f jest ściśle wklęsła, a na drugim – ściśle wypukła. Wynika stąd, że p jest punktem przegięcia funkcji f. Jeżeli natomiast liczba n jest parzysta, to wtedy funkcja f'' ma w punkcie p lokalne ekstremum właściwe, więc albo na całym przedziale $(p-\delta, p+\delta)$ z wyjątkiem punktu p funkcja f'' jest dodatnia, albo na całym przedziale $(p-\delta, p+\delta)$ funkcja f'' jest ujemna. W pierwszym przypadku funkcja f jest ściśle wypukła na całym przedziale $(p-\delta, p+\delta)$, a w drugim – ściśle wklęsła. W żadnym z tych przypadków p nie jest punktem przegięcia funkcji f. Dowód został zakończony. ■

Również to twierdzenie dobrze ilustruje schemat rozumowania przedstawiany w tym rozdziale: funkcja f zachowuje się w dostatecznie małych otoczeniu punktu p tak jak funkcja $\frac{f^{(n)}(p)}{n!}h^n$ w otoczeniu 0 (reszta jest za mała, by mieć istotny wpływ na zachowanie się funkcji!).

Przykład 7.18 Niech $f(x) = x^2(x-6)^2$. Sporządzimy wykres funkcji f. W tym celu ustalimy, na jakich przedziałach funkcja rośnie, na jakich maleje, na jakich jest wypukła, na jakich jest wklęsła, gdzie ma lokalne ekstrema, gdzie punkty przegięcia i znajdziemy asymptoty — oczywiście część wymienionych obiektów może nie istnieć. Obliczymy kolejne pochodne: $f'(x) = 2x(x-6)(x+x-6) = 4(x^3 - 9x^2 + 18x)$, $f''(x) = 12(x^2 - 6x + 6)$ i $f^{(3)}(x) = 24(x-3)$. Pierwiastkami pierwszej pochodnej są liczby: 0, 3, 6; drugiej: $3 - \sqrt{3}$ i $3 + \sqrt{3}$ i wreszcie trzeciej: liczba 3. Widać od razu, że w punktach zerowania się pierwszej pochodnej druga przyjmuje wartości różne od 0, wobec tego we wszystkich tych punktach f ma lokalne ekstrema właściwe: w 0 i w 6 — lokalne minima właściwe (bo $f''(0), f''(6) > 0$), a w 3 — lokalne maksimum właściwe (bo $f''(3) = -3 < 0$). Ponieważ na przedziałach $(-\infty, 0]$, $[0, 3]$, $[3, 6]$ i $[6, \infty)$ funkcja f jest ściśle monotoniczna, bo w ich punktach wewnętrznych pierwsza pochodna jest różna od 0, więc na przedziałach $(-\infty, 0]$ i $[3, 6]$ funkcja f

maleje, a na przedziałach $[0,3]$ i $[6,\infty)$ — rośnie.

Podkreślmy, że choć to bardzo łatwe, to jednak nie badaliśmy znaku pierwszej pochodnej, bo układ lokalnych ekstremów wymusza stwierdzenia na temat wzrostu i spadku wartości funkcji. Oczywiście w ostatecznym rozrachunku wiemy, jaki jest ten znak (pochodna jest różna od 0 w punktach przedziału $(-\infty,0)$, funkcja maleje na tym przedziale, więc pochodna musi być ujemna, ale ten wniosek wyciągnęliśmy stosując ogólne twierdzenia o zachowaniu się funkcji).

Z definicji funkcji wynika natychmiast, bez obliczania pochodnych, że wszystkie jej wartości są nieujemne, więc $0=f(0)=f(6)$ jest nie tylko lokalnie najmniejszą wartością funkcji, ale również najmniejszą ze wszystkich w ogóle. Inaczej jest z liczbą $81=f(3)$. Teraz mamy do czynienia z maksimum lokalnym: w $f(9)=81\cdot 9>81$, zatem 81 nie jest największą wartością funkcji, jest nią jeśli ograniczymy dziedzinę do dostatecznie krótkiego przedziału zawierającego 3, zachęcamy do sprawdzenia, że największym przedziałem, na którym funkcja f przyjmuje swą największą wartość w punkcie 3 i w żadnym innym jest $(3-3\sqrt{2},3+3\sqrt{2})$. Ponieważ w punktach zerowania się drugiej pochodnej trzecia przyjmuje wartości różne od 0, więc punkty $3-\sqrt{3}$ oraz $3+\sqrt{3}$ są punktami przegięcia funkcji f. Oczywiście pierwszy z nich znajduje się między 0 i 3, a drugi między 3 i 6. Na półprostej $(-\infty,3-\sqrt{3}]$ funkcja f jest ściśle wypukła, na przedziale $[3-\sqrt{3},3+\sqrt{3}]$ – ściśle wklęsła, a na półprostej $[3+\sqrt{3},+\infty)$ znów ściśle wypukła. Jasne jest, że funkcja nie ma asymptot pionowych (jest ciągła w każdym punkcie prostej). Nie ma też ani poziomych ani ukośnych, bo $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\big(x^2(x-6)^2-ax-b\big)=+\infty$ niezależnie od wyboru liczb a i b. Zakończyliśmy badanie funkcji i jesteśmy już w stanie narysować jej wykres. ■

Przykład 7.19 Teraz zbadamy funkcję $\sqrt{1-e^{-x^2}}$. Wzór ten określa ją na całej prostej, więc jest ona ciągła. Jest też różniczkowalna we wszystkich punktach $x\neq 0$, bo dla takich punktów zachodzi nierówność $1-e^{-x^2}>0$, a na półprostej $(0,+\infty)$ funkcja pierwiastek kwadratowy jest różniczkowalna. Pierwsza pochodna jest równa $\frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}$. Jasne jest, że ten wzór nie działa w przypadku $x=0$. Spróbujmy obliczyć pochodną w punkcie 0 korzystając bezpośrednio z jej definicji. Mamy

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{1-e^{-x^2}}{x^2}}=\sqrt{\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-x^2}-1}{-x^2}}=1\,,$$

bo pierwiastek kwadratowy jest ciągły (przedostatnia równość) oraz $\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$ (ostatnia równość). W taki sam sposób stwierdzamy, że $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=-1$. Oznacza to, że funkcja nie ma pochodnej w punkcie 0, bowiem jednostronne pochodne są różne. Oznacza to, że w punkcie 0 wykres „załamuje się”, lub też: „ma ostrze”. Znajdziemy drugą pochodną:

$$f''(x) = \left(\frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}\right)' = \left(xe^{-x^2}\left(1-e^{-x^2}\right)^{-1/2}\right)' =$$

$$= e^{-x^2}\left(1-e^{-x^2}\right)^{-1/2} - 2x^2e^{-x^2}\left(1-e^{-x^2}\right)^{-1/2} - x^2e^{-2x^2}\left(1-e^{-x^2}\right)^{-3/2} =$$

$$= e^{-2x^2}\left(1-e^{-x^2}\right)^{-3/2}\left(e^{x^2}\left(1-2x^2\right)-1+x^2\right).$$

Wykażemy, że dla każdego $x \neq 0$ zachodzi nierówność $f''(x) < 0$. Wystarczy wykazać, że jeśli $y > 0$, to $e^y(1-2y)-1+y < 0$, piszemy y zamiast x^2. Mamy $(e^y(1-2y)-1+y)' = e^y(1-2y) - 2e^y + 1 = -2ye^y - e^y + 1 < 0$ dla $y > 0$, bo $-e^y + 1 < 0$ w przypadku $y > 0$. Ponieważ pochodna funkcji $e^y(1-2y)-1+y$ jest ujemna na półprostej $(0,+\infty)$, więc funkcja ta jest malejąca na półprostej $[0,\infty)$, a ponieważ jej wartością w punkcie 0 jest 0, więc jej wartości w punktach dodatnich są ujemne.* Z tego, że druga pochodna jest ujemna na każdej z półprostych $(-\infty,0)$ oraz $(0,+\infty)$ wynika, że na każdej z półprostych $(-\infty,0]$, $[0,+\infty)$ funkcja f jest ściśle wklęsła. Nie jest jednak ona ściśle wklęsła na całej prostej, choć jest ciągła w punkcie 0! Jeśli $\delta > 0$, to odcinek łączący punkty $\left(-\delta, \sqrt{1-e^{-\delta^2}}\right)$ i $\left(\delta, \sqrt{1-e^{-\delta^2}}\right)$ leży *nad* wykresem (z wyjątkiem końców) funkcji f zamiast pod wykresem. Musiałoby być odwrotnie, gdyby funkcja była ściśle wklęsła lub wklęsła na całej prostej lub choćby na przedziale $[-\delta,\delta]$.

