Badanie funkcji różniczkowalnych

Badanie funkcji za pomocą pochodnych: ekstrema i monotoniczność

Ostatnie poprawki — 0:35, 7 stycznia 2014 r.

Twierdzenie 6.1 (o monotoniczności funkcji różniczkowalnych)
Załóżmy, że f jest funkcją ciągłą w każdym punkcie przedziału P i różniczkowalną we wszystkich jego punktach wewnętrznych. Przy tych założeniach funkcja f jest:

— niemalejąca ($x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$) wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna f' jest nieujemna,

— nierosnąca ($x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$) wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna f' jest niedodatnia.

Dowód. Funkcja jest niemalejąca wtedy i tylko wtedy, gdy jej iloraz różnicowy $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ jest nieujemny, bo wtedy i tylko wtedy, gdy licznik i mianownik tego ułamka mają taki sam znak. Granica funkcji nieujemnej, jeśli istnieje, to jest nieujemna. Wobec tego pochodna funkcji niemalejącej we wszystkich tych punktach przedziału P, w których istnieje, jest nieujemna.
Załóżmy teraz, że pochodna w punktach wewnętrznych przedziału P jest nieujemna. Załóżmy, że $x, y \in P$ i że $x < y$. Z twierdzenia o wartości średniej zastosowanego do przedziału $[x, y]$ wynika, że $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(z) \geq 0$ dla pewnego punktu $z \in (x, y)$. Wykazaliśmy więc, że iloraz różnicowy funkcji f jest nieujemny, więc licznik tego ułamka, czyli różnica $f(y) - f(x)$, też jest nieujemny, zatem jest ona niemalejąca. Przypadek funkcji nierosnącej sprowadzamy jak zwykle do pierwszego zastępując funkcję f funkcją przeciwną $-f$. Dowód został zakończony. ■

Wniosek 6.2 (charakteryzujący funkcję stałą)
Funkcja ciągła na przedziale P, różniczkowalna we wszystkich jego punktach wewnętrznych jest stała wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(x) = 0$ dla każdego punktu wewnętrznego przedziału P.*

Dowód. Funkcja stała jest jednocześnie niemalejąca i nierosnąca, zatem jej pochodna jest jednocześnie nieujemna i niedodatnia, czyli zerowa. Jeśli natomiast pochodna jest zerowa, czyli jednocześnie nieujemna i niedodatnia, to funkcja jest zarówno niemalejąca, jak i nierosnąca, więc jest stała. Dowód został zakończony. ■

Twierdzenie 6.3 (o ścisłej monotoniczności funkcji różniczkowalnych)
Zakładamy jak poprzednio, że funkcja f jest ciągła w każdym punkcie przedziału P oraz że jest różniczkowalna w każdym punkcie wewnętrznym przedziału P. Przy

---

* Można z łatwością ten wniosek udowodnić bezpośrednio, bez powoływania się na właśnie wykazane twierdzenie.

tych założeniach funkcja f jest:

— ściśle rosnąca wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna jest nieujemna oraz między każdymi dwoma punktami przedziału P znajduje się punkt, w którym pochodna f' jest dodatnia,

— ściśle malejąca wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna jest niedodatnia oraz między każdymi dwoma punktami przedziału P znajduje się punkt, w którym pochodna f' jest ujemna.

Dowód. Załóżmy, że funkcja f jest ściśle rosnąca. Wobec tego jest niemalejąca, więc na podstawie poprzedniego twierdzenia jej pochodna jest nieujemna. Jeśli $x, y \in P$ i $x < y$, to w pewnym punkcie wewnętrznym z przedziału $[x, y]$ zachodzi nierówność $f'(z) > 0$, bowiem gdyby pochodna równa była 0 w każdym punkcie przedziału $[x, y]$, to funkcja f byłaby stała na tym przedziale, więc nie byłaby *ściśle* rosnąca. Zajmiemy się dowodem implikacji przeciwnej. Zakładamy teraz, że f jest funkcją ciągłą, której pochodna jest nieujemna. Z poprzedniego twierdzenia wnioskujemy, że f jest funkcją niemalejącą. Jeśli nie jest ona ściśle rosnąca, to istnieją punkty $x, y \in P$, takie że $x < y$ i $f(x) = f(y)$. Z tego, że $x < z < y$ wynika, że zachodzi nierówność $f(x) \leq f(z) \leq f(y) = f(x)$, co oznacza, że $f(x) = f(z)$, a to z kolei oznacza, że f jest funkcją stałą na przedziale $[x, y]$, a z tego wynika, że $f'(z) = 0$ dla każdego punktu $z \in [x, y]$, wbrew założeniu. Druga część twierdzenia może być uzyskana z pierwszej przez rozważenie funkcji $-f$ zamiast funkcji f. Dowód został zakończony. ■

Twierdzenie 6.4 (o lipschitzowskości funkcji różniczkowalnej)
Zakładamy jak w twierdzeniach poprzednich, że funkcja f jest określona na pewnym przedziale P, że jest na nim ciągła i że jest różniczkowalna we wszystkich punktach wewnętrznych tego przedziału. Przy tych założeniach funkcja f spełnia warunek Lipschitza ze stałą $L \geq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $L \geq \sup\{|f'(t)|: \quad t \in \mathrm{int}P\}$.*

Dowód. Jeśli $x, y \in P$, to na mocy twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej istnieje punkt z leżący między x i y, taki że

$$|f(x) - f(y)| = |f'(z)(x - y)| \leq |x - y| \cdot \sup\{|f'(t)|: \quad t \in \mathrm{int}P\},$$

co kończy dowód twierdzenia w jedną stronę. Dowód w drugą stronę wynika natychmiast z tego, że jeśli funkcja spełnia warunek Lipschitza ze stałą L, to dla dowolnych $x, y \in P$ zachodzi nierówność $\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leq L$, zatem $|f'(x)| = \lim\limits_{y \to x} \left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| \leq L$, zatem $\sup\{|f'(t)|: \quad t \in \mathrm{int}P\} \leq L$. Dowód został zakończony. ■

Udowodnimy teraz twierdzenie, które powtórnie uświadomi nam, że funkcja wyk-

* $\mathrm{int}\,P$ oznacza zbiór złożony ze wszystkich punktów wewnętrznych przedziału P, czyli przedział otwarty, którego końce pokrywają się z końcami przedziału P.

ładnicza to taka, dla której tempo wzrostu jest proporcjonalne do jej wartości.

Twierdzenie 6.5 (o wzroście wykładniczym.)
Jeśli $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją różniczkowalną, dla której istnieje liczba rzeczywista k taka, że równość $f'(x) = kf(x)$ zachodzi dla wszystkich $x \in (a,b)$, to istnieje stała C taka, że równość $f(x) = Ce^{kx}$ ma miejsce dla wszystkich $x \in (a,b)$.

Dowód. Z założenia wynika, że dla każdej liczby $x \in (a,b)$ zachodzi równość
$$\left(f(x)e^{-kx}\right)' = f'(x)e^{-kx} + f(x)\left(-ke^{-kx}\right) = kf(x)e^{-kx} - kf(x)e^{-kx} = 0\,.$$
Z tego stwierdzenia wynika, że funkcja przypisująca liczbie x liczbę $f(x)e^{-kx}$ jest stała na przedziale (a,b), zatem istnieje liczba rzeczywista C taka, że dla każdego $x \in (a,b)$ zachodzi równość $f(x)e^{-kx} = C$, czyli $f(x) = Ce^{kx}$. ■

Czytelnik zwróci uwagę na to, że teraz zakładamy coś o zachowaniu się funkcji na pewnym przedziale, a nie na całej prostej oraz na to, że dowód jest bardzo krótki.

Przykład 6.1 Niech $f(x) = \frac{1}{x}$. Mamy $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$. Funkcja ma więc ujemną pochodna w każdym punkcie swej dziedziny $(-\infty,0) \cup (0,\infty)$. Mamy też $f(-1) = -1 < 1 = f(1)$, wobec tego funkcja ta nie jest nierosnąca, tym bardziej nie jest malejąca. Przyczyną tego zjawiska jest to, że dziedzina tej funkcji *nie* jest przedziałem — malutka, raptem jednopunktowa dziura w dziedzinie, powoduje, że teza przestaje być prawdziwa! Na każdym *przedziale*, na którym jest zdefiniowana, funkcja ta jest nierosnąca, a nawet ściśle malejąca. ■

Przykład 6.2 Niech $f(x) = \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)$. Mamy $f'(x) = \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$ i wobec tego również $(f')'(x) = -\sin x + x$. Udowodniliśmy wcześniej, że jeśli $x > 0$, to $\sin x < x$ (podstawowy fakt użyty w dowodzie to: cięciwa jest krótsza od łuku, na niej opartym). Z tej nierówności wynika, że $(f')'(x) > 0$ dla każdego $x > 0$. Wobec tego funkcja f' jest ściśle rosnąca na półprostej domkniętej $[0,\infty)$. Stąd wynika, że
$$f'(x) > f'(0) = \cos 0 - \left(1 - \frac{0^2}{2}\right) = 0 \text{ dla każdego } x > 0\,.$$
Wobec tego funkcja f ma dodatnią pochodną na półprostej otwartej $(0,\infty)$, jest ściśle rosnąca na półprostej domkniętej $[0,\infty)$, zatem dla $x > 0$ zachodzi nierówność
$$f(x) > f(0) = 0 - \left(0 - \frac{0^3}{6}\right) = 0\,.$$
Wykazaliśmy w ten sposób, że $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$ dla każdej liczby dodatniej x. ■

Przykład 6.3 Zajmując się funkcja wykładniczą o podstawie e w rozdziale pierwszym wykazaliśmy, że dla każdej liczby rzeczywistej x spełniona jest nierówność $e^x \geq 1 + x$, później zresztą wzmocniona. Wiemy, że pochodną funkcji e^x jest ta sama funkcja. Wartością tej pochodnej w punkcie 0 jest liczba $e^0 = 1$. Wobec tego równanie stycznej do wykresu funkcji wykładniczej w punkcie $(0,1)$ ma postać $y = 1\cdot(x-0)+e^0 = x+1$. Wobec tego wspomniana nierówność oznacza, że wykres funkcji wykładniczej o podstawie e znajduje się nad styczną do siebie w punkcie $(0,0)$. Przekonamy się później, że jest to związane z tzw. wypukłością funkcji wykładniczej. ∎

Przykład 6.4 Wykażemy, że jeśli $x>0$, to $\ln(1+x) > \frac{x}{1+x}$. Zdefiniujmy pomocniczą funkcję f wzorem $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$. Wtedy

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2} > 0\,.$$

Wobec tego funkcja f jest ściśle rosnąca na półprostej $[0,\infty)$. Ponieważ $f(0)=0$, więc dla $x>0$ mamy $f(x)>0$. ∎

Przykład 6.5 Wspomnieliśmy w jednym z poprzednich przykładów nierówność $\sin x < x$, która ma miejsce dla $x>0$. Pochodną funkcji sinus jest funkcja kosinus. W punkcie 0 wartość pochodnej to $\cos 0 = 1$. Wynika stąd, że równanie stycznej do wykresu funkcji sinus w punkcie $(0,0)$ przybiera postać $y = 1\cdot(x-0)+\sin 0 = x$. Wobec tego nierówność $x > \sin x$ oznacza, że na półprostej $(0,\infty)$ wykres funkcji sinus znajduje się pod styczną do tegoż wykresu w punkcie $(0,0)$. Przekonamy się później, że jest to związane z tzw. wklęsłością funkcji sinus na przedziale $[0,\pi]$, dla $x\ge\pi$ nierówność zachodzi, bo wartości funkcji sinus są mniejsze niż $1<\pi$. ∎