Przykład 7.20 Naszkicujemy wykres funkcji f zdefiniowanej wzorem

$$f(x) = \sqrt[5]{\tfrac{7x^2-3}{9x^2-4}}$$

zdefiniowanej dla $x \neq \pm\frac{2}{3}$. Zadanie to mieli rozwiązać studenci (zaoczna ekonomia) we wrześniu 1996. Poza definicją funkcji podane były wzory na pierwszą i drugą pochodną tej funkcji:

$$f'(x) = -0{,}4x\left(9x^2-4\right)^{-6/5}\left(7x^2-3\right)^{-4/5},$$

$$f''(x) = 0{,}24(315x^4-91x^2-20)\left(9x^2-4\right)^{-11/5}\left(7x^2-3\right)^{-9/5}$$

Studenci zostali poinformowani, że druga pochodna przyjmuje wartość 0 wtedy i tylko wtedy, gdy $x = \pm\sqrt{\frac{91+\sqrt{33481}}{630}} \approx \pm 0{,}659458$. Jasne jest, że f jest funkcją parzystą,

* Można udowodnić, że $e^y(1-2y)-1+y<0$ dla $y>0$ innymi metodami. Np. można wykorzystać wzór $e^y = \sum_0^\infty \frac{y^n}{n!}$ – otrzymamy po prostych rachunkach szereg, którego wszystkie wyrazy w przypadku $y>0$ są ujemne. Inna metoda to stwierdzenie, że w przypadku $y<1$ zachodzi nierówność $e^y < \frac{1}{1-y}$, zatem dla wszystkich $y \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $e^y(1-y)<1$, wobec tego $e^y(1-2y)-1+y = e^y(1-y)-y(e^y-1)-1 < -y(e^y-1) < 0$ dla $y \neq 0$.

tzn. $f(-x) = f(x)$ dla każdej liczby x z dziedziny funkcji f. Wobec tego jej wykres jest symetryczny względem pionowej osi układu współrzędnych. Wystarczy więc badać f na jednej z półprostych $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$ oraz na jednym z przedziałów $\left(-\frac{2}{3}, 0\right]$, $\left[0, \frac{2}{3}\right)$. Trzeba więc ustalić na jakich przedziałach funkcja f rośnie, na jakich przedziałach maleje, na jakich przedziałach jest wypukła, a na jakich – wklęsła. Wyjaśnić, w jakich punktach dziedziny funkcja ma pochodną, a w jakich jej nie ma oraz obliczyć granice funkcji f, f', f'' w końcach przedziałów składających się na ich dziedziny. Również ustalić, gdzie są lokalne ekstrema i punkty przegięcia.

Z wzoru na pierwszą pochodną wynika, że jest ona określona dla $x \neq \pm\frac{2}{3}, \pm\sqrt{\frac{3}{7}}$, przy czym nieistnienie pochodnej w punktach $\pm\frac{2}{3}$ wynika z tego, że te punkty są poza dziedziną funkcji f i już to wystarcza, by nie miało sensu różniczkowanie funkcji w tych punktach. W punktach $\pm\sqrt{\frac{3}{7}}$ funkcja jest określona, więc teoretycznie nie ma przeszkód dla istnienia pochodnej, jednak wzór nie działa, bo nie można podnieść liczby 0 do potęgi o *wykładniku ujemnym*. Z wzoru na pochodną wynika jednak od razu, że $\lim\limits_{x\to-\sqrt{3/7}} f'(x) = +\infty$ oraz $\lim\limits_{x\to\sqrt{3/7}} f'(x) = -\infty$. Stąd, z definicji pochodnej i twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika, że $f'\left(\pm\sqrt{3/7}\right) = \mp\infty$. Znaczy to, że funkcja f *nie* jest w tych punktach różniczkowalna, bo choć pochodna istnieje, to jest nieskończona. W szczególności w tych punktach wykres ma styczną tyle, że — pionową. Funkcja f jest więc ściśle rosnąca na półprostej $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$ oraz na przedziale $\left(-\frac{2}{3}, 0\right]$. Na przedziale $\left[0, \frac{2}{3}\right)$ oraz na półprostej $\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$ funkcja f jest ściśle malejąca. Podkreślmy: funkcja rośnie na każdym z dwóch przedziałów, ale nie na ich sumie o czym przekonamy się za chwilę. Zacznijmy od oczywistego stwierdzenia: $\frac{3}{7} < \frac{4}{9}$. Wobec tego funkcja f przyjmuje wartości dodatnie na półprostej $(-\infty, -\frac{2}{3})$ oraz na przedziale $(-\sqrt{\frac{3}{7}}, 0)$. Mamy $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[5]{\frac{7x^2-3}{9x^2-4}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[5]{\frac{7-3/x^2}{9-4/x^2}} = \sqrt[5]{\frac{7}{9}}$. Dalej $\lim\limits_{x\to-\frac{2}{3}^-} f(x) = +\infty$, bo $f(x) > 0$ na półprostej $(-\infty, -\frac{2}{3})$ i licznik dąży do liczby różnej od 0, zaś mianownik do 0. Następnie $\lim\limits_{x\to-\frac{2}{3}^+} f(x) = -\infty$, bo tym razem funkcja jest ujemna, a licznik dąży do liczby różnej od 0, podczas gdy mianownik — do 0.

Zajmiemy się teraz wypukłością funkcji f. W tym celu ustalimy, gdzie jej druga pochodna f'' jest dodatnia, a gdzie — ujemna. We wzorze na f'' wyrażenia $7x^2 - 3$ oraz $9x^2 - 4$ podnoszone są do nieparzystych potęg, następnie z otrzymanych wyników wyciągany jest pierwiastek stopnia nieparzystego. Wynika stąd od razu, że na każdym z kolejnych przedziałów

$$\left(-\infty, -\tfrac{2}{3}\right), \quad \left(-\tfrac{2}{3}, -\sqrt{\tfrac{91+\sqrt{33481}}{630}}\right), \quad \left(-\sqrt{\tfrac{91+\sqrt{33481}}{630}}, -\sqrt{\tfrac{3}{7}}\right), \quad \left(-\sqrt{\tfrac{3}{7}}, 0\right)$$

pochodna f'' ma inny znak: na pierwszym z wymienionych przedziałów jest dodatnia, na drugim – ujemna, na trzecim – dodatnia i wreszcie na czwartym ujemna. Wynika stąd, że na półprostej $\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)$ i na przedziale $\left[-\sqrt{\frac{91+\sqrt{33481}}{630}},-\sqrt{\frac{3}{7}}\right]$ funkcja f jest wypukła, a na każdym z przedziałów $\left(-\frac{2}{3},-\sqrt{\frac{91+\sqrt{33481}}{630}}\right]$ i $\left[-\sqrt{\frac{3}{7}},0\right]$ — wklęsła. Wobec tego punkty $-\sqrt{\frac{91+\sqrt{33481}}{630}}$ i $-\sqrt{\frac{3}{7}}$ są punktami przegięcia funkcji f, $-\frac{2}{3}$ punktem przegięcia nie jest, bo leży poza dziedziną funkcji f (ponieważ nie istnieje granica $\lim\limits_{x\to-\frac{2}{3}} f(x)$, więc nie można sensownie dookreślić funkcji w tym punkcie!). Innych punktów przegięcia nie ma: jedynym punktem, który jeszcze nie został zbadany jest 0 — można by pomyśleć, że z wklęsłości funkcji f na przedziale $\left[-\sqrt{\frac{3}{7}},0\right]$ oraz z parzystości wynika wklęsłość funkcji na przedziale $\left[-\sqrt{\frac{3}{7}},\sqrt{\frac{3}{7}}\right]$, tak jest, ale trzeba się jeszcze wyraźnie powołać na różniczkowalność funkcji f w punkcie 0 (por. przykład poprzedni), jednak takiego twierdzenie nie udowodniliśmy, zresztą prościej jest skorzystać z tego, że na przedziale otwartym $\left(-\sqrt{\frac{3}{7}},\sqrt{\frac{3}{7}}\right)$ druga pochodna f'' funkcji f jest ujemna. Z tego, co do tej pory udało się nam ustalić, wynika, że prosta pozioma $y=\sqrt[5]{\frac{7}{9}}$ jest asymptotą poziomą funkcji f przy $x\to\pm\infty$, zaś proste pionowe $x=\pm\frac{2}{3}$ są obustronnymi asymptotami pionowymi funkcji f przy $x\to\pm\frac{2}{3}$. ■