Przykład 6.6 Niech $f(x) = e^x - (1+x+\frac12 x^2)$. Mamy $f'(x) = e^x-(1+x)\ge 0$, więc $(f')'(x) = e^x - 1 > 0$, dla $x>0$ oraz $(f')'(x) = e^x-1<0$ dla $x<0$. Wynika stąd, że funkcja f' jest ściśle rosnąca na półprostej $[0,\infty)$ oraz ściśle malejąca na półprostej $(-\infty,0]$. Wobec tego najmniejszą wartością funkcji f' jest liczba $f'(0) = e^0-1=0$. Oznacza to, że dla $x\neq 0$ zachodzi nierówność $f'(x)>0$, czyli $e^x > 1+x$. Ponieważ funkcja f' przyjmuje wartości dodatnie na całej prostej z wyjątkiem jednego punktu, funkcja f jest ściśle rosnąca na całej prostej. Mamy więc $f(x) > f(0) = =e^0 - (1+0+\frac12 0^2) = 0$ dla $x>0$ oraz $f(x)<f(0)=0$ dla $x<0$, zatem dla $x>0$ zachodzi nierówność $e^x > 1+x+\frac12 x^2$, zaś dla $x<0$ — nierówność $e^x < 1+x+\frac12 x^2$. Rozumując w ten sam sposób można wykazać, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność $e^x \ge 1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3$, przy czym nierówność jest ostra dla $x\neq 0$. Uogólnienie pozostawiamy czytelnikom w charakterze prostego ćwiczenia. Wart też zauważyć, że uzyskujemy teraz z łatwością nierówności, których wykazanie bez użycia rachunku różniczkowego było dosyć trudne. ∎

Przykład 6.7 *Ten przykład będzie nieco dłuższy. Należy go przestudiować z uwagą. Dotyczy to również tych studentów, którzy wynieśli ze szkoły sporą wiedzę matematyczną, bowiem stosowana tu metoda będzie używana później również w odniesieniu*

do funkcji wielu zmiennych, a w większości szkół nie jest stosowana.
Niech $a \geq b > 0$ będą liczbami rzeczywistymi. P niech oznacza prostokąt, którego jeden bok ma długość a, a drugi — b. Z prostokąta P wycinamy cztery kwadraty o boku $x \in \left(0, \frac{b}{2}\right)$ zawierające cztery wierzchołki P tak, że pole P zmniejsza się o $4x^2$. Następnie zaginamy „wystające" części powstałego dwunastokąta (niewypukłego) tak, by powstało pudełko o wymiarach $a-2x$, $b-2x$, x. Dla jakiego x pojemność otrzymanego pudełka będzie największa?

Rozwiązanie. Niech $V(x) = x(a-2x)(b-2x)$ będzie pojemnością pudełka. V jest funkcją ciągłą, a nawet różniczkowalną w każdym punkcie swej dziedziny. Z punktu widzenia pojemności pudełka dziedziną funkcji V jest przedział $\left(0, \frac{b}{2}\right)$, ale można tę funkcję rozpatrywać na przedziale domkniętym $\left[0, \frac{b}{2}\right]$. Na przedziale $\left[0, \frac{b}{2}\right]$ funkcja V , jako ciągła , przyjmuje wartość najmniejszą oraz wartość największą.

Ponieważ $V(0) = V\left(\frac{b}{2}\right) = 0$ i $V(x) > 0$ dla $x \in \left(0, \frac{b}{2}\right)$, więc najmniejsza wartość przyjmowana jest w końcach przedziału $\left[0, \frac{b}{2}\right]$, zaś największa — w pewnym punkcie wewnętrznym x_0 tego przedziału.

Ponieważ funkcja V jest różniczkowalna w punkcie x_0, więc $V'(x_0) = 0$. Wystarczy zatem znaleźć punkty w przedziale $\left(0, \frac{b}{2}\right)$, w których pochodna funkcji V przyjmuje wartość 0 i stwierdzić, w którym z nich V ma największą wartość. Takie punkty są co najwyżej dwa, bo V jest wielomianem trzeciego stopnia, więc V' jest wielomianem kwadratowym.

$V'(x) = 12x^2 - 4(a+b)x + ab$. Wiemy, że ten wielomian ma co najmniej jeden pierwiastek w przedziale $\left(0, \frac{b}{2}\right)$ (nie ma potrzeby sprawdzać, że jego wyróżnik jest dodatni, bo to wynika z istnienia x_0 !).* Możemy teraz zastosować to samo rozumowanie do badania funkcji V na przedziale $\left[\frac{b}{2}, \frac{a}{2}\right]$. Wewnątrz tego przedziału funkcja V przyjmuje wartości ujemne, na końcach — zero. Wobec tego swą najmniejszą wartość na $\left[\frac{b}{2}, \frac{a}{2}\right]$ funkcja V przyjmuje wewnątrz przedziału i wobec tego jej pochodna V' przyjmuje wartość 0 w co najmniej jednym punkcie tego przedziału.

Z tego rozumowania wynika, że w każdym z przedziałów $\left(0, \frac{b}{2}\right)$, $\left(\frac{b}{2}, \frac{a}{2}\right)$ pochodna V' funkcji V ma co najmniej jeden pierwiastek, a ponieważ V' ma dokładnie dwa pierwiastki, więc w każdym z wymienionych przedziałów ma dokładnie jeden pierwiastek. Tak się dzieje w przypadku $a > b$. W przypadku $a = b$ sytuacja jest nieco inna: $V'\left(\frac{b}{2}\right) = 0$, co sprawdzamy bezpośrednim rachunkiem (ogólnie: jeśli liczba x_1 jest podwójnym pierwiastkiem funkcji f, tzn. $f(x) = (x-x_1)^2 g(x)$ dla pewnej funkcji g różniczkowalnej w x_1, to $f(x_1) = 0 = f'(x_1)$) i wobec tego również w tym

* Drugi pierwiastek wielomianu V' też jest dodatni, bo iloczyn pierwiastków tego wielomianu jest równy $\frac{ab}{12}$, jest więc dodatni, zatem oba pierwiastki maja ten sam znak, ale z tego korzystać nie będziemy.

przypadku w przedziale $\left(0,\frac{b}{2}\right)$ funkcja V' może mieć co najwyżej jeden pierwiastek, więc ma dokładnie jeden. Udowodniliśmy w ten sposób, że w przedziale $\left(0,\frac{b}{2}\right)$ funkcja V' ma dokładnie jeden pierwiastek x_0, którym jest mniejszy z dwóch pierwiastków tej funkcji, a liczba $V(x_0)$ jest największą wartością funkcji V przyjmowaną na przedziale $\left(0,\frac{b}{2}\right)$. Oczywiście $x_0 = \frac{4(a+b)-\sqrt{[4(a+b)]^2-4\cdot 12ab}}{2\cdot 12} = \frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2-ab}}{6}$.

Uwaga 6.6 Nie zajmowaliśmy się znakiem pochodnej V', bo nie było potrzeby ustalać na jakich przedziałach funkcja V rośnie, a na jakich maleje. Oczywiście można było postąpić inaczej: stwierdzić, że na przedziale $(0,x_0)$ pochodna V' funkcji V jest dodatnia, więc V na tym przedziale rośnie, a na przedziale $\left(x_0,\frac{b}{2}\right)$ pochodna V' jest ujemna, więc na tym przedziale funkcja V maleje. Z naszego rozumowania to też wynika, bo na przedziale $(0,x_0)$ pochodna V' nie przyjmuje wartości 0 , ma zatem ten sam znak we wszystkich punktach tego przedziału, zatem funkcja V jest na tym przedziale ściśle monotoniczna, nie może być malejąca, bo $V(x_0)>0=V(0)$, więc jest ściśle rosnąca, więc jej niezerująca się pochodna jest dodatnia. ■

Przykład 6.8 Znaleźć maksimum objętości brył powstałych w wyniku obrotu trójkąta prostokątnego o obwodzie 1 wokół jego przeciwprostokątnej.

Rozwiązanie: Niech a,b,c oznaczają boki trójkąta, przy czym c to przeciwprostokątna. Bryła, która powstaje w wyniku obrotu trójkąta wokół boku c to dwa stożki złączone podstawami. Promień tej wspólnej podstawy to wysokość trójkąta prostopadła do przeciwprostokątnej, więc równa $\frac{ab}{c}$, bowiem pole trójkąta jest równe $\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}ch_c$, gdzie h_c jest wysokością trójkąta prostopadłą do przeciwprostokątnej c. Suma wysokości tych stożków jest równa c. Wobec tego suma ich objętości jest równa $V=\frac{\pi}{3}\cdot\left(\frac{ab}{c}\right)^2\cdot c=\frac{\pi(ab)^2}{3c}$.

Wiemy, że $a^2+b^2=c^2$ (tw. Pitagorasa) i $a+b+c=1$ (dany obwód trójkąta). Stąd wynika, że

$$2ab=(a+b)^2-(a^2+b^2)=(1-c)^2-c^2=1-2c.$$

Zachodzą więc wzory $V=V(c)=\frac{\pi(1-2c)^2}{12c}=\frac{\pi}{12}\left(\frac{1}{c}-4+4c\right)$ i $V'(c)=\frac{\pi}{12}\left(\frac{-1}{c^2}+4\right)$. Wobec tego $V'(c)=0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $c=\pm\frac{1}{2}$, zatem kandydatami na punkt, w którym funkcja V przyjmuje swą największą wartość są $\frac{1}{2}$ oraz $-\frac{1}{2}$. Ponieważ c jest długością boku trójkąta, więc $c>0>-\frac{1}{2}$. Liczba $\frac{1}{2}$ też nie wchodzi w grę, bo wtedy byłaby spełniona równość $a+b=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=c$, wbrew temu, że: *suma dwóch boków trójkąta jest większa od trzeciego*. Oznacza to, że funkcja V jest ściśle monotoniczna na każdym przedziale zawartym w swej dziedzinie. Kresy są wartościami funkcji w końcach przedziału, jeśli końce są w dziedzinie. Musimy więc znaleźć dziedzinę funkcji V.

Liczby a, b, c mają być bokami trójkąta prostokątnego o obwodzie 1. Muszą więc być dodatnimi rozwiązaniami układu równań: $a^2 + b^2 = c^2$, $a + b = 1 - c$. Warunek ten jest też dostateczny: jeśli $a, b, c > 0$ i $a^2 + b^2 = c^2$, to $(a + b)^2 > a^2 + b^2 = c^2$, zatem $a + b > c$ i oczywiście $a + c > c > b$ oraz $b + c > c > a$. Oznacza to, że z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt, oczywiście prostokątny. Ten układ równań równoważny jest następującemu:

$$a + b = 1 - c, \qquad ab = \tfrac{(1-c)^2 - c^2}{2} = \tfrac{1}{2} - c\,.$$

Liczby a i b są więc pierwiastkami równania kwadratowego $t^2 - (1-c)t + \frac{1}{2} - c = 0$. Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by to równanie to miało dodatnie pierwiastki dla dodatniej wartości parametru c, jest $0 < c < \frac{1}{2}$ oraz

$$0 \le \Delta = (1-c)^2 - 4(\tfrac{1}{2} - c) = -1 + 2c + c^2 = (c+1)^2 - 2$$

czyli $\sqrt{2} - 1 \le c < \frac{1}{2}$. Ponieważ $V\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, więc największą wartością funkcji V jest $V\left(\sqrt{2} - 1\right)$ — oczywiście maksymalna na przedziale $\left[\sqrt{2} - 1, \frac{1}{2}\right)$. Łatwo zauważyć, że dla $c = \sqrt{2} - 1$ otrzymujemy trójkąt równoramienny (bo $\Delta = 0$, więc pierwiastki równania kwadratowego $x^2 - (1-c)x + \frac{1}{2} - c = 0$, czyli liczby a i b są równe).

Komentarz: Ten przykład powinien przekonać studentów o konieczności zwracania uwagi na dziedzinę funkcji. Omawiałem to zadanie wielokrotnie na ćwiczeniach, jeszcze się nie zdarzyło, by studenci chcieli, aby objętość V potraktować jako np. funkcję zmiennej a. Korzystalibyśmy wtedy z wzoru $V = V(a) = \frac{\pi a^2 (1-2a)^2}{6(1-a)(1-2a+2a^2)}$. Maksimum osiągane byłoby w punkcie wewnętrznym dziedziny funkcji V, czyli przedziału $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, mianowicie w punkcie $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$, zatem w punkcie zerowania się pochodnej funkcji V. Byłoby mniej kłopotu z dziedziną funkcji, za to więcej z obliczeniami. Często studenci nie potrafili stwierdzić, że ponieważ funkcja ma niezerową pochodną na przedziale, to jest na nim monotoniczna. Wydawało im się, że w obliczeniach był błąd, bo skoro w jakimś punkcie ma być maksimum, to pochodna musi się tam zerować zapominając, że to twierdzenie mówi o punktach **wewnętrznych** dziedziny. ■

Przykład 6.9 Znajdziemy teraz kres górny iloczynu trzech liczb nieujemnych, których suma jest równa 3. Oznaczmy te liczby przez x, y, z. Mamy więc $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$ oraz $x + y + z = 3$. Mamy znaleźć kres górny wyrażenia $xy(3 - x - y)$, przy założeniu, że $x, y \ge 0$ oraz $x + y \le 3$. Niech $s = x + y \le 3$.