Uwaga 7.11 *W istocie rzeczy nie trzeba w tym zadaniu wykonywać żadnych obliczeń świadczących o tym, że* $\frac{2}{3}>\sqrt{\frac{91+\sqrt{33481}}{630}}>\sqrt{\frac{3}{7}}$ *– ta nierówność wynika z tego, że* $\lim\limits_{x\to-\frac{2}{3}^+} f'(x)=+\infty$ *i* $\lim\limits_{x\to-\sqrt{\frac{3}{7}}^+} f'(x)=+\infty$, *więc na przedziale* $\left(-\frac{2}{3},-\sqrt{\frac{3}{7}}\right)$ *pochodna* f' *musi najpierw maleć, a potem rosnąć, co oznacza, że druga pochodna musi przynajmniej w jednym punkcie tego przedziału przyjąć wartość 0, jedynym kandydatem jest punkt* $-\sqrt{\frac{91+\sqrt{33481}}{630}}$. *Zachodzi przybliżona równość* $\sqrt{\frac{3}{7}}\approx 0{,}65465$, *więc różnica między punktami* $\sqrt{\frac{3}{7}}$ *i* $\sqrt{\frac{91+\sqrt{33481}}{630}}$ *jest mniejsza niż* $0{,}01$, *zatem program komputerowy rysujący wykresy funkcji może ją przeoczyć (jeśli nie zażądamy odpowiedniej dokładności w tej okolicy!).* $f(0{,}67)\approx 1{,}288$, $f(0{,}66)=-0{,}908$, *więc w tym przypadku zmiana wartości argumentu o* $0{,}01$ *powoduje zmianę wartości funkcji o około* $2{,}196$, *więc ponad 200 razy większą niż zmiana argumentu. Rysując wykres na papierze, przyjmując np. że jednostka to 1 cm musimy zwracać uwagę na przedziały długości* $0{,}1$ *mm, co jest mało realne ze względu na grubość ołówka,* *linie na rysunku komputerowym też muszą mieć jakąś grubość, więc jedyna rada, to obserwować okolice punktów przegięcia w dużym powiększeniu i stosować odcinki jednostkowych różnej długości na różnych osiach: na osi argumentów odcinek jednostkowy może być np. około 200 razy dłuższy niż odcinek jednostkowy na osi wartości funkcji.*

Podkreślić wypada, że w tego typu zadaniach pojawiających się regularnie na egzaminach w Uniwersytecie Warszawskim najważniejszym elementem rozwiązania jest **zgodność wykresu z rezultatami obliczeń przeprowadzonych przed jego naszkicowaniem**, ilość obliczeń, które ma przeprowadzić student jest minimalizowana. W rezultacie wiele osób, które są przekonane o tym, że dobrze opanowały rysowanie wykresu w liceach, otrzymuje stopnie znacznie poniżej swych oczekiwań, choć w zadaniach tego typu trudno doszukać się „trudnych" momentów. Zachęcamy czytelników do uważnego prześledzenia podanego przykładu i samodzielnego sporządzenia przynajmniej kilku wykresów funkcji spośród proponowanych w tym tekście. ■

W ostatnio prezentowanych przykładach widać było, że w licznych przypadkach można omijać różne obliczenia stosując odpowiednie twierdzenia o charakterze ogólnym. Dużą rolę w tych rozumowaniach odgrywa wzór Taylora. Nasuwa się naturalne pytanie: czy nie można powiedzieć czegoś więcej o reszcie r_n przynajmniej w sytuacji, z którą często mamy do czynienia, mianowicie w przypadku funkcji, która ma więcej pochodnych w otoczeniu punktu p niż n. Okazuje się, że coś powiedzieć można, ale jednak niezbyt dużo. Podamy przykład twierdzenia tego typu, jest ich oczywiście więcej. Stwierdzić jednak wypada, że pożytek z nich na ogół nie jest zbyt wielki, zasadniczo rzecz biorąc twierdzenie Peano to wszystko, co w przypadku ogólnym powiedzieć można.

Twierdzenie 7.12 (Lagrange'a o reszcie we wzorze Taylora)
Niech f będzie funkcją, która ma pochodną rzędu $n+1$ w każdym punkcie pewnego przedziału otwartego zawierającego p. Wtedy dla każdego punktu x z tego przedziału istnieje taki punkt y_x, leżący między punktami x i p, dla którego zachodzi równość

$$r_n(x-p) = \tfrac{f^{(n+1)}(y_x)}{(n+1)!}(x-p)^{n+1}\,.$$

Dowód. Niech

$$h(t) = \Big(f(x) - f(p) - \tfrac{f'(p)}{1!}(x-p) - \cdots - \tfrac{f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n\Big)(x-t)^{n+1} -$$
$$- (x-p)^{n+1}\Big(f(x) - f(t) - \tfrac{f'(t)}{1!}(x-t) - \cdots - \tfrac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\Big)\,.$$

Mamy $h(x) = 0 = h(p)$. W przedziale o końcach x, p funkcja f ma $(n+1)$–ą pochodną, więc funkcja h jest różniczkowalna na tym przedziale, a ponieważ przyjmuje równe wartości w jego końcach, więc w pewnym punkcie wewnętrznym y_x tego prze-

działu zachodzi równość $h'(y_x) = 0$. Zachodzi równość:
$$h'(t) = -(n+1)(x-t)^n \Big(f(x) - f(p) - \tfrac{f'(p)}{1!}(x-p) - \cdots - \tfrac{f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n \Big) + \\ + (x-p)^{n+1}\tfrac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n .$$
Z niej wynika od razu, że dla $t = y_x$ zachodzi równość:

$$f(x) = f(p) + \frac{f'(p)}{1!}(x-p) + \cdots + \frac{f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n + \frac{f^{(n+1)}(y_x)}{(n+1)!}(x-p)^{n+1} ,$$

czyli właśnie ta, którą chcieliśmy otrzymać. ■

Podkreślmy raz jeszcze: pozornie dzięki temu wzorowi wiemy coś więcej o reszcie. Kłopot polega na tym, że o punkcie y_x występującym we wzorze Lagrange'a nie wiemy nic, oprócz tego, że leży między p i x. To bardzo ogranicza możliwość wyciągania wniosków idących dalej niż te, które wynikają z wzoru Peano. Oczywiście czasem jest to możliwe. Jeśli np. $f(x) = \sin x$, to dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ mamy $|f^{(n+1)}(x)| \le 1$, bowiem z dokładnością do znaku pochodna dowolnego rzędu to sinus lub kosinus. Stąd w szczególności wynika, że w przypadku funkcji sinus zachodzi nierówność $|r_n(h)| \le \frac{1}{(n+1)!}|h|^{n+1}$. Otrzymaliśmy więc konkretne oszacowanie, jakiego z pewnością nie da się uzyskać z wzoru Peano. Przeczy to ostrzeżeniom wypowiadanym przed chwilą, ale tylko pozornie. W tym konkretnym przypadku istotą była dodatkowa wiedza o pochodnych dowolnego rzędu badanej funkcji i to ona w połączeniu z wzorem Lagrange'a pozwoliła na wyciągnięcie dalej idących wniosków.

Przykład 7.21 Zdefiniujmy funkcję f wzorami

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & \text{jeśli } x > 0; \\ 0, & \text{jeśli } x \le 0. \end{cases}$$

Jest jasne, że w każdym punkcie, być może z wyjątkiem punktu 0, funkcja ta ma pochodne wszystkich rzędów, czyli jest różniczkowalna nieskończenie wiele razy.

W punkcie 0 sytuacja nie jest już jasna, bo z prawej jego strony funkcja jest zdefiniowana inaczej niż z lewej, co mogłoby powodować kłopoty z ciągłością lub różniczkowalnością. Wykażemy poniżej, że w rzeczywistości funkcja f również w punkcie 0 jest różniczkowalna nieskończenie wiele razy oraz, że $f^{(n)}(0) = 0$ dla każdej liczby naturalnej n. Wyniknie stąd, że wielomiany Maclaurina tej funkcji są funkcjami zerowymi, a więc dla każdego naturalnego n zachodzi równość $f(x) = r_n(x)$, chodzi tu o resztę we wzorze Maclaurina, czyli o
$$r_n(x) = f(x) - f(0) - \tfrac{f'(0)}{1!}x - \tfrac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 - \cdots - \tfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n .$$
Oznacza to, że w tym konkretnym przypadku pomijanie reszty może być pozbawione

sensu, bo w niej są zawarte wszystkie informacje o funkcji f! Przykład ten omawiamy po to tylko, by przestrzec czytelników, że każda metoda ma swoje ograniczenia, że stosując twierdzenia poprawnie, tj. wtedy, gdy ich założenia są spełnione, możemy dochodzić do dziwnych lub mało interesujących wniosków. Po tych pesymistycznych uwagach zajmiemy się wykazaniem równości $f^{(n)}(0) = 0$.

Dla $n = 0$ równość ta wynika bezpośrednio z określenia funkcji f w punkcie 0: $f^{(0)}(0) = f(0) = 0$. Jest też jasne, że $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$ — dla $x < 0$ jest $f(x) = 0$. Mamy też $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} e^{-1/x} = 0$. Wykazaliśmy, że funkcja f jest ciągła w punkcie 0. Zauważmy teraz, że dla dowolnego $x < 0$ i dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość $f^{(n)}(x) = 0$, pochodna funkcji stałej jest równa 0, wartość pochodnej w punkcie zależy jedynie od zachowania się funkcji w otoczeniu tego punktu, w naszym przypadku rozpatrujemy chwilowo funkcję f na półprostej $(-\infty, 0)$. Teraz przeniesiemy się na półprostą $(0, \infty)$. Dla $x > 0$ mamy $f(x) = e^{-1/x}$, więc $f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-1/x}$, $f''(x) = \left(\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^3}\right) e^{-1/x}$, $f^{(3)}(x) = \left(\frac{1}{x^6} - \frac{6}{x^5} + \frac{6}{x^4}\right) e^{-1/x}$, ... Wobec tego dla każdej liczby naturalnej n istnieje taki wielomian w_n stopnia $2n$, że jeśli $x > 0$, to $f^{(n)}(x) = w_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x}$, np. $w_1(y) = y^2$, $w_2(y) = y^4 - 2y^3$, $w_3(y) = y^6 - 6y^5 + 6y^4$. Stąd od razu wynika, że $\lim\limits_{x \to 0^+} f^{(n)}(x) = \lim\limits_{y \to \infty} \frac{w_n(y)}{e^y} = 0$. Z definicji pochodnej i twierdzenia o wartości średniej wynika natychmiast, że

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} f'(c_x) = 0,$$

gdzie c_x jest punktem leżącym między 0 i x, więc $|c_x| < |x|$. Podobnie korzystając z już otrzymanego wzoru wnioskujemy, że $f''(0) = 0$ itd. Dowód został zakończony. ∎

Uwaga 7.13 (o funkcjach analitycznych) Funkcja opisana w poprzednim przykładzie może wydawać się nieco dziwna. Warto zaznaczyć, że takie zachowania się funkcji nie są możliwe w przypadku tzw. funkcji analitycznych, tj. takich funkcji nieskończenie wiele razy różniczkowalnych , które w pewnym otoczeniu dowolnie wybranego punktu dziedziny są równe sumie swego szeregu Taylora. W takim przypadku zerowanie się wszystkich pochodnych w pewnym punkcie powoduje, że funkcja jest stała w otoczeniu tego punktu, co jak widać z poprzedniego przykładu nie musi mieć miejsca w przypadku funkcji różniczkowalnej nieskończenie wiele razy. Istnienie takich funkcji nieskończenie wiele razy różniczkowalnych zauważone zostało nie od razu, stały się one istotnym narzędziem współczesnej matematyki, jednak można przyjąć, że w *elementarnych* zastosowaniach matematyki w chemii takie funkcje nie występują. ∎

Na tym kończymy przegląd zagadnień związanych z wielokrotnym różniczkowaniem funkcji.

Z A D A N I A

7.1 Obliczyć $f^{(1000)}(0)$, jeśli

a. $f(x)=\frac{1}{(x-1)(x-2)}$; **b.** $f(x)=\frac{x+1}{(x-1)(x-2))}$; **c.** $f(x)=e^{x^4}$.

7.2 Oszacować różnicę między funkcją $\sqrt{1+x}$ i jej wielomianem Taylora 2 stopnia o środku w punkcie $x_0=0$ na przedziale $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$.

7.3 Znaleźć $f'(x)$, $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$ oraz $f^{(n)}(x)$, jeżeli $f(x)=$

a. e^{2x} b. xe^x c. xe^{2x} d. x^2e^x

e. $\sin(2x)$ f. $\cos(3x)$ g. $\sin(x^2)$ h. $x^2\sin x$

i. $\sin^4 x+\cos^4 x$j. $\frac{x+2}{3x+5}$ k. $\ln\frac{x-3}{x+2}$ l. $\frac{1}{x}e^x$

7.4 Niech $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. Znaleźć $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{(4)}(x)$, $f^{(5)}(x)$, … i potem ogólny wzór na $f^{(n)}(x)$ (nieco trudniejsze: dla tych, którzy nie boja się popracować trochę głową).

7.5 Znaleźć liczby a,b,ω takie, że jeśli $f(x)=e^{-x/2}\big(a\cos(\omega x)+b\sin(\omega x)\big)$, to $f'''(x)=f(x)$ dla każdej liczby $x\in\mathbb{R}$.

7.6 Znaleźć przedziały monotoniczności oraz wypukłości lub wklęsłości funkcji f, jej lokalne ekstrema i punkty przegięcia. Znaleźć granice (jednostronne) funkcji f oraz granice (jednostronne) funkcji f' w końcach przedziałów składających się na ich dziedziny (niekoniecznie takie same), o ile istnieją. Naszkicować wykres funkcji f, tzn. ustalić na jakich przedziałach funkcja f jest monotoniczna, na jakich wypukła, na jakich wklęsła. Jeśli funkcja ma asymptoty, znaleźć je. W oparciu o uzyskane wyniki naszkicować wykres funkcji* f, jeśli $f(x)=$

a. $x^4(1+x)^{-3}$; **ą.** $\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$; **b.** $\sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}}$;

c. $1-x+\sqrt{\frac{x^3}{x+3}}$; **d.** $\ln\big(x+\sqrt{1+x^2}\big)$; **e.** $\sin x\sin 3x$;