Chwilowo traktować będziemy wielkość s jako stałą. Przy ustalonym s nasze wyrażenie to $x(s - x)(3 - s)$. Znajdziemy jego kres górny zakładając, że $0 \le x$, $0 \le y = s - x$, czyli $0 \le x \le s$. Mamy więc do czynienia z funkcją kwadratową zmiennej x: $(3 - s)(-x^2 + sx)$. Większość studentów pamięta z nauki szkolnej, że funkcja kwadratowa, której współczynnik przy x^2 jest ujemny, przyjmuje swą wartość największą w środku odcinka, w którego końcach ta funkcja przyjmuje tę samą wartość (np. 0, wtedy końcami odcinka są pierwiastki funkcji). W naszym przypadku tym punktem jest $x = \frac{1}{2}(0+s) = \frac{s}{2}$.* By zakończyć zadanie należy znaleźć maksymalną wartość wyrażenia $(3-s)\frac{s^2}{4}$ na przedziale $[0,3]$.

Mamy $\left((3-s)\frac{s^2}{4}\right)' = -\frac{s^2}{4} + (3-s)\frac{s}{2} = 3 - \frac{3}{4}s^2$. Ponieważ funkcja $(3-s)\frac{s^2}{4}$ zmiennej s jest ciągła na przedziale domkniętym $[0,3]$, więc osiąga w jakimś punkcie swój kres górny. Ponieważ w końcach przedziału przyjmuje wartość 0, a wewnątrz jest dodatnia, więc kres górny jest przyjmowany w jakimś punkcie wewnętrznym tego przedziału. W przedziale $(0,3)$ znajduje się jeden punkt, w którym pochodna $-\frac{s^2}{4} + (3-s)\frac{s}{2} = \frac{3}{4}s(2-s)$ funkcji $(3-s)\frac{s^2}{4}$ przyjmuje wartość 0. Ten punkt to liczba 2. Wartość funkcji $(3-s)\frac{s^2}{4}$ w tym punkcie równa jest 1. Odpowiednie wartości wyjściowych zmiennych to $x=y=z=1$. Zadanie zostało rozwiązane. ■

Zanim omówimy następne przykłady zauważmy, że z definicji pochodnej wynika następująca równość przybliżona $f'(p) \approx \frac{f(p+h)-f(p)}{h}$ dla $h \approx 0$. Nie troszcząc się przesadnie o precyzję rozumowania przepisać ją można w postaci

$$f(p+h) \approx f(p) + f'(p)h\,.$$

Można się spodziewać, że to przybliżenie jest dokładniejsze dla h dostatecznie bliskich 0 od przybliżenia $f(p+h) \approx f(p)$, które jest konsekwencją ciągłości funkcji f w punkcie p. Tak jest w rzeczywistości, bo błąd przybliżenia $f(p+h) \approx f(p) + f'(p)h$ jest mały w porównaniu z $|h|$, gdyż

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(p+h) - \big(f(p)+f'(p)h\big)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(p+h)-f(p)}{h} - f'(p)\right) = 0\,.$$

Zauważmy jeszcze, że zachodzi następujące :

Twierdzenie 6.7 (o najlepszym przybliżeniu liniowym funkcji)
Załóżmy, że f jest funkcją ciągłą w punkcie p. Wtedy równość $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(p+h)-(ah+b)}{h} = 0$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f jest różniczkowalna w punkcie p oraz $a = f'(p)$ i $b = f(p)$.

Dowód. Jeśli $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(p+h)-(ah+b)}{h} = 0$, to $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(p+h)-b}{h} - a = 0$. Stąd wynika równość $a = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(p+h)-b}{h}$. Z niej wynika, że $0 = \lim\limits_{h\to 0} ah = \lim\limits_{h\to 0}\big(f(p+h)-b\big)$, czyli

*Tym, którzy akurat zapomnieli, że tak jest, podajemy uzasadnienie w oparciu o twierdzenia z tego rozdziału. Mamy $(x(s-x)(3-s))' = (3-s)(-2x+s)$. Ta pochodna jest dodatnia na półprostej $(-\infty, \frac{s}{2})$, a na półprostej $(\frac{s}{2}, \infty)$ jest ujemna. Wobec tego funkcja jest ściśle rosnąca na półprostej $(-\infty, \frac{s}{2}]$, a na półprostej $[\frac{s}{2}, \infty)$ jest ściśle malejąca, więc liczba $(3-s)\cdot\frac{s}{2}\cdot(s-\frac{s}{2}) = (3-s)\frac{s^2}{4}$ jest jej największą wartością. Bez pochodnych jest łatwiej:

$$x(s-x)(3-s) = (3-s)[-(x-\tfrac{s}{2})^2 + \tfrac{s^2}{4}] \le (3-s)\cdot\tfrac{s^2}{4}$$

— do badania wielomianów kwadratowych pochodne nie są potrzebne.

$b = \lim_{h\to 0} f(p+h) = f(p)$. Z ostatniej równości wynika, że

$$a = \lim_{h\to 0} \tfrac{f(p+h)-b}{h} = \lim_{h\to 0} \tfrac{f(p+h)-f(p)}{h},$$

a to oznacza, że f jest różniczkowalna w punkcie p i zachodzi równość $a = f'(p)$, co kończy dowód twierdzenia w jedną stronę. Przed sformułowaniem twierdzenia wykazaliśmy prawdziwość implikacji przeciwnej. Dowód został zakończony. ■

Z twierdzenia tego wynika, że spośród wszystkich wielomianów stopnia ≤ 1 zmiennej x najdokładniej przybliża funkcję f w otoczeniu punktu p wielomian $f(p) + f'(p)(x-p)$. Żadne z twierdzeń do tej pory sformułowanych nie daje jawnego oszacowania błędu przybliżenia, ale pokazywaliśmy już wiele razy, jak można dowodzić nierówności, a to stwarza szanse na szacowanie błędu. Pokażemy, teraz kilka przykładów.

Przykład 6.10 $\sqrt{50} = \sqrt{49+1} \approx \sqrt{49} + \frac{1}{2\sqrt{49}} \cdot 1 = 7 + \frac{1}{14}$ – przyjęliśmy tu $h = 1$, $f(x) = \sqrt{x}$, zatem $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $p = 49$. Chociaż 1 nie jest małą liczbą, jednak przybliżenie, które uzyskaliśmy jest dosyć dobre. Rzeczywiście,

$$\left(7 + \tfrac{1}{14}\right)^2 = 49 + 2\cdot 7 \cdot \tfrac{1}{14} + \left(\tfrac{1}{14}\right)^2 = 50 + \tfrac{1}{196}.$$

Widzimy więc, że po podniesieniu do kwadratu przybliżonej wartości pierwiastka, otrzymaliśmy liczbę nieco tylko większą od 50. Mamy $7,07 < 7 + \frac{1}{14} < 7,08$ oraz $7,07^2 = 49,9849$, co oznacza, że nasze przybliżenie pozwoliło nam znaleźć dwie cyfry po przecinku liczby $\sqrt{50}$ bez wykonania trudnych obliczeń! Wartość przybliżona jest w tym przypadku większa niż rzeczywista, bo styczna do wykresu pierwiastka kwadratowego leży nad wykresem. ■

Przykład 6.11 $50^2 = (49+1)^2 \approx 49^2 + 2\cdot 49 \cdot 1 = 2499$. Tym razem $f(x) = x^2$, zatem $f'(x) = 2x$, $p = 49$ i $h = 1$. W rzeczywistości $50^2 = 2500$, więc tym razem błąd, który popełniamy stosując wzór przybliżony zamiast dokładnego jest równy 1, więc jest ponad 100 razy większy niż w poprzednim przykładzie. ■

Przykład 6.12 $e^{50} = e^{49+1} \approx e^{49} + e^{49}\cdot 1 = 2\cdot e^{49}$. Teraz $f(x) = e^x = f'(x)$, $p = 49$ i $h = 1$. Błąd popełniany obecnie to $e^{50} - 2\cdot e^{49} = (e-2)\cdot e^{49} > 0,7\cdot e^{49}$, jest więc ogromny i to nie tylko w porównaniu z $h = 1$, ale wręcz porównywalny z wartością funkcji. Mamy $e^{50} \approx 5{,}1847055286 \cdot 10^{21}$, $e^{49} \approx 1{,}9073465725 \cdot 10^{21}$, zaś $e^{50} - 2\cdot e^{49} \approx 1,370012384 \cdot 10^{21}$ — obliczenia przeprowadzono za pomocą programu komputerowego Mathematica 7.0.

Widzimy więc, że w tym ostatnim przypadku przybliżanie za pomocą wzoru $f(p+h) \approx f(p) + f'(p)h$ w ogóle nie ma sensu, w przypadku funkcji x^2 dawało przybliżenie gorsze niż w przypadku pierwiastka kwadratowego. Można dosyć prosto

wyjaśnić, co jest tego przyczyną. Otóż z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika, że dla każdego $h \neq 0$ istnieje co najmniej jedna liczba $\theta_h \in (0,1)$, taka że $f(p+h) - f(p) = f'(p+\theta_h \cdot h)h$, zatem
$$f(p+h) - (f(p) + f'(p)h) = \big(f'(p+\theta_h \cdot h) - f(p)\big)h\,.$$
O liczbie θ_h nic więcej nie wiemy ponad to, że znajduje się ona w przedziale $(0,1)$, oznacza to, że liczba $p+\theta_h \cdot h$ leży między p i $p+h$.

W przypadku funkcji $\sqrt{x}$ i przedziału $(49,50)$ pochodna zmienia się bardzo nieznacznie: maleje od wartości $\frac{1}{14}$ do wartości $\frac{1}{2\sqrt{50}}$. W przypadku funkcji x^2 rośnie od wartości $2\cdot 49 = 98$ przyjmowanej w punkcie 49 do wartości $2 \cdot 50 = 100$ przyjmowanej w punkcie 50, w tym przypadku zmiana wartości pochodnej jest istotnie większa. W przypadku funkcji e^x pochodna zmienia się od wartości e^{49} do wartości e^{50}, czyli o $(e-1)\cdot e^{49}$, czyli o wielkość ogromną.

Sama zmiana pochodnej jeszcze o niczym nie świadczy, bo zmiana mogłaby być skoncentrowana na bardzo krótkim przedziale kończącym się w punkcie 50. Tak jednak w tym przypadku nie jest. I właśnie dlatego widoczne są różnice w dokładności.

W przypadku funkcji wykładniczej pochodna rośnie od wartości e^{49} do wartości e^{50}, tj. o wielkość ogromną $(e-1)e^{49} > 1,7\cdot e^{49}$. Można się więc było spodziewać, że w tym przypadku wzór $f(p+h) \approx f(p) + f'(p)h$ będzie bardzo niedokładny: wykres funkcji wykładniczej odgina się mocno ku górze odchodząc szybko od stycznej do siebie w jakimś punkcie, np. w $(49, e^{49})$.

W przypadku funkcji kwadratowej x^2 pochodna wzrasta od wartości 98 do wartości 100, więc nie tak znacznie jak popraednio, niemniej i w tym przypadku wykres funkcji oddala się od stycznej w widoczny sposób, też ku górze.