ę. $(x-2)(x^2+1)^{-1/2}$; **f.** $x^{2/3}(x+1)^{-1/3}$; **g.** $f(x)=x^2(x-8)^2$;

h. $(x+1)^{5/3}\left(x^2+2x\right)^{1/3}$, wiadomo, że $f'(x)=\frac{1}{3}(x+1)^{2/3}\left(x^2+2x\right)^{-2/3}\left(7x^2+14x+2\right)$, niewymiernymi pierwiastkami funkcji f' są $x_5\approx-1.845$ oraz $x_6\approx-0.155$, ma ona też pierwiastek wymierny, $f''(x)=\frac{2}{9}(x+1)^{-1/3}\left(x^2+2x\right)^{-5/3}\left(14x^4+56x^3+61x^2+10x-4\right)$, pierwiastkami drugiej pochodnej są $x_1\approx0.177$, $x_2\approx-2.177$, $x_3\approx-0.492$, $x_4\approx-1.508$, są one niewymierne;

i. $\frac{\sqrt[3]{x^2+2x-7}}{\sqrt[3]{x^2+2x-5}}$, wiadomo, że $f'(x)=\frac{4}{3}(x+1)\left(x^2+2x-5\right)^{-\frac{4}{3}}\left(x^2+2x-7\right)^{-\frac{2}{3}}$,

---

** **UWAGA:** Zakładamy, że dziedziny funkcji są tak dobrane, że operacje definiujące funkcję są wykonalne oraz że dziedziny są maksymalnymi zbiorami o tej własności. Pierwiastki stopnia **nieparzystego** są określone dla wszystkich liczb rzeczywistych x.*

$f''(x) = -\frac{4}{9}\left(9x^4 + 36x^3 + 8x^2 - 56x - 181\right)\left(x^2 + 2x - 5\right)^{-\frac{7}{3}}\left(x^2 + 2x - 7\right)^{-\frac{5}{3}}$ oraz że pierwiastkami (jednokrotnymi) drugiej pochodnej są liczby $x_1 \approx 1.7$ oraz $x_2 \approx -3.7$, innych pierwiastków rzeczywistych funkcja f'' nie ma;

j. $\frac{x^3-5x}{\left(\sqrt{5+x^2}\right)^3}$, wiadomo, że $f'(x) = \frac{25(x-1)(x+1)}{\left(\sqrt{5+x^2}\right)^5}$ oraz $f''(x) = \frac{-75x(x^2-5)}{\left(\sqrt{5+x^2}\right)^7}$;

k. $\sqrt{x^3 - 3x}$, wiadomo, że $f'(x) = \frac{3x^2-3}{2\sqrt{x^3-3x}}$ i $f''(x) = \frac{3(x^4-6x^2-3)}{4(\sqrt{x^3-3x})^3}$ oraz że pierwiastkami drugiej pochodnej są dwie liczby $\pm\sqrt{3+2\sqrt{3}}$ oraz dwie liczby zespolone $\pm\sqrt{3-2\sqrt{3}}$;

l. $f(x) = (x+1)(x^2+2x)^{-1/3}$, wiadomo, że
$f'(x) = \frac{1}{3}(x^2+2x-2)(x^2+2x)^{-4/3}$ i $f''(x) = \frac{2}{9}(x+1)(8-2x-x^2)(x^2+2x)^{-7/3}$;

m. $f(x) = e^x(2+x)^{-1}$, wiadomo, że $f'(x) = e^x(1+x)(2+x)^{-2}$,
$f''(x) = e^x(2+x)^{-3}(2+2x+x^2)$;

n. $f(x) = e^{2x}(1+2x)^{-1}$, wiadomo, że $f'(x) = 4x(1+2x)^{-1}e^{2x}$,
$f''(x) = 4(1+4x^2)(1+2x)^{-3}e^{2x}$;

o. $f(x) = 9\sqrt[3]{\frac{3x^2-2}{2x^2-1}}$ dla $x \neq \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$, wiadomo, że
$f'(x) = 6x(3x^2-2)^{-2/3}(2x^2-1)^{-4/3}$,
$f''(x) = -2(54x^4 - 23x^2 - 6)(3x^2-2)^{-5/3}(2x^2-1)^{-7/3}$ oraz że $f''(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = \pm\frac{1}{18}\sqrt{69+15\sqrt{73}} \approx \pm 0.78$;

p. $f(x) = x^2(x-6)^2$, wiadomo, że $f'(x) = 4x(x-3)(x-6)$,
$f''(x) = 4(3x - 18x + 18)$;

q. $f(x) = (x^2-1)^{2/3}$, wiadomo, że $f'(x) = \frac{4}{3}x(x^2-1)^{-1/3}$,
$f''(x) = \frac{4}{9}(x^2-1)^{-4/3}(x^2-3)$;

r. $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x^2+1)}$, wiadomo, że $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}(x^2+1)^{-2/3}(2x^2+1)$,
$f''(x) = \frac{2}{9}x^{-4/3}(x^2+1)^{-5/3}(2x^4+5x^2-1)$, $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{33}-5}$;

s. $f(x) = \sqrt{1-e^{-x^2}}$, wiadomo, że $f'(x) = \dfrac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}$,
$f''(x) = -e^{-2x^2}\left(1-e^{-x^2}\right)^{-3/2}\left(e^{x^2}(2x^2-1)+1-x^2\right)$;

t. $f(x) = \sqrt[3]{x^5(1-x^2)}$, więc $f'(x) = \frac{1}{3}x^{2/3}(1-x^2)^{-2/3}(5-7x^2)$, $f''(x) = $
$= \frac{2}{9}x^{-1/3}(1-x^2)^{-5/3}(14x^4 - 23x^2 + 5)$, $\sqrt{\frac{5}{7}} \approx 0{,}845$, $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1 \approx$
$\approx 1{,}177$ lub $x = x_2 \approx -1{,}177$ lub $x = x_3 \approx 0{,}508$ lub $x = x_4 \approx -0{,}508$.

u. $f(x) = (x+1)^{5/3}(x+2x)^{1/3}$, więc $f'(x) = (x+1)^{2/3}(x+2x)^{-2/3}(7x^2+14x+2)$,
$f''(x) = \frac{2}{9}(x+1)^{-1/3}(x+2x)^{-5/3}(14x^4+56x^3+61x^2+10x-4)$, $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1 \approx 0{,}177$ lub $x = x_2 \approx -2{,}177$ lub $x = x_3 \approx -0{,}492$ lub $x = x_4 \approx -1{,}508$;
$7x^2 + 14x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = x_5 \approx -1{,}845$ lub $x = x_6 \approx -0{,}155$.

v. $f(x)=\sqrt[3]{x(3-x^2)}$, wiadomo, że
$f'(x)=x^{-2/3}(3-x^2)^{-2/3}(1-x^2)$ i $f''(x)=-2(1+x^2)(3-x^2)^{-5/3}x^{-5/3}$.

w. $f(x)=\frac{\sqrt[3]{x^2-2x-71}}{\sqrt[3]{x^2-2x-53}}$ dla $x\neq 1\pm 3\sqrt{6}$, wiadomo, że
$f'(x)=12(x-1)(x^2-2x-53)^{-4/3}(x^2-2x-71)^{-2/3}$,
$f''(x)=-36(x^4-4x^3-40x^2+88x-1341)(x^2-2x-53)^{-7/3}(x^2-2x-71)^{-5/3}$,
$f''(x)=0\Leftrightarrow x=x_1\approx 9{,}11$ lub $x=x_2\approx -7{,}11$.

x. $f(x)=\frac{\sqrt[3]{x^2+4x-68}}{\sqrt[3]{x^2+4x-50}}$ dla $x\neq -2\pm 3\sqrt{6}$, wiadomo, że
$f'(x)=12(x+2)(x^2+4x-50)^{-4/3}(x^2+4x-68)^{-2/3}$,
$f''(x)=-36(x^4+8x^3-22x^2-152x-1464)(x^2+4x-50)^{-7/3}(x^2+4x-68)^{-5/3}$,
$f''(x)=0\Leftrightarrow x=x_1\approx 6{,}11$ lub $x=x_2\approx -10{,}11$.