W przypadku funkcji $\sqrt{x}$ pochodna maleje, ale bardzo powoli, więc wykres odchyla się od stycznej ku dołowi, ale efekt ten jest nieznaczny: wykres nieomal pokrywa się ze styczną, więc przybliżenie liniowe działa bardzo dobrze. ■

Przykład 6.13 Przy różnych okazjach na lekcjach fizyki w szkołach wykorzystywana jest równość przybliżona $\sin x \approx x$, np. w optyce przy wyprowadzaniu równania soczewki lub zwierciadła, przy wyprowadzania wzoru na okres wahań wahadła matematycznego. Jest to zastosowanie równości przybliżonej $f(p+h) \approx f(p) + f'(p)h$, gdy $f(x) = \sin x$, $p = 0$, $h = x$. W tej sytuacji $f(0) = \sin 0 = 0$, $f'(0) = \cos 0 = 1$, więc $f(p) + f'(p)h = x$. Wykazaliśmy poprzednio, że dla $x > 0$ zachodzi nierówność $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$, więc błąd przybliżenia $\sin x \approx x$ jest mniejszy niż $\frac{x^3}{6}$, więc jeśli kąt x jest mały, to ten błąd jest bardzo mały, np. jeśli $x = \frac{1}{10}$, to błąd jest mniejszy niż $\frac{1}{6000}$. Wypada przypomnieć, że mowa o wielkości kąta wyrażonej w radianach, 1 radian to nieco ponad $57°$. Człowieka o wzroście 2 m, więc niższego niż np. Małgorzata Dydek (koszykarka z Gdańska, jedna z najwyższych na świecie) widać z odległości 200 m pod kątem około $0,01$ radiana, więc mówimy o rzeczywiście istniejących kątach, małych ale nie o znikomo małych, występujących niezwykle rzadko. Rachunek różniczkowy pozwala oszacować błąd nie tylko z góry, ale również z dołu. W tym przypadku można posłużyć się metodą zastosowaną poprzednio w celu wykazania nierówności $\sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$, która zachodzi dla $x > 0$. Z tej nierówności wynika natychmiast, że $\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} < x - \sin x < \frac{x^3}{6}$, a więc popełniany błąd jest większy niż $\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120}$ i mniejszy niż $\frac{x^3}{6}$. Błąd względny, tj. liczba $\frac{x-\sin x}{x}$ jest dla $x \in \big(0, \frac{1}{10}\big)$ mniejszy niż $\frac{1}{6}(0,1)^2 = \frac{1}{600}$, tzn. mniejszy niż $\frac{1}{6}\%$. To dobra dokładność. ■

Przykład 6.14 Niech $f(x) = e^x$, $p = 0$. Mamy $f'(0) = e^0 = 1$ i $f(0) = e^0 = 1$, zatem $e^x \approx 1 + x$. Zbadamy dokładność tego przybliżenia dla $x > 0$. W jednym z przykładów wykazaliśmy, że dla $x > 0$ zachodzi nierówność $e^x > 1 + x + \frac{1}{2}x^2$. Wobec tego błąd przybliżenia jest *większy* niż $\frac{1}{2}x^2$. Oszacujemy go teraz z góry.

Znajdziemy taką liczbę $a > 0$, że $e^x - 1 - x < ax^2$ dla wszystkich $x \in (0,3)$. Niech $f(x) = e^x - 1 - x - ax^2$. Mamy $f'(x) = e^x - 1 - 2ax$, więc $(f')'(x) = e^x - 2a$. Jeśli $2a \geq e^3$, np. $a \geq \frac{1}{2}\cdot 21,952 = \frac{1}{2}\cdot 2{,}8^3 > \frac{1}{2}\cdot e^3$, to $(f')'(x) < 0$ dla $x \in (0,3)$, więc f' jest funkcją malejącą na przedziale $[0,3]$, a ponieważ $f'(0) = e^0 - 1 - 2a\cdot 0 = 0$, więc $f'(x) < 0$ dla $x \in (0,3)$. Wobec tego funkcja f maleje na przedziale $[0,3]$. Ponieważ $f(0) = 0$, więc $f(x) < 0$ dla $x \in (0,3)$. Wykazaliśmy więc, że jeśli $a \geq \frac{1}{2}e^3$, to $e^x - 1 - x < ax^2$ dla $x \in (0,3)$, np. $e^x - 1 - x < 11 \cdot x^2$.

Czytelnik bez trudu stwierdzi, że jeśli zastąpimy przedział $(0,3)$ przedziałem $(0,2)$, to otrzymamy rezultat nieco dokładniejszy: $e^x - 1 - x < ax^2$ dla $a \geq \frac{1}{2}\cdot e^2$, np. $a = 4 > 3{,}92 = \frac{1}{2}\cdot 2{,}8^2 > \frac{1}{2}\cdot e^2$ otrzymujemy $e^x - 1 - x < 4 \cdot x^2$. ■

Przykład 6.15 Udowodnimy, że dla każdego $x > 0$ i każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność:

$$e^x > 1 + x + \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3 + \ldots + \tfrac{1}{n!}x^n .$$

W dowodzie rozważymy funkcję f_n zdefiniowaną wzorem

$$f_n(x) = e^x - \big(1 + x + \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3 + \ldots + \tfrac{1}{n!}x^n\big).$$

Mamy $f_n'(x) = e^x - \big(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}\big) = f_{n-1}(x)$. Ponieważ $f_0(x) = e^x - 1 > 0$ dla $x > 0$, więc funkcja f_1 jest ściśle rosnąca na półprostej $[0,\infty)$, zatem z nierówności $x > 0$ wynika nierówność $f_1(x) > f_1(0) = e^0 - (1+0) = 0$, czyli $f_1(x) > 0$. Z tej nierówności wynika, że funkcja f_2 jest ściśle rosnąca na półprostej $[0,\infty)$, zatem z nierówności $x > 0$ wynika, że $f_2(x) > f_2(0) = e^0 - (1 + 0 + \frac{1}{2!}0^2) = 0$, czyli $f_2(x) > 0$. W taki sam sposób wnioskujemy teraz, że dla $x > 0$ zachodzą kolejne nierówności: $f_3(x) > 0$, $f_4(x) > 0$, itd.

Dla $x>0$ i $n>1$ mamy
$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1+\frac{n!}{1!(n-1)!}\cdot\frac{x}{n}+\frac{n!}{2!(n-2)!}\cdot\frac{x^2}{n^2}+\ldots+\frac{n!}{(n-1)!1!}\cdot\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{n!}{n!0!}\cdot\frac{x^n}{n^n}=$
$=1+\frac{n!}{(n-1)!\cdot n}\cdot\frac{x}{1!}+\frac{n!}{(n-2)!\cdot n^2}\cdot\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{n!}{1!\cdot n^{n-1}}\cdot\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{n!}{0!\cdot n^n}\cdot\frac{x^n}{n!}<$
$<1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!}<e^x$, zatem $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!}\right)=e^x$.
W takiej sytuacji piszemy:

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}. \tag{exp}$$

Wykażemy, że wzór (exp) zachodzi również dla $x<0$. Ponieważ $e^x\ge 1+x$ dla każdej liczby $x\in\mathbb{R}$, więc funkcja $e^x-(1+x)$ jest niemalejąca na całej prostej. Jeśli więc $x<0$, to $e^x-(1+x)\le e^0-(1+0)=0$. Wynika stąd i z wzoru $\left(e^x-1-x-\frac{x^2}{2!}\right)'=e^x-(1+x)$, że funkcja $e^x-1-x-\frac{x^2}{2!}$ jest nierosnąca na półprostej $(-\infty,0]$, więc swą najmniejszą wartość na tej półproste przyjmuje w punkcie 0. Dla każdego $x<0$ zachodzi więc nierówność $e^x-1-x-\frac{x^2}{2!}\ge e^0-1-0-\frac{0^2}{2!}=0$. Stąd i z wzoru $\left(e^x-1-x-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}\right)'=e^x-1-x-\frac{x^2}{2!}$ wynika, że funkcja $e^x-1-x-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}$ jest niemalejąca na półprostej $(-\infty,0]$, więc ma swą największą wartość w punkcie 0, zatem dla każdego $x<0$ mamy $e^x-1-x-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}\le e^0-1-0-\frac{0^2}{2!}-\frac{0^3}{3!}=0$. Kontynuacja tego postępowania prowadzi do wniosku: dla każdej liczby nieparzystej n i każdej liczby $x<0$ zachodzi wzór

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!}\le e^x\le 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

a ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=0$, więc $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!}\right)=e^x$.

Wobec tego równość

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!}\right)=e^x \tag{exp}$$

zachodzi dla wszystkich liczb rzeczywistych x. ■

Przykład 6.16 Wykażemy, że jeśli $3>x>0$, to $e^x-1-x<\frac{x^2}{2(1-\frac{x}{3})}$. Niech

$$g(x)=e^x-1-x-\frac{x^2}{2(1-\frac{x}{3})}=e^x-1-x-\frac{3}{2}\cdot\frac{x^2}{(3-x)}.$$

Mamy zatem

$$g'(x)=e^x-1-\frac{3}{2}\cdot\frac{2x(3-x)+x^2}{(3-x)^2}=e^x-1-\frac{3}{2}\cdot\frac{6x-x^2}{(3-x)^2}.$$

Kontynuując obliczenia otrzymujemy

$$(g')'(x)=e^x-\frac{3}{2}\cdot\frac{(6-2x)(3-x)^2+2(6x-x^2)(3-x)}{(3-x)^4}=e^x-\frac{3}{2}\cdot\frac{18}{(3-x)^3}=$$
$$=e^x-\frac{27}{(3-x)^3}=e^x-\frac{1}{(1-\frac{x}{3})^3}.$$

Dla każdego $x>0$ mamy $e^{-x/3}>1-\frac{x}{3}$, więc jeśli $0<x<3$, to zachodzi

nierówność $\left(\frac{1}{1-\frac{x}{3}}\right)^3 > \left(e^{x/3}\right)^3 = e^x$. Z tej nierówności wynika, że dla $0 < x < 3$ zachodzi $(g')'(x) < 0$, więc na przedziale $[0,3]$ funkcja g' jest nierosnąca, więc dla $0 < x \leq 3$ zachodzi nierówność $g'(x) < g'(0) = 0$. Wobec tego funkcja g jest ściśle malejąca na przedziale $[0,3]$, zatem $g(x) < g(0) = 0$ dla $x \in (0,3]$, a to właśnie chcieliśmy wykazać. Wobec tego jeśli $0 < x < \frac{3}{2}$, to $e^x - 1 - x < x^2$, bo w tym przypadku $2\left(1 - \frac{x}{3}\right) > 1$.
W przykładzie 6.15 wykazaliśmy, że dla $x < 0$ zachodzi nierówność $e^x < 1+x+\frac{1}{2}x^2$. Stąd wynika, że dla $x < 0$ zachodzi nierówność $0 < e^x - (1+x) < \frac{1}{2}x^2$, zaś dla $3 > x > 0$ – nierówność $0 < e^x - (1+x) < x^2$. Stąd już łatwo wynika, że dla $x < \frac{3}{2}$ zachodzi nierówność $0 \leq e^x - (1+x) \leq x^2$, przy czym równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$.

Wspominaliśmy wcześniej, że funkcja wykładnicza pojawia się w fizyce przy dyskusji wzoru na długość np. pręta żelaznego w zależności od jego temperatury. Prowadzi to do wzoru $l(t) = l(t_0)e^{\lambda(t-t_0)}$, gdzie przez $l(t)$ oznaczyliśmy długość pręta w temperaturze t, zaś λ oznacza współczynnik rozszerzalności cieplnej, w przypadku żelaza $\lambda \approx 0,00000115 = 1,15\cdot 10^{-5}$. Jeśli zmiana temperatury jest niezbyt duża, np. mniejsza niż 50° C, to wykładnik jest mniejszy niż $0,00006$, więc jego kwadrat jest mniejszy niż $0,00000004$, co oznacza, że błąd, który popełnimy zastępując $e^{\lambda(t-t_0)}$ przez $1+\lambda(t-t_0)$ będzie mniejszy niż $0,00000004 \cdot l(t_0)$, więc w przypadku np. szyny kolejowej — mniejszy od dokładności pomiaru jej długości.