y. $f(x)=\frac{\sqrt[3]{x^2+6x-63}}{\sqrt[3]{x^2+6x-45}}$ dla $x\neq 3\pm 3\sqrt{6}$, wiadomo, że
$f'(x)=12(x+3)(x^2+6x-45)^{-4/3}(x^2+6x-63)^{-2/3}$,
$f''(x)=-36(x^4+12x^3+8x^2-168x-1629)(x^2+6x-45)^{-7/3}(x^2+6x-63)^{-5/3}$,
$f''(x)=0\Leftrightarrow x=x_1\approx 5{,}11$ lub $x=x_2\approx -11{,}11$.

z. $f(x)=\frac{(x^3-3x)^2}{(5+x^2)^3}$, wtedy $f'(x)=\frac{6x(x^2-3)(7x^2-5)}{(5+x^2)^4}$, $f''(x)=\frac{6(5-3x^2)(7x^4-90x^2+15)}{(5+x^2)^5}$,
przybliżone wartości pierwiastków f' to: 0; $\pm 1{,}732$; $\pm 0{,}845$,
przybliżone wartości pierwiastków f'' to: $\pm 1{,}291$; $\pm 3{,}562$; $\pm 0{,}411$;

ż. $f(x)=\sqrt[3]{(5x^2-7)(x^2-4)}$, więc $f'(x)=\frac{2}{3}x(10x^2-27)\big((5x^2-7)(x^2-4)\big)^{-2/3}$,
$f''(x)=\frac{2}{9}\left(2x^2-21\right)\left(25x^4-75x^2+108\right)\left((5x^2-7)(x^2-4)\right)^{-5/3}$. Zachodzą przybliżone równości $\sqrt{\frac{7}{5}}\approx 1{,}2$, $\sqrt{\frac{27}{10}}\approx 1{,}6$; $\sqrt{\frac{21}{2}}\approx 3{,}2$ i $75^2-4\cdot 25\cdot 108<0$.

ź. $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)(x-2)(x-3)}$ dla $x\in\mathbb{R}$, więc $f'(x)=\frac{3x^2-12x+11}{3((x-1)(x-2)(x-3))^{2/3}}$,
$f''(x)=-\frac{6x^2-24x+26}{9((x-1)(x-2)(x-3))^{5/3}}$, $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{3}}{3}$, $f''(x)\neq 0$.

7.7 Znaleźć najmniejszą taką liczbę L (stałą Lipschitza dla funkcji e^x), że jeśli $0\le x<y\le 10$, to $\left|e^y-e^x\right|\le L|y-x|$.

7.8 Znaleźć najmniejszą taką liczbę L (stałą Lipschitza dla funkcji $\operatorname{tg}x$), że jeśli $0\le x<y\le\frac{\pi}{3}$, to $\left|\operatorname{tg}y-\operatorname{tg}x\right|\le L|y-x|$.

7.9 Znaleźć najmniejszą taką liczbę L (stałą Lipschitza dla funkcji $\ln x$), że jeśli $2\le x<y<\infty$, to $\left|\ln y-\ln x\right|\le L|y-x|$.

7.10 Znaleźć najmniejszą taką liczbę L (stałą Lipschitza dla funkcji $\sqrt[3]{x}$), że jeśli $2\le x<y<\infty$, to $\left|\sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{x}\right|\le L|y-x|$.

7.11 Znaleźć najmniejszą taką liczbę L (stałą Lipschitza dla funkcji $\frac{x}{x^2+1}$), że jeśli $x<y$, to $\left|\frac{y}{y^2+1}-\frac{x}{x^2+1}\right|\le L|y-x|$.

7.12 Znaleźć najmniejszą taką liczbę L (stałą Lipschitza dla funkcji x^2), że jeśli $100\le x<y\le 1000$, to $\left|y^2-x^2\right|\le L|y-x|$.

7.13 Dowieść, że jeśli $x, y \in (2, \infty)$, to $|x^5 - y^5| \geq 80|x - y|$ przy czym równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$.

7.14 Dowieść, że jeśli $x, y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, to $|\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y| \geq |x - y|$ przy czym równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$.

7.15 Dowieść, że jeśli $x, y \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$, to $|\sin x - \sin y| \geq \frac{1}{2}|x - y|$ przy czym równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$.

7.16 Wykazać, że nie istnieje taka liczba $L > 0$, że jeśli $x, y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, to

$$|\sin x - \sin y| \geq L\,|x - y|.$$

7.17 Dowieść, że jeśli $x, y \in \mathbb{R}$, to

$$\tfrac{1}{2}|x - y| \leq |x + \tfrac{1}{2}\sin x - (y + \tfrac{1}{2}\sin y)| \leq \tfrac{3}{2}|x - y|$$

przy czym równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$.

7.18 Korzystając z wypukłości lub wklęsłości odpowiedniej funkcji wykazać, że

$$\tfrac{2\sqrt{2}}{\pi}x < \sin x < x \text{ dla } 0 < x < \tfrac{\pi}{4}.$$

7.19 Korzystając z wypukłości lub wklęsłości odpowiedniej funkcji wykazać, że

$$\operatorname{tg} x > 1 + 2(x - \tfrac{\pi}{4}) \text{ dla } \tfrac{\pi}{4} < x < \tfrac{\pi}{2}.$$

7.20 Korzystając z wypukłości lub wklęsłości odpowiedniej funkcji wykazać, że

$$\ln x < -1 + \ln 10 + 0{,}1x \text{ dla } 0 < x \neq 10.$$

7.21 Korzystając z wypukłości lub wklęsłości odpowiedniej funkcji wykazać, że

$$(1 + x)^a \leq 1 + ax \text{ dla } a \in (0, 1) \text{ i } x > -1$$

i wyjaśnić, dla jakich a, x zachodzi równość.

7.22 Korzystając z wypukłości lub wklęsłości odpowiedniej funkcji wykazać, że

$$(1 + x)^a \geq 1 + ax \text{ dla } a \notin (0, 1) \text{ i } x > -1$$

i wyjaśnić, dla jakich a, x zachodzi równość.

7.23 Korzystając z wypukłości lub wklęsłości odpowiedniej funkcji wykazać, że

$$\ln x < \tfrac{1}{2}(x^2 - 1) \text{ dla } 0 < x \neq 1.$$

7.24 Wykazać, że jeśli $a, b \in \mathbb{R}$, to równanie $\ln x = ax + b$ ma dokładnie dwa rozwiązania, dokładnie jedno rozwiązanie lub nie ma rozwiązań w ogóle.

7.25 Wykazać, że jeśli funkcje f i g są wypukłe, funkcja g jest niemalejąca, to funkcja $g \circ f$ jest *wypukła*, jeśli natomiast g jest nierosnąca, to złożenie $g \circ f$ *może* być funkcją *wklęsłą*, *wypukłą* lub nawet mieć punkty przegięcia.

7.26 Wykazać, że jeśli funkcja f jest wypukła na każdym z przedziałów $[a, b]$ i $[b, c]$ oraz różniczkowalna w punkcie b, to jest wypukła na $[a, c]$. Podać przykład świadczący o tym, że bez założenia różniczkowalności teza nie jest prawdziwa.

7.27 Obliczyć granicę $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$.

7.28 Obliczyć granicę $\lim\limits_{x \to 0} x^x$.

7.29 Obliczyć granicę $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \operatorname{tg} x$.

7.30 Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1000}(1.001)^{-x}$.

7.31 Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(\operatorname{tg} x-\sin x)}{(-\ln(\cos x))^a}$ w zależności od $a\in\mathbb{R}$.

7.32 Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\left(1-(\cos x)^{\sin x}\right)^2}{(\operatorname{tg} x)^6}$.

7.33 Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x^{2005}+\pi)}{\ln(x+\pi)}$.

7.34 Obliczyć $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x+2\sin x-3x}{(\operatorname{tg} x-x)\ln(\cos x)}$.

7.35 Obliczyć $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\ln(\cos x)+x\sin x}{x\,(2\operatorname{tg} x-\sin(2x))}$.