Inaczej jest w przypadku rozpadu promieniotwórczego. W wyniku rozważań analogicznych do tych, które doprowadziły nas do wzoru $e^x = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ otrzymujemy wzór $m(t) = m(t_0)e^{-\lambda(t-t_0)}$, gdzie $m(t)$ oznacza masę substancji promieniotwórczej w chwili t, a λ — stałą rozpadu. Rzecz w tym, iż w tym przypadku interesuje nas np. czas połowicznego rozpadu, to znaczy czas, w którym masa substancji zmniejsza się o połowę. W tym przypadku $t-t_0$ musi być tak duże, by zachodził wzór $\lambda(t-t_0) = \ln 2 \approx 0,6931$, więc błąd spowodowany stosowaniem przybliżenia liniowego funkcji wykładniczej funkcją liniową byłby większy niż $\frac{1}{2}\cdot 0,6931^2 \approx 0,24$, więc w zasadzie niedopuszczalny jako za duży (24%).[1] Przykład powinien uświadomić studentom, że przed użyciem wzorów przybliżonych warto zastanowić się nad tym, czy wolno je stosować. ■

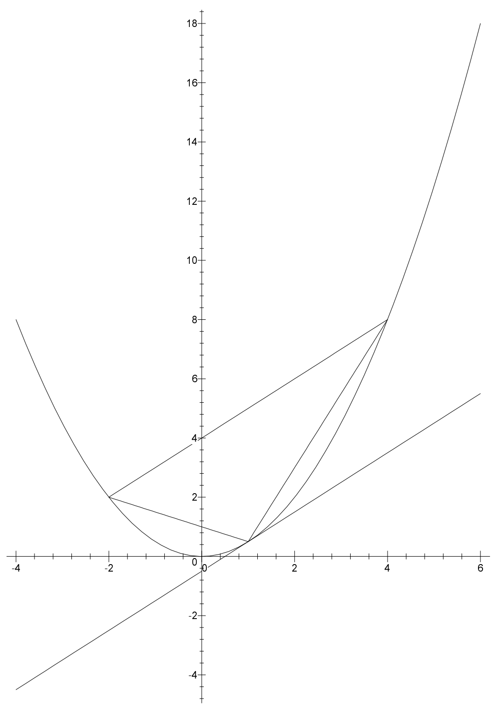
[1] W szkołach wzór na zmianę długości w wyniku podgrzania występuje w innej klasie niż wzór na zmianę masy pierwiastka promieniotwórczego w czasie, więc liczba uczniów, którzy zauważają niekonsekwencję w stosowaniu w jednym przypadku funkcji liniowej, a w drugim funkcji wykładniczej jest zaniedbywalnie mała. Można podejrzewać, że nie wszyscy nauczyciele maja czas i ochotę wyjaśniać, dlaczego w jednym przypadku stosowany jest jeden wzór, a w drugim — inny.

Funkcje wypukłe

Ważną klasę funkcji stanowią tzw. funkcje wypukłe. Przypomnijmy, że zbiór jest wypukły wtedy i tylko wtedy, gdy wraz z każdymi dwoma punktami zawiera odcinek, który je łączy. Zbiorami wypukłymi są proste, płaszczyzny, cała przestrzeń trójwymiarowa, koło (ale nie okrąg), kula (ale nie jej powierzchnia zwana sferą), kwadrat (ale nie jego brzeg), trójkąt (ale nie jego brzeg). Czytelnicy zapewne pamiętają ze szkoły średniej, że wielokąt jest wypukły, jeśli jego kąty wewnętrzne są mniejsze niż 180°, czyli π radianów. Jest jasne, że jedynymi podzbiorami wypukłymi prostej są przedziały, ewentualnie zdegenerowane do punktu. Mogą to być przedziały otwarte, domknięte, otwarto-domknięte, domknięto-otwarte, skończone lub nieskończone.

Definicja 6.8 (funkcji wypukłej)
Funkcję f określoną na zbiorze wypukłym P nazywamy wypukłą, jeśli dla dowolnych punktów $x, y \in P$ i dowolnej liczby $t \in (0,1)$ zachodzi nierówność
$$f\big(tx + (1-t)y\big) \le tf(x) + (1-t)f(y)\,.$$ [2]
Jeżeli nierówność ta jest ostra, gdy $x \neq y$, to mówimy, że funkcja jest ściśle wypukła.

Jeśli funkcja $-f$ jest wypukła, to mówimy, że funkcja f jest wklęsła, jeśli funkcja $-f$ jest ściśle wypukła, to funkcja f nazywana jest ściśle wklęsłą. ■



Wypukłość funkcji

Na rysunku obok znajduje się wykres funkcji $\frac{1}{2}x^2$, która jest ściśle wypukła, co niebawem wykażemy, trzy cięciwy (tzn. odcinki łączące dwa punkty wykresu) oraz prosta styczna do wykresu w punkcie $(1, \frac{1}{2})$. Widać, że cięciwy leżą nad wykresem tej funkcji, natomiast styczna — pod.

[2] Definicję tę stosuje się w niezmienionej formie również w przypadku funkcji wielu zmiennych.

Podamy kilka przykładów, które ułatwią zrozumienie i zapamiętanie definicji.

Przykład 6.17 Jeśli $f(x) = ax + b$, to funkcja f jest jednocześnie wypukła i wklęsła, nie jest ściśle wypukła. Stwierdzenie to wynika natychmiast z definicji:

$$f\big(tx+(1-t)y\big) = a\big(tx+(1-t)y\big)+b = t\big(ax+b\big)+(1-t)\big(ay+b\big) = tf(x)+(1-t)f(y)\,,$$

więc w przypadku funkcji liniowej nierówność występująca w definicji funkcji wypukłej staje się równością. ■

Przykład 6.18 Jeśli $f(x) = x^2$, to f jest funkcją ściśle wypukłą na całej prostej. Uzasadnimy tę tezę. Dla $0 < t < 1$ mamy

$$tf(x) + (1-t)f(y) - f\big(tx + (1-t)y\big) = tx^2 + (1-t)y^2 - \big(tx + (1-t)y\big)^2 = \\ = t(1-t)(x-y)^2 \ge 0\,,$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$. ■

Przykład 6.19 Funkcja $f(x) = \sqrt{x}$ jest ściśle wklęsła – wynika to łatwo ze ścisłej wypukłości funkcji kwadratowej: nierówność $\sqrt{tx + (1-t)y} > t\sqrt{x} + (1-t)\sqrt{y}$ jest równoważna nierówności

$$\big(tu + (1-t)v\big)^2 < tu^2 + (1-t)v^2\,, \text{ gdzie } u = \sqrt{x}\,,\ v = \sqrt{y}\,. ■$$

Przed podaniem następnych przykładów skomentujemy definicję funkcji wypukłej i podamy kryterium pozwalające stwierdzać wypukłość niektórych funkcji. Funkcja jest wypukła, jeśli połączywszy dwa punkty jej wykresu otrzymujemy odcinek, którego wszystkie punkty leżą nad wykresem funkcji lub na jej wykresie. Funkcja jest ściśle wypukła, jeśli wszystkie punkty wewnętrzne odcinka łączącego dwa punkty wykresu leżą nad tym wykresem. Jest tak dlatego, że w przypadku $0 < t < 1$, $x < y$ zachodzi nierówność $x < tx + (1-t)y < y$. W przykładzie pierwszym pokazaliśmy, że punkt $\big(tx + (1-t)y,\, tf(x) + (1-t)f(y)\big)$ leży na wykresie funkcji liniowej, której wykres przechodzi przez punkty $\big(x, f(x)\big)$ oraz $\big(y, f(y)\big)$, współczynnik kierunkowy tej funkcji to $a = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$, wyraz wolny to $b = f(x) - ax = f(x) - x\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Nierówność występująca w definicji funkcji wypukłej:

$$f\big(tx + (1-t)y\big) \le tf(x) + (1-t)f(y)$$

to po prostu stwierdzenie, że punkt $\big(tx + (1-t)y, f\left(tx + (1-t)y\right)\big)$ znajduje się pod punktem $\big(tx + (1-t)y, tf(x) + (1-t)f(y)\big)$. Oznacza to, że funkcja jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór punktów znajdujących się nad jej wykresem jest wypukły.

Twierdzenie 6.9 (o wypukłości funkcji ciągłej) *

Funkcja f ciągła w każdym punkcie zbioru wypukłego P jest wypukła wtedy i tylko

* Dowodu na wykładzie nie było i nie będzie.

wtedy, gdy dla dowolnych $x,y\in P$ zachodzi nierówność $f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le\frac{f(x)+f(y)}{2}$, ściśle wypukła, gdy ta nierówność jest ostra w każdym przypadku, w którym $x\neq y$.

Dowód. Jeśli f jest wypukła, to dla $t=\frac{1}{2}$ (w definicji wypukłości) otrzymujemy warunek podany w tym twierdzeniu, co kończy dowód konieczności tego warunku.

Zajmiemy się teraz dowodem w „drugą" stronę. Niech x,y będą dowolnymi punktami zbioru P. Mamy $f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le\frac{f(x)+f(y)}{2}$. Ponieważ nierówność ta zachodzi dla dowolnych punktów x,y zbioru P, więc możemy zastąpić punkt y środkiem odcinka łączącego punkty x,y. Mamy $\frac{1}{2}\left(x+\frac{x+y}{2}\right)=\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}y$. Wobec tego mamy też $f\left(\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}y\right)\le\le\frac{1}{2}\left(f(x)+f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)\le\frac{1}{2}\left(f(x)+\frac{f(x)+f(y)}{2}\right)=\frac{3}{4}f(x)+\frac{1}{4}f(y)$. Wykazaliśmy, że nierówność definiująca wypukłość ma miejsce w przypadku $t=\frac{3}{4}$. Stosując to samo rozumowanie do punktów $\frac{x+y}{2}$ oraz y otrzymujemy nierówność $f\left(\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}y\right)\le\frac{1}{4}f(x)+\frac{3}{4}f(y)$, a więc nierówność z definicji wypukłości w przypadku $t=\frac{1}{4}$. Rozważając teraz kolejno pary punktów x i $\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}y$, $\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}y$ i $\frac{1}{2}(x+y)$, $\frac{1}{2}(x+y)$ i $\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}y$ oraz $\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}y$ i y otrzymujemy nierówność kolejno dla $t=\frac{7}{8}$, $t=\frac{5}{8}$, $t=\frac{3}{8}$ i $t=\frac{1}{8}$. Otrzymaliśmy nierówność dla 7 wartości t: $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{7}{8}$. W taki sam sposób możemy otrzymać nierówność w przypadku $t=\frac{k}{16}$, potem w przypadku $t=\frac{k}{32}$ itd. Teraz skorzystamy z ciągłości funkcji f. Każda liczba $t\in(0,1)$ jest granicą ciągu (t_n) liczb postaci $\frac{k}{2^m}\in(0,1)$. Dla tych liczb nierówność jest już udowodniona. Mamy więc

$$f\left(t_nx+(1-t_n)y\right)\le t_nf(x)+(1-t_n)f(y).$$

Przechodząc do granicy (wolno, bo f jest ciągła w każdym punkcie, w szczególności w $tx+(1-t)y$) otrzymujemy nierówność

$$f\left(tx+(1-t)y\right)\le tf(x)+(1-t)f(y),$$

a to kończy dowód wypukłości funkcji f.

Należy jeszcze wykazać, jeśli dla $x\neq y$ zachodzi $f\left(\frac{x+y}{2}\right)<\frac{f(x)+f(y)}{2}$, to f jest **ściśle** wypukła. Załóżmy, że tak nie jest. Wobec tego

$$f(tx+(1-t)y)=tf(x)+(1-t)f(y)$$

dla pewnych $x,y\in P$, $x\neq y$, $t\in(0,1)$. Załóżmy, że $0<s<t<1$. Mamy wtedy

$$tf(x)+(1-t)f(y)=f(tx+(1-t)y)=f\left(\tfrac{t-s}{1-s}x+\tfrac{1-t}{1-s}(sx+(1-s)y)\right)\le$$
$$\le\tfrac{t-s}{1-s}f(x)+\tfrac{1-t}{1-s}f(sx+(1-s)y)\le$$
$$\le\tfrac{t-s}{1-s}f(x)+\tfrac{1-t}{1-s}\left(sf(x+(1-s)f(y))\right)=tf(x)+(1-t)f(y).$$

Wobec tego, że ten ciąg nierówności zaczyna się i kończy tym samym wyrażeniem, wszystkie nierówności są równościami, w szczególności

$$f(sx+(1-s)y)=sf(x)+(1-s)f(x),$$

a to przeczy założeniu, bo s może być postaci $\frac{k}{2^m}$, a dla takich s nierówność, jak to wykazaliśmy wcześniej, jest ostra. ■

Ostatni fragment tego dowodu może wyglądać nieco sztucznie, ale stanie się jaśniejszy po zapoznaniu się z twierdzeniem charakteryzującym funkcje wypukłe. W tej chwili wypada stwierdzić jedynie, że jeśli trzy punkty wykresu funkcji wypukłej leżą na jednej prostej, to wykres tej funkcji zawiera najkrótszy odcinek domknięty, który zawiera te trzy punkty wykresu, a ostatni fragment dowodu w istocie rzeczy to pokazuje. By to dobrze zrozumieć, trzeba pojąć, że jeśli $0 < s < t < 1$, to punkt $tx + (1-t)y$ leży bliżej punktu x niż punkt $sx + (1-s)y$*, następnie narysować sobie to wszystko biorąc pod uwagę to, że żaden punkt wykresu funkcji wypukłej nie może się znaleźć nad odcinkiem łączącym dwa punkty tego wykresu.

Bez założenia ciągłości powyższe twierdzenie jest nieprawdziwe, ale omówienie przykładów (bardzo nienaturalnych) wykracza znacznie poza ramy tego wykładu.

Pokażemy kilka funkcji wypukłych lub wklęsłych na pewnych przedziałach.

Przykład 6.20 Funkcja wykładnicza o podstawie dodatniej i różnej od 1 jest ściśle wypukła. Wystarczy wykazać, że $a^{(x+y)/2} \leq \frac{1}{2}\left(a^x + a^y\right)$, przy czym równość ma miejsce jedynie wtedy, gdy $x = y$. Mamy $a^x + a^y - 2a^{(x+y)/2} = \left(a^{x/2} - a^{y/2}\right)^2$. Z tej równości teza wynika natychmiast. ■

Przykład 6.21 Funkcja ln jest ściśle wklęsła. Dla dowodu wystarczy wykazać, że $\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{1}{2}\left(\ln x + \ln y\right)$ oraz że równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$. Nierówność ta jest równoważna następującej: $\left(e^{\ln x} + e^{\ln y}\right)/2 = \frac{x+y}{2} \geq e^{(\ln x + \ln y)/2}$, która wynika natychmiast ze ścisłej wypukłości funkcji wykładniczej o podstawie e. (zob. poprzedni przykład). ■

Przykład 6.22 Funkcja sinus jest ściśle wypukła na przedziale $[-\pi, 0]$ i ściśle wklęsła na przedziale $[0,\pi]$. Dla dowodu wystarczy wykazać, że jeśli $-\pi \leq x < y \leq 0$, to $\sin\frac{x+y}{2} < \frac{1}{2}\left(\sin x + \sin y\right)$ i że jeśli $0 \leq x < y \leq \pi$, to $\sin\frac{x+y}{2} > \frac{1}{2}\left(\sin x + \sin y\right)$. Ponieważ $\sin(-x) = -\sin x$, więc wystarczy wykazać jedną z tych nierówności. Załóżmy, że $0 \leq x < y \leq \pi$. W tej sytuacji

$$\tfrac{1}{2}(\sin x + \sin y) = \sin\tfrac{x+y}{2}\cos\tfrac{x-y}{2} < \sin\tfrac{x+y}{2}$$

— ostatnia nierówność zachodzi, bo $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{x-y}{2} < 0$, więc $0 \leq \cos\frac{x-y}{2} < 1$. ■

Przykład 6.23 Funkcja tangens jest ściśle wypukła na przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ i ściśle wklęsła na przedziale $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Tak jak w przypadku funkcji sinus zajmiemy się jednym z tych przedziałów. Wykorzystamy wzór: $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$. Niech $0 \leq x < y < \frac{\pi}{2}$. Wtedy $\frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y}{2} - \operatorname{tg}\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2}\left\{\left(\operatorname{tg}y - \operatorname{tg}\frac{x+y}{2}\right) - \left(\operatorname{tg}\frac{x+y}{2} - \operatorname{tg}x\right)\right\} =$

* Załóżmy, że $x<y$ i $1>t>s>0$. Wtedy $tx+(1-t)y-x=(1-t)(y-x)<(1-s)(y-x)=sx+(1-s)y-x$.

$=\frac{1}{2}\left\{\frac{\sin\frac{y-x}{2}}{\cos y\cos\frac{x+y}{2}}-\frac{\sin\frac{y-x}{2}}{\cos x\cos\frac{x+y}{2}}\right\}=\frac{\sin\frac{y-x}{2}(\cos x-\cos y)}{2\cos x\cos y\cos\frac{x+y}{2}}>0$ — ostatnia nierówność wynika z tego, że kosinus maleje na przedziale $[0,\frac{\pi}{2}]$. ■

Przykład 6.24 Niech $f(x)=|x|$. Wykażemy, że f jest funkcją wypukłą, ale nie ściśle. Tym razem skorzystamy bezpośrednio z definicji. Jeśli x,y są liczbami rzeczywistymi i $0<t<1$, to $|tx+(1-t)y|\le t|x|+(1-t)|y|$ skorzystaliśmy z nierówności trójkąta. Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $xy\ge 0$. ■

Przykład 6.25 Niech $f(x)=e^{|x|}$. Wykażemy, że funkcja ta jest ściśle wypukła. Ponieważ jest ciągła, więc można zajmować się jedynie przypadkiem $t=\frac{1}{2}$. Załóżmy, że $x\ne y$. Mamy w tej sytuacji $e^{|x+y|/2}\le e^{(|x|+|y|)/2}\le\frac{1}{2}\left(e^{|x|}+e^{|y|}\right)$, przy czym jeśli pierwsza nierówność staje się równością, to $xy\ge 0$ i wobec tego, że $x\ne y$, ma miejsce nierówność $|x|\ne|y|$ i wobec tego druga nierówność musi być ostra (funkcja wykładnicza jest ściśle wypukła). Dowód został zakończony. ■

Przykład 6.26 Funkcja $|x|+|x-1|+|x-2|+|x-3|$ jest wypukła jako suma czterech funkcji wypukłych. Nie jest ona ściśle wypukła, bo na przedziale $[1,2]$ jest stała, zresztą na każdym z przedziałów $(-\infty,0]$, $[0,1]$, $[1,2]$, $[2,3]$, $[3,+\infty)$ jest liniowa, wykres tej funkcji składa się z trzech odcinków i dwu półprostych. ■

Przykład 6.27 Niech $f(x)=-\sqrt{|x|}$. Bez trudu sprawdzamy, że funkcja ta nie jest wypukła na całej prostej: $f\left(\frac{1}{2}\cdot(-1)+\frac{1}{2}\cdot 1\right)=f(0)>-1=\frac{1}{2}\big(f(-1)+f(1)\big)$. Jest ona wypukła na każdej z półprostych $(-\infty,0]$, $[0,+\infty)$ — wynika to łatwo z tego, że jak wykazaliśmy wcześniej, funkcja $\sqrt{\ }$ jest ściśle wklęsła. ■

Przykład 6.28 Cena biletu kolejowego w ustalonej klasie jest funkcją wklęsłą odległości na jaką jest wystawiany.* Uzasadnimy to tak: przyrost ceny biletu spowodowany wydłużeniem się odległości jaką zamierzamy przejechać o ustaloną wielkość jest tym mniejszy im dłuższy dystans zamierzamy przebyć. Zapiszemy to za pomocą symboli matematycznych. Niech $p(x)$ oznacza cenę biletu pozwalającego na przejechanie x kilometrów. Niech h oznacza dowolną liczbę dodatnią i niech $x<y$. Wtedy $p(x+h)-p(x)\ge p(y+h)-p(y)$. Wykażemy, że ten warunek, w przypadku funkcji ciągłej określonej na przedziale, jest równoważny wklęsłości funkcji. Zakładamy oczywiście, że nierówność ma miejsce dla dowolnych liczb x,y,h przy założeniu, że $h>0$ i $x<y$. Jeśli $r<s$, to przyjmujemy $x=r$, $h=\frac{1}{2}(s-r)$, $y=\frac{1}{2}(s+r)$.

* Zakładamy, że bilet może być wystawiony na dowolną odległość, co w rzeczywistości nie jest prawdą. W rzeczywistości funkcja ta nie jest wklęsła, bo dziedzina nie jest przedziałem, lecz składa się wyłącznie z liczb całkowitych i w dodatku funkcja jest przedziałami stała: w większości przypadków wydłużenie podróży o 1 km nie zmienia ceny biletu. Rozpatrujemy tu pewną idealizację sytuacji rzeczywistej.

Nierówność $p(x+h)-p(x)\geq p(y+h)-p(y)$ to nierówność
$$p\big(\tfrac{1}{2}(s+r)\big)-p(r)\geq p(s)-p\big(\tfrac{1}{2}(s+r)\big)\,,$$
czyli $p\big(\frac{1}{2}(s+r)\big)\geq\frac{1}{2}\left(p(r)+p(s)\right)$, co pociąga za sobą wklęsłość funkcji **ciągłej** p. Teraz załóżmy, że funkcja p jest wklęsła. Niech $u<v<w$ będą trzema punktami dziedziny funkcji p. Mamy $v=\frac{w-v}{w-u}u+\frac{v-u}{w-u}w$ oraz $0<\frac{w-v}{w-u}<1$ i $\frac{w-v}{w-u}+\frac{v-u}{w-u}=1$, zatem $p(v)\geq\frac{w-v}{w-u}p(u)+\frac{v-u}{w-u}p(w)$. Tę ostatnią nierówność możemy przepisać na trzy różne sposoby:
$\frac{p(v)-p(u)}{v-u}\geq\frac{p(w)-p(u)}{w-u}$, $\frac{p(u)-p(v)}{u-v}\geq\frac{p(w)-p(v)}{w-v}$ i $\frac{p(u)-p(w)}{u-w}\geq\frac{p(v)-p(w)}{v-w}$.
Stosując te nierówności wnioskujemy, że $\frac{p(x+h)-p(x)}{x+h-x}\geq\frac{p(y+h)-p(y)}{y+h-y}$ — jeśli np. $x<y<x+h$, to stosujemy najpierw nierówność trzecią: $\frac{p(x+h)-p(x)}{x+h-x}\geq\frac{p(x+h)-p(y)}{x+h-y}$, a potem — drugą: $\frac{p(x+h)-p(y)}{x+h-y}\geq\frac{p(y+h)-p(y)}{y+h-y}$. Dowód został zakończony. ■

Końcówka ostatniego przykładu wymaga wyjaśnienia. Wykazaliśmy tam, że w przypadku funkcji wklęsłej p i trzech punktów jej dziedziny $u<v<w$ zachodzą nierówności:
$\frac{p(v)-p(u)}{v-u}\geq\frac{p(w)-p(u)}{w-u}$, $\frac{p(u)-p(v)}{u-v}\geq\frac{p(w)-p(v)}{w-v}$ i $\frac{p(u)-p(w)}{u-w}\geq\frac{p(v)-p(w)}{v-w}$.
Każda z nich może być potraktowana jako formalna interpretacja stwierdzenia: **iloraz** $\frac{p(v)-p(u)}{v-u}$ **jest funkcją nierosnącą**, w pierwszym przypadku zmiennej v (teraz u jest ustalone), w drugim zmiennej u (teraz v jest ustalone), w trzecim chodzi o wyrażenie $\frac{p(u)-p(w)}{u-w}$ jako funkcję zmiennej u (w jest teraz ustalone). Każde z tych trzech stwierdzeń jest równoważne wklęsłości funkcji p. Wyrażenie $\frac{p(u)-p(v)}{u-v}$ nazywane jest ilorazem różnicowym funkcji p. Pokazuje ono jaka była względna zmiana wartości funkcji p. Stwierdzenie, że funkcja jest wklęsła oznacza więc, że rośnie ona coraz wolniej. Analogicznie funkcja wypukła rośnie coraz szybciej. Rezultaty te są ważne więc zapiszmy je raz jeszcze w formie twierdzenia tym razem sformułowanego w przypadku funkcji wypukłej.