7.36 Obliczyć $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)-x\sin x}{x(\operatorname{tg} x-x)}$.

7.37 Obliczyć $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin x-2\operatorname{tg} x+\ln(1+x^3)}{x^5}$.

7.38 Obliczyć $\lim\limits_{x\to 0} (2\cos x+2x\operatorname{tg} x-e^x-e^{-x})x^{-4}$.

7.39 Obliczyć $\lim\limits_{x\to 0} (2\sin x+4\operatorname{tg} x-3e^x+3e^{-x})x^{-5}$.

7.40 Obliczyć $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-x^2}-\cos x}{x^4}$.

7.41 Obliczyć $\lim\limits_{x\to 0} x^{-2}(\ln(1+x)-\sin x)$.

7.42 Obliczyć $\lim\limits_{x\to 0} x^{-4}\left(e^{x^2}+\cos(x\sqrt{2})-2\cos(x^{2008})\right)$.

7.43 Obliczyć $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x\sin x}$.

7.44 Obliczyć $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1-\sin x}{1-\cos 2x}$.

7.45 Znaleźć $\lim\limits_{x\to\infty} (\ln(x+\sqrt{x})-\ln x)\cdot\sqrt[4]{1+x^2}$.

7.46 Znaleźć $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\left(\ln(1+x)\right)^3}$.

7.47 Znaleźć $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\cos x}-1\right)\operatorname{ctg}^2 x$.

7.48 Obliczyć $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x^{2006}+e)}{\ln(x^{2005}+e)}$

7.49 Obliczyć $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x^{2005}+\pi)}{e^{x+\pi}}$

7.50 Obliczyć $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x^2)-\operatorname{tg} x\sin x}{x(\operatorname{tg} x-x)}$.

7.51 Obliczyć $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)+x\sin x}{x(2\operatorname{tg} x-\sin(2x))}$.

7.52 Obliczyć $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left[\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}\,\right]\cdot\ln(\cos x)}{\ln(1+x)\cdot[\operatorname{tg}(2x)-2\operatorname{tg} x]\cdot\cos\left(x^{1138}\right)}$

7.53 Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt[25]{1+25\sin x}-\sqrt[26]{1+26\sin x}\right)\ln(\cos x)}{(\sin(\operatorname{tg} x)-\sin x)\cdot\cos\left(x^{966}\right)}$.

7.54 Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x^{2004}\cdot(\ln(1+\sin x)-x-\ln(\cos x))}{\sin(\operatorname{tg}^3 x)}$.

7.55 Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x\sqrt{2})+\operatorname{tg}(\sin^2 x)-\cos\left(x^{2003}\right)}{\left(x+\ln(1-\sin x)\right)\cdot(x+x^{2003})^2}$.

7.56 Obliczyć $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^{10}}-1-\sin^{10} x}{\sqrt[3]{6\ln(1+x-\sin x)}}$.

7.57 Obliczyć $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^{100}}-1-\sin^{50} x}{\sqrt[3]{3\ln(1+x-\operatorname{tg} x)}}$.

7.58 Obliczyć $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\left(\cos(x\sqrt{2}\,)\right)+x\operatorname{tg} x}{(\sqrt{1+x}-1)^3\cdot(x-\sin x)}$.

7.59 Obliczyć $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2 x}-\cos\left(x\sqrt{2}\right)-\sin^2\left(x\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt[5]{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt[11]{1+\sin x}\right)^3\ln(1+\operatorname{tg} x)}$.

7.60 Obliczyć $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2(x\sqrt{14})}-\cos(6x)-8\sin^2(2x)}{\left(\sqrt[5]{1+5\operatorname{tg} 7x}-\sqrt[11]{1+11\sin x}\right)^3\ln(1+\operatorname{tg}(2x))}$.

7.61 Obliczyć $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+4\sin^2(3x)}-\cos\left(x\sqrt{12}\right)-8\operatorname{tg}^2\left(x\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt[3]{1+6\sin x}-\sqrt[7]{1+7\operatorname{tg} x}\right)^2\ln(\cos(x\sqrt{2}))}$.

7.62 Znaleźć granicę $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2\sin^2 x}-\cos\left(x\sqrt{2}\right)-\operatorname{tg}^2\left(x\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt[3]{1+\sin x}-\sqrt[7]{1+\operatorname{tg} x}\right)^3\ln(\cos x)}$.

7.63 Znaleźć granicę $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2 x}-\cos\left(x\sqrt{2}\right)-\sin^2\left(x\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt[5]{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt[11]{1+\sin x}\right)^3\ln(1+\operatorname{tg} x)}$.

7.64 Obliczyć $\lim\limits_{x\to 0} \frac{[\sqrt[5]{1+5\sin x}-\sqrt[6]{1+6\sin x}]\cdot\operatorname{tg} x}{[\operatorname{tg} x+\sin x]\cdot[\cos\left(x^{966}\right)-\cos x]}$

7.65 Znaleźć granicę $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)(\operatorname{tg} x-x)e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}+\cos x-2\cos(x^{2012})}$.

7.66 Znaleźć granicę $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1-x^2)\cdot(\sin x-x)\cdot\cos(\sin(x^2))\cdot(\sqrt{36+x}-6)}{\operatorname{tg}^2 x\cdot(\sqrt{1-x^2}-\cos x)\cdot 2^{\cos(3x)-\operatorname{tg} x}}$.

7.67 Znaleźć granicę $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)\cdot(\operatorname{tg} x-x)\cdot\cos(\sin x)\cdot(\sqrt{64+x}-8)}{\sin^2 x\cdot(\sqrt{1-\operatorname{tg}(x^2)}-\cos x)\cdot 2^{\sin(3x)-\operatorname{tg} x}}$.

7.68 Wykazać, że niezależnie od wyboru liczb $a, b\in\mathbb{R}$ równanie $\operatorname{tg} x = ax+b$ ma w przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty i co najwyżej trzy różne pierwiastki rzeczywiste.

Wskazać parę liczb $a, b\in\mathbb{R}$, dla których równanie $\operatorname{tg} x = ax+b$ ma w przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty.

Wskazać parę liczb $a, b\in\mathbb{R}$, dla których równanie $\operatorname{tg} x = ax+b$ ma w przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ dokładnie trzy pierwiastki rzeczywiste.

Wskazać parę liczb $a, b\in\mathbb{R}$, dla których równanie $\operatorname{tg} x = ax+b$ ma w przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ dokładnie dwa pierwiastki rzeczywiste.

7.69 Niech $\varphi(x)=x(2x^2-1)^{9/7}(x^2-1)^{-9/7}$ dla $x\neq\pm1$. Wiemy, że jeśli $x^2\notin\{1,\frac12\}$, to zachodzą wzory $\varphi'(x)=\frac17(2x^2-1)^{2/7}(x^2-1)^{-16/7}(14x^4-39x^2+7)$ oraz $\varphi''(x)=\frac{18}{49}\,x(14x^4+39x^2-21)(x^2-1)^{-23/7}(2x^2-1)^{-5/7}$.
Wiemy też, że $14x^4-39x^2+7=0\Leftrightarrow x=x_1\approx-1{,}610,\ x=x_2\approx-0{,}439,$ $x=x_3\approx0{,}439$ lub $x=x_4\approx1{,}610$ oraz
$14x^4+39x^2-21=0\Leftrightarrow x=x_5\approx-0{,}680$ albo $x=x_6\approx0{,}680$.
Znaleźć $\varphi'(-\frac{1}{\sqrt2})$ oraz $\varphi'(\frac{1}{\sqrt2})$ lub wykazać, że te pochodne nie istnieją.
Znaleźć te przedziały, na których funkcja φ rośnie i te, na których maleje.
Znaleźć te przedziały, na których funkcja φ jest wypukła i te, na których jest wklęsła, znaleźć punkty przegięcia funkcji φ.
Wykazać, że jeśli $13<s<t$, to $\varphi\big(\frac47s+\frac37t\big)<\frac47\varphi(s)+\frac37\varphi(t)$.
W oparciu o uzyskane informacje naszkicować wykres funkcji φ.