Twierdzenie 6.10 (charakteryzujące funkcje wypukłe)
Niech f będzie funkcją określoną na zbiorze wypukłym P. Następujące warunki są równoważne:
(i) funkcja f jest wypukła;
(ii) jeśli $x<y<z$ są punktami zbioru P, to $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\leq\frac{f(z)-f(x)}{z-x}$;
(iii) jeśli $x<y<z$ są punktami zbioru P, to $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\leq\frac{f(z)-f(y)}{z-y}$;
(iv) jeśli $x<y<z$ są punktami zbioru P, to $\frac{f(x)-f(z)}{x-z}\leq\frac{f(y)-f(z)}{y-z}$. ■

W przypadku funkcji ściśle wypukłych nierówności w warunkach (ii) – (iv) są ostre.

Twierdzenie to będziemy stosować, gdy będziemy badać wypukłość funkcji za pomocą pochodnych — dzięki niemu będziemy w stanie powiedzieć, jaka własność pochodnej powoduje, że funkcja różniczkowalna jest wypukła.

Zakończymy rozważania o funkcjach wypukłych nierównością Jensena. Ma ona ważne zastosowania, jest to dobre narzędzie do uzyskiwania różnych oszacowań. Ma ważne zastosowania w rachunku prawdopodobieństwa. Rozpoczniemy od średnich ważonych.

Niestety na wykładzie tego tematu nie będę w stanie omówić z braku czasu. Piszę o tym, bo temat jest ważny i być może ktoś z tych studentów, którzy mają zamiar zrozumieć różne kwestie głębiej, zechce przeczytać ten fragment.

Definicja 6.11 (średniej ważonej)
Średnią ważoną liczb $x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots,\ x_n$ z wagami $p_1\ge 0, p_2\ge 0, p_3\ge 0,\ldots,p_n\ge 0$ nazywamy liczbę
$$p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3+\cdots+p_nx_n$$
pod warunkiem: $p_1+p_2+p_3+\cdots+p_n=1$. ■

W przypadku, gdy wagi są równe, więc równe $\frac{1}{n}$, średnia ważona zwana jest średnią arytmetyczną, a czasem po prostu średnią. Jeśli np. obliczono średnie płace dla różnych grup ludności i mamy policzyć średnią płacę w kraju, to ze względu na to, że np. ministrów jest istotnie mniej niż pielęgniarek (przynajmniej w chwili pisania tego tekstu), to ich płaca zostanie uwzględniona z mniejszą wagą niż płaca pielęgniarek. W obu przypadkach wagą będzie iloraz liczby członków danej grupy przez liczbę wszystkich zatrudnionych w kraju.

Inny przykład sytuacji, w której pojawia się średnia ważona, to próba przewidywania swej wygranej przez uczestnika gra hazardowej. Wie on, że za uzyskanie wyniku j otrzymuje on kwotę x_j (ta liczba może być ujemna, wtedy hazardzista płaci). Jeśli wynik j uzyskiwany jest z prawdopodobieństwem p_j, to należy spodziewać się wygranej $p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3+\cdots+p_nx_n$, tzn. grając wielokrotnie będziemy średnio uzyskiwać kwotę $p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3+\cdots+p_nx_n$. Przykłady można mnożyć, ale nie będziemy tego robić.

Twierdzenie 6.12 (Nierówność Jensena)
Jeśli funkcja f jest wypukła, to dla dowolnych jej argumentów $x_1,\ ,x_2,\ x_3,\ldots,x_n$ i dowolnych wag $p_1,\ p_2,\ p_3,\ldots,p_n$ zachodzi nierówność:
$$f(p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3+\cdots+p_nx_n)\le p_1f(x_1)+p_2f(x_2)+p_3f(x_3)+\cdots+p_nf(x_n).$$
Nierówność ta w przypadku funkcji ściśle wypukłej, dodatnich wag $p_1,p_2,\ldots,p_n$ i przynajmniej dwóch różnych argumentów spośród $x_1,x_2,\ldots,x_n$ jest ostra.

Dowód. Dla $n=1$ musi być $p_1=1$, więc nierówność staje się równością. Dla $n=2$ mamy $p_2=1-p_1$, więc nierówność występuje w definicji funkcji wypukłej.

Załóżmy, że dowodzone twierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich możliwych wyborów n argumentów funkcji f i n wag. Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ będą dowolnymi argumentami funkcji f, a $p_1, p_2, \ldots, p_n, p_{n+1}$ dowolnym układem $n+1$ wag, tj. liczb nieujemnych, których suma równa jest 1. Jeśli którakolwiek z wag jest równa 0, to nierówność z $n+1$ argumentami i $n+1$ wagami jest prawdziwa na mocy uczynionego założenia: argument odpowiadający zerowej wadze jest nieistotny, bo w nierówności faktycznie nie występuje. Załóżmy teraz, że wszystkie wagi $p_1, p_2, \ldots, p_n, p_{n+1}$ są dodatnie. Niech $p'_n = p_n + p_{n+1}$ i $x'_n = \frac{p_n x_n + p_{n+1} x_{n+1}}{p_n + p_{n+1}} = \frac{p_n}{p'_n} x_n + \frac{p_{n+1}}{p'_n} x_{n+1}$. Zachodzi równość $p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n + p_{n+1}x_{n+1} = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_{n-1}x_{n-1} + p'_nx'_n$. Z założenia, które uczyniliśmy wynika, że

$$
\begin{aligned}
&f(p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_{n-1}x_{n-1} + p'_nx'_n) \leq \\
&\quad \leq p_1f(x_1) + p_2f(x_2) + \ldots + p_{n-1}f(x_{n-1}) + p'_nf(x'_n) = \\
&\quad = p_1f(x_1) + p_2f(x_2) + \ldots + p_{n-1}f(x_{n-1}) + p'_nf\Big(\tfrac{p_n}{p'_n}x_n + \tfrac{p_{n+1}}{p'_n}x_{n+1}\Big) \leq \\
&\quad \leq p_1f(x_1) + p_2f(x_2) + \ldots + p_{n-1}f(x_{n-1}) + p'_n\Big(\tfrac{p_n}{p'_n}f(x_n) + \tfrac{p_{n+1}}{p'_n}f(x_{n+1})\Big) = \\
&\quad = p_1f(x_1) + p_2f(x_2) + \ldots + p_{n-1}f(x_{n-1}) + p_nf(x_n) + p_{n+1}f(x_{n+1})
\end{aligned}
$$

— druga z tych nierówności jest bezpośrednim wnioskiem z wypukłości funkcji f. Zakończyliśmy indukcyjny dowód nierówności Jensena. ■

Pokażemy teraz jej najprostsze zastosowania. Rozpoczniemy od klasycznej nierówności między średnimi.

Przykład 6.29 Nierówność Cauchy'ego między klasycznymi średnimi

Dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zachodzi: $\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$. Nierówność ta staje się równością wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Dowód. Zastosujemy nierówność Jensena do funkcji wypukłej $-\ln$. Mamy

$$
\begin{aligned}
&-\ln\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = -\ln\left(\tfrac{1}{n}a_1 + \tfrac{1}{n}a_2 + \cdots + \tfrac{1}{n}a_n\right) \leq \\
&\quad \leq \tfrac{1}{n}(-\ln)(a_1) + \tfrac{1}{n}(-\ln)(a_2) + \cdots + \tfrac{1}{n}(-\ln)(a_n) = -\tfrac{1}{n}\left(\ln a_1 + \ln a_2 + \ldots + \ln a_n\right).
\end{aligned}
$$

Stąd $\ln\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \frac{1}{n}\left(\ln a_1 + \ln a_2 + \ldots + \ln a_n\right)$ i wobec tego

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = e^{\ln\left((a_1+a_2+\cdots+a_n)/n\right)} \geq e^{(\ln a_1 + \ln a_2 + \ldots + \ln a_n)/n} = \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}.$$

Równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są równe, bowiem funkcja $-\ln$ jest ściśle wypukła. Dowód został zakończony. ■

Z kilku dowodów nierówności o średniej arytmetycznej i geometrycznej znanych autorowi, podany wyżej, jest najkrótszy.

Przykład 6.30 Nierówność Schwarza

Dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ zachodzi nierówność

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}\,.$$

Równość ma tu miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba nieujemna t, dla której zachodzą równości $a_1 = tb_1$, $a_2 = tb_2$, ... , $a_n = tb_n$ lub równości $b_1 = ta_1$, $b_2 = ta_2$,..., $b_n = ta_n$.

Dowód. Skorzystamy z nierówności Jensena dla funkcji x^2, która, jak to wykazaliśmy wcześniej jest ściśle wypukła. Zauważmy najpierw, że jeśli $a_j = 0$ dla pewnego j , to można przyjąć, że $b_j = 0$, bowiem w wyniku tej operacji otrzymujemy nierówność z tą samą lewą stroną i zmniejszoną stroną prawą, więc taką, z której wynika nierówność wyjściowa. Można więc przyjąć, że wszystkie liczby $a_1, a_2, \dots, a_n$ są różne od 0. To samo dotyczy liczb $b_1, b_2, \dots, b_n$. Po tej redukcji do przypadku prostszego z punktu widzenia zastosowanej metody dowodu, przejdziemy do właściwego dowodu. Mamy

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 =$$
$$= \left(\tfrac{a_1}{b_1} \cdot \tfrac{b_1^2}{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2} + \tfrac{a_2}{b_2} \cdot \tfrac{b_2^2}{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2} + \cdots + \tfrac{a_n}{b_n} \cdot \tfrac{b_n^2}{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}\right)^2 \cdot$$
$$\cdot \left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right)^2 \leq$$
$$\leq \left(\tfrac{b_1^2}{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2} \cdot \left(\tfrac{a_1}{b_1}\right)^2 + \tfrac{b_2^2}{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2} \cdot \left(\tfrac{a_2}{b_2}\right)^2 + \cdots + \tfrac{b_n^2}{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2} \cdot \left(\tfrac{a_n}{b_n}\right)^2\right) \cdot$$
$$\cdot \left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right)^2 =$$
$$= (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2).$$

Równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$. Wystarczy oznaczyć ten iloraz przez t, by otrzymać tezę. Oczywiście dla równości w wyjściowej nierówności potrzeba, by liczba t była dodatnia — w przypadku przeciwnym z lewej strony nierówności otrzymamy liczbę ujemną, podczas gdy liczba po prawej stronie nierówności jest dodatnia. Dowód został zakończony. ■

Nierówność Schwarza, którą udowodniliśmy można zinterpretować geometrycznie w przypadku $n = 2$ i $n = 3$. Wyrażenie $a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$ można potraktować jako iloczyn skalarny wektorów $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ i $[b_1, b_2, \dots, b_n]$. Iloczyn skalarny dwóch wektorów leżących na płaszczyźnie, to jak wiemy, iloczyn ich długości przez kosinus kąta między nimi. Udowodniliśmy bez żadnych trudności, używając twierdzenia kosinusów, że iloczyn skalarny zdefiniowany geometrycznie wyraża się w podany przez nas sposób za pomocą współrzędnych prostokątnych tych wektorów. Przy takiej interpretacji nierówność Schwarza to po prostu stwierdzenie, że kosinus kąta między dwoma wektorami nie może być większy niż 1 oraz że przyjmuje on wartość 1 wtedy i tylko wtedy, gdy wektory są równoległe i zgodnie skierowane. Ta interpretacja jest bardzo ważna. Służy ona jako podstawa do rozszerzenia definicji iloczynu skalarnego na przestrzenie o większej liczbie wymiarów, co ułatwia zajmowanie się funkcjami wielu zmiennych. Spotkamy się z tymi pojęciami w rozdziałach poświęconych funkcjom wielu zmiennych rzeczywistych.

Podany przez nas dowód nierówności Schwarza nie jest najprostszy. Najprostszy znany autorowi tego tekstu wygląda tak: wielomian kwadratowy

$$\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)t^2-2\left(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\right)t+\left(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\right)=$$
$$=\left(a_1t-b_1\right)^2+\left(a_2t-b_2\right)^2+\cdots+\left(a_nt-b_n\right)^2$$

przyjmuje jedynie nieujemne wartości, więc jego wyróżnik (popularna $\Delta=b^2-4ac$) nie jest większy od 0, to właśnie jest nierówność Schwarza.