7.70 Niech $f(x)=\sqrt[3]{e^{-3x}-e^{-9x}}$. Wiemy, że $f'(x)=e^{-3x}(3-e^{6x})(e^{6x}-1)^{-2/3}$, $f''(x)=e^{-3x}(9-18e^{6x}+e^{12x})(e^{6x}-1)^{-5/3}$, $\ln3\approx1{,}10$.
Funkcja $9-18e^{6x}+e^{12x}$ ma dwa pierwiastki: $x_1\approx-0{,}11$ i $x_2\approx0{,}48$.
Rozstrzygnąć, czy istnieje $f'(0)$. Jeśli istnieje, obliczyć ją.
Rozstrzygnąć, czy istnieje $f''(0)$. Jeśli istnieje, obliczyć ją.
Znaleźć te przedziały, na których funkcja f maleje oraz te, na których rośnie.
Znaleźć te przedziały, na których funkcja f jest wypukła lub wklęsła.
Naszkicować wykres funkcji f korzystając z uzyskanych informacji.

7.71 Niech $f(x)=x^{2/3}(1-x)^{4/3}(x^2+1)^{-2/3}$. Zachodzą wtedy równości:
$f'(x)=\frac23(-1+3x+x^2+x^3)x^{-1/3}(1-x)^{1/3}(x^2+1)^{-5/3}$,
$f''(x)=-\frac29(1+6x+7x^2-32x^3+7x^4+2x^5+x^6)x^{-4/3}(1-x)^{-2/3}(x^2+1)^{-8/3}$.
Wielomian $-1+3x+x^2+x^3$ ma jeden pierwiastek: $x_1\approx0{,}3$, jest on pojedynczy, a wielomian $1+6x+7x^2-32x^3+7x^4+2x^5+x^6$ ma dwa pierwiastki: $x_2\approx0{,}69$ i $x_3\approx1{,}86$, oba pojedyncze.
Rozstrzygnąć, czy istnieje $f'(0)$. Jeśli istnieje, obliczyć ją.
Rozstrzygnąć, czy istnieje $f''(1)$. Jeśli istnieje, obliczyć ją.
Znaleźć te przedziały, na których funkcja f maleje oraz te, na których rośnie.
Znaleźć te przedziały, na których funkcja f jest wypukła lub wklęsła.
Naszkicować wykres funkcji f korzystając z uzyskanych informacji.

7.72 Niech $w(x)=3x^4-16x^3-6x^2+48x$ dla $x\in\mathbb{R}$.i Znaleźć te przedziały, na których funkcja f jest ściśle rosnąca oraz te na których jest ściśle malejąca. W zależności od $a\in\mathbb{R}$ znaleźć liczbę takich $x\in\mathbb{R}$, dla których $f(x)=a$.

7.73 Znaleźć granicę $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\Big(\frac{1}{\cos^2x}-\cos^2x+\ln\frac{1-x^2}{1+x^2}\Big)\cdot\sqrt[2013]{1+2013x^{2013}}}{\big(\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}\big)^2\cdot\cos(x^{2013})}$.

7.74 Niech $\varphi(x) = \sqrt[3]{x^2(x-1)(x+2)}$ dla $x \in \mathbb{R}$. Wiadomo, że jeśli $x \notin \{-2,0,1\}$, to zachodzą wzory $\varphi'(x) = \frac{1}{3}x^{-1/3}(x-1)^{-2/3}(x+2)^{-2/3}(4x^2+3x-4)$ oraz $\varphi''(x) = \frac{2}{9}(2x^4+3x^3-10x^2-4)x^{-4/3}(x-1)^{-5/3}(x+2)^{-5/3}$. Wiadomo również, że $4x^2+3x-4=0 \Leftrightarrow x=x_1 \approx -1{,}443$ lub $x=x_2 \approx 0{,}693$ oraz że

$$2x^4+3x^3-10x^2-4=(x-x_3)(x-x_4)(2x^2+px+q),$$

gdzie $x_3 \approx -3{,}15082$, $x=x_4 \approx 1{,}744$ a p i q są takimi liczbami rzeczywistymi, że $p^2 < 8q$. Znaleźć $\varphi'(-2)$, $\varphi'(0)$ i $\varphi'(1)$ lub wykazać, że niektóre z tych pochodnych nie istnieją. Znaleźć te przedziały, na których funkcja φ rośnie i te, na których maleje. Znaleźć te przedziały, na których funkcja φ jest wypukła i te, na których jest wklęsła, znaleźć punkty przegięcia funkcji φ. Rozstrzygnąć, czy isnieją takie $a,b\in\mathbb{R}$, że $\lim\limits_{x\to\infty}(\varphi(x)-ax-b)=0$. W oparciu o uzyskane informacje naszkicować wykres funkcji φ.

7.75 Niech $f(x) = \sqrt[3]{x^2(1-x)(x-2)^2}$. Dla $x \notin \{0,1,2\}$ zachodzą wtedy równości: $f'(x) = -\frac{1}{3}x^{-1/3}(1-x)^{-2/3}(x-2)^{-1/3}(5x^2-10x+4)$ oraz
$f''(x) = \frac{2}{9}x^{-4/3}(1-x)^{-5/3}(x-2)^{-4/3}(5x^4-20x^3+22x^2-4x-4)$.
$5x^2-10x+4=0 \Longleftrightarrow x=x_1=\frac{5-\sqrt{5}}{5} \approx 0{,}55$ lub $x=x_1=\frac{5+\sqrt{5}}{5} \approx 1{,}45$,
$5x^4-20x^3+22x^2-4x-4=0 \Longleftrightarrow x=x_3 \approx -0{,}31$ lub $x=x_4 \approx 2{,}31$,
$f^{(3)}(x_3) \neq 0 \neq f^{(3)}(x_4)$. Rozstrzygnąć, czy istnieją pochodne $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$. Istniejące obliczyć. Znaleźć te przedziały, na których funkcja f maleje oraz te, na których rośnie. Znaleźć te przedziały, na których funkcja f jest wypukła oraz te, na których jest wklęsła. Korzystając z uzyskanych informacji naszkicować wykres funkcji f.

7.76 Znaleźć granicę $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)\cdot(\sqrt{1+x^2}+\cos x-2\cos(x^{2013}))\sqrt{1+\sin(\operatorname{tg} x)}}{2^{\sin(3x)-\operatorname{tg} x}\cdot(\operatorname{tg} x-\sin x+\frac{1}{2}\ln(1-x^3))}$.

7.77 Niech $f(x) = \sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)^2}$. Dla $x \notin \{0,1,2\}$ zachodzą wtedy równości:
$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}(x-1)^{-1/3}(x-2)^{-1/3}(5x^2-9x+2)$ oraz
$f''(x) = \frac{2}{9}x^{-5/3}(x-1)^{-4/3}(x-2)^{-4/3}(5x^4-18x^3+16x^2-4)$.
$5x^2-9x+2=0 \Longleftrightarrow x=x_1=\frac{9-\sqrt{41}}{10} \approx 0{,}26$ lub $x=x_2=\frac{9+\sqrt{41}}{10} \approx 1{,}54$,
$5x^4-18x^3+16x^2-4=0 \Longleftrightarrow x=x_3 \approx -0{,}41$ lub $x=x_4 \approx 2{,}25$, przy czym $f^{(3)}(x_3) \neq 0 \neq f^{(3)}(x_4)$. Rozstrzygnąć, czy istnieją pochodne $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$. Istniejące obliczyć. Znaleźć te przedziały, na których funkcja f maleje oraz te, na których rośnie. Znaleźć te przedziały, na których funkcja f jest wypukła oraz te, na których jest wklęsła. Korzystając z uzyskanych informacji naszkicować wykres funkcji f.

7.78 Znaleźć $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2+\operatorname{tg} x)\cdot(1+x^2+\cos(x\sqrt{2})-2\cos(x^{44}))\sqrt{1+\operatorname{tg}(\sin x)}}{\ln(1+\operatorname{tg} x)\cdot 2^{\sin(3x)-\operatorname{tg} x}\cdot(\operatorname{tg} x+\sin x-2\ln(1+x)-x^2)}$.