Można też udowodnić to twierdzenie bez żadnych sztuczek. Wystarczy dowieść, że

$$\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\right)-\left(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\right)^2=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=i+1}^{n}\left(a_ib_j-a_jb_i\right)^2\Big).$$

Zachęcamy czytelników do udowodnienia tej równości. To dobre, choć krótkie, ćwiczenie w operowaniu wyrażeniami algebraicznymi, a tego rodzaju umiejętności są przydatne w matematyce, nie tylko w czasie egzaminów z tego przedmiotu.

Przykład 6.31 Wykażemy, że spośród 5-kątów wpisanych w okrąg o promieniu 1 największy obwód ma pięciokąt foremny.

Niech $2\alpha_1$, $2\alpha_2$, $2\alpha_3$, $2\alpha_4$, $2\alpha_5$ będą kątami środkowymi opartymi na bokach pięciokąta.* Wtedy bokami są liczby $2\sin\alpha_1$, $2\sin\alpha_2$, $2\sin\alpha_3$, $2\sin\alpha_4$, $2\sin\alpha_5$, co wynika z definicji sinusa. Wobec tego połowa obwodu pięciokąta równa jest

$$\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\sin\alpha_3+\sin\alpha_4+\sin\alpha_5\,.$$

Oczywiście spełnione są nierówności $0<\alpha_1<\pi$, $0<\alpha_2<\pi$, $0<\alpha_3<\pi$, $0<\alpha_4<\pi$, $0<\alpha_5<\pi$. Na przedziale $[0,\pi]$ sinus jest funkcją ściśle wklęsłą, stosujemy nierówność Jensena:

$$\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\sin\alpha_3+\sin\alpha_4+\sin\alpha_5=$$
$$=5\left(\tfrac15\sin\alpha_1+\tfrac15\sin\alpha_2+\tfrac15\sin\alpha_3+\tfrac15\sin\alpha_4+\tfrac15\sin\alpha_5\right)\le$$
$$\le5\sin\left(\tfrac15\alpha_1+\tfrac15\alpha_2+\tfrac15\alpha_3+\tfrac15\alpha_4+\tfrac15\alpha_5\right)=5\sin\tfrac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5}{5}=5\sin\tfrac{\pi}{5}\,.$$

Wielkość $5\sin\frac{\pi}{5}$ to połowa obwodu pięciokąta foremnego wpisanego w okrąg, więc twierdzenie jest udowodnione. Wypada dodać, że ponieważ funkcja sinus na przedziale $[0,\pi]$ jest ściśle wklęsła, więc pięciokąty nieforemne mają obwody mniejsze niż pięciokąt foremny wpisany w ten sam okrąg. ■

Te przykłady to tylko drobna ilustracja różnorodnych możliwości, które daje nierówność Jensena. Niebawem poznamy inne sposoby uzyskiwania nierówności przy wykorzystaniu wypukłości funkcji.

Teraz pokażemy, jak można badać wypukłość w przypadku funkcji różniczkowalnej. Wykazaliśmy niedawno, że definicja wypukłości jest równoważna temu, że spełniony jest jeden (którykolwiek) z trzech warunków (dla funkcji ściśle wypukłej

* Wierzchołek kąta jest środkiem okręgu, ramiona przechodzą przez końce boku.

poniższe nierówności są ostre):

(a) $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$ dla każdych x, y, z z dziedziny funkcji f, dla których $x < y < z$,

(b) $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$ dla każdych x, y, z z dziedziny funkcji f, dla których $x < y < z$,

(c) $\frac{f(x)-f(z)}{x-z} \leq \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$ dla każdych x, y, z z dziedziny funkcji f, dla których $x < y < z$.

Udowodnimy teraz twierdzenie, które charakteryzuje funkcje wypukłe w terminach pochodnych. Przed sformułowaniem go wprowadzimy oznaczenia:

$f'_-(x) = \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ oznacza *lewostronną pochodną* funkcji f w punkcie x,

$f'_+(x) = \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ oznacza *prawostronną pochodną* funkcji f w punkcie x.

Twierdzenie 6.13 (o pochodnej funkcji wypukłej)

Jeśli f jest funkcją wypukłą określoną na przedziale otwartym P, to

W1. w każdym punkcie $x \in P$ istnieją pochodne jednostronne $f'_-(x)$ i $f'_+(x)$ oraz $f'_-(x) \leq f'_+(x)$;

W2. jeśli $x, y \in P$ i $x < y$, to $f'_+(x) \leq f'_-(y)$, przy czym jeśli f jest ściśle wypukła, to nierówność jest ostra;

W3. funkcja f jest ciągła w każdym punkcie przedziału *otwartego* P.

Dowód. Niech D_x, gdzie $D_x(t) = \frac{f(t)-f(x)}{t-x}$ dla dowolnego punktu $t \in P \setminus \{x\}$, oznacza iloraz różnicowy funkcji f w punkcie x. Załóżmy, że $u < v < x < r < s$ są punktami przedziału P. Z własności (c) wynika, że $D_x(u) \leq D_x(v)$. Z własności (b) wynika z kolei, że $D_x(v) \leq D_x(r)$, zaś z własności (a) wynika, że $D_x(r) \leq D_x(s)$. Mamy więc $D_x(u) \leq D_x(v) \leq D_x(r) \leq D_x(s)$. Oznacza to, że funkcja D_x jest niemalejąca w całym zbiorze $P\setminus\{x\}$. Ma więc granice jednostronne w każdym punkcie przedziału P, w tym w punkcie x. Zachodzą oczywiste równości: $\lim\limits_{t\to x^-} D_x(t) = f'_-(x)$ oraz $\lim\limits_{t\to x^+} D_x(t) = f'_+(x)$, przy czym $f'_-(x) \leq D_x(r)$, i wobec tego $f'_-(x) \leq f'_+(x)$. Pierwsza część twierdzenia została udowodniona.

Załóżmy teraz, że $x < r < y$. Z własności (b) wynika, że $D_x(r) \leq D_y(r)$, a z tego, co udowodniliśmy dotychczas, wynikają nierówności $f'_+(x) \leq D_x(r)$ i $D_y(r) \leq f'_-(y)$. Z trzech otrzymanych nierówności wynika, że $f'_+(x) \leq f'_-(y)$. Uzyskaliśmy więc drugą część tezy.

Z istnienia jednostronnych pochodnych *skończonych* w punkcie x wynika, że funkcja f jest w tym punkcie lewo– i prawostronnie ciągła, więc jest ciągła. W przypadku funkcji ściśle wypukłej nierówności stają się ostre, bo wtedy nierówności w (a), (b), (c) są ostre. Dowód został zakończony. ■

Wniosek 6.14 (z dowodu twierdzenia)
Jeśli f jest funkcją wypukłą określoną na przedziale otwartym P, to dla dowolnego $h>0$, takiego że $x+h\in P$ zachodzi nierówność $f(x+h)\geq f(x)+f'_+(x)h$. Jeśli $x-h\in P$, to zachodzi nierówność $f(x-h)\geq f(x)-f'_-(x)h$. W przypadku funkcji ściśle wypukłej nierówności te są ostre.

Dowód. Wynika to natychmiast z tego, że $f'_+(x)\leq D_x(x+h)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, w pierwszym przypadku. W drugim z tego, że $f'_-(x)\geq D_x(x-h)=\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$. ■

Wykazane twierdzenie oznacza, że pochodna różniczkowalnej funkcji wypukłej jest niemalejąca. Wniosek to po prostu stwierdzenie, że wykres funkcji wypukłej leży nad styczną do siebie w dowolnym punkcie wewnętrznym przedziału–dziedziny. Przy okazji okazuje się, że funkcja wypukła może być nieróżniczkowalna w pewnych punktach, np. $|x|$, $|x+1|+|x|+|x-1|$ lub $e^{|x|}$, ale w punktach wewnętrznych dziedziny ma skończone pochodne jednostronne, więc jest „niedaleka” od funkcji różniczkowalnej. Wypada nadmienić, że te uwagi nie dotyczą końców przedziału–dziedziny, w których funkcja wypukła może nie być ciągła, np. jeśli $f(x)=x^2$ dla $x>0$ i $f(0)=1$, to f jest ściśle wypukła na półprostej domkniętej $[0,\infty)$, choć jest nieciągła w punkcie 0, więc tym bardziej nie ma w tym punkcie pochodnej. Takimi funkcjami nie będziemy się jednak zajmować, bo skłonni jesteśmy przyznać, że są one nieco sztuczne.

Pojawiła się poprzednio nierówność $e^x>1+x$ dla $x\neq 0$. Teraz możemy ją wywnioskować ze ścisłej wypukłości funkcji e^x na przedziale $(-\infty,\infty)$. Nierówność $\sin x<x$ dla $0<x<\pi$ jest konsekwencją ścisłej wklęsłości funkcji sinus na przedziale $[0,\pi]$. Jeśli $0<x\neq 1$, to $\ln x<x-1$, co wynika z tego, że funkcja ln jest ściśle wklęsła na $(0,\infty)$, co wykażemy niebawem. Widzimy więc, że również w ten sposób można uzyskiwać różne oszacowania. Warto więc umieć wyjaśnić, czy funkcja na określonym przedziale jest wypukła, wklęsła, czy też ani wypukła, ani wklęsła. Okazuje się, że w wielu przypadkach można to wyjaśnić badając pochodną interesującej nas funkcji.

Twierdzenie 6.15 (o wypukłości funkcji, której pochodna jest niemalejąca)
Jeśli funkcja f jest zdefiniowana na przedziale otwartym P i ma w punktach wewnętrznych tego przedziału jednostronne pochodne f'_+ i f'_-, dla których zachodzą warunki:
W1. dla każdego $x\in P$ zachodzi nierówność $f'_-(x)\leq f'_+(x)$,
W2. jeśli $x<y$ i $x,y\in P$, to $f'_+(x)\leq f'_-(y)$,
to funkcja f jest wypukła na przedziale P. Jeżeli nierówność w warunku W2 jest ostra, to funkcja f jest ściśle wypukła. W szczególności:
funkcja różniczkowalna f jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna f' jest

niemalejąca, ściśle wypukła — wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna f' *jest ściśle rosnąca.*

Dowód. Udowodnimy to twierdzenie dla funkcji różniczkowalnych, bo w tym przypadku dowód jest bardzo prosty, dowód wersji ogólnej nie jest chemikom niezbędny. Z wypukłości funkcji wynika, że jej pochodna jest niemalejąca — jest to wniosek z poprzedniego twierdzenia. Zajmiemy się dowodem „w drugą stronę". Zakładamy, że funkcja f jest różniczkowalna, a jej pochodna f' jest niemalejąca: $x < y \Longrightarrow f'(x) \le f'(y)$. By udowodnić, że funkcja f jest wypukła, wystarczy wykazać, że jeśli $x < y < z$, to $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \le \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$. Z twierdzenia o wartości średniej wynika, że istnieją punkty $r \in (x,y)$ oraz $s \in (y,z)$, takie że $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(r)$ oraz $\frac{f(y)-f(z)}{y-z} = f'(s)$. Ponieważ $r < y < s$, więc $r < s$ i wobec tego $f'(r) \le f'(s)$, co kończy dowód twierdzenia w tym przypadku. ■

Przykład 6.32 Funkcja x^a jest ściśle wypukła na półprostej $(0,+\infty)$ dla $a > 1$ oraz dla $a < 0$, natomiast w przypadku $0 < a < 1$ jest ściśle wklęsła. Wynika to natychmiast z twierdzenia o wypukłości funkcji o niemalejącej pochodnej, bowiem $(x^a)' = ax^{a-1}$ i wobec tego $\big((x^a)'\big)' = a(a-1)x^{a-2}$, więc funkcja $\big((x^a)'\big)'$ jest dodatnia na półprostej $(0,+\infty)$ w przypadku $a > 1$ oraz $a < 0$, natomiast w przypadku $0 < a < 1$ – funkcja ta jest ujemna, z czego wynika, że pochodna $(x^a)'$ rośnie w pierwszych dwóch przypadkach, natomiast w trzecim – maleje. ■

Przykład 6.33 *Uogólniona nierówność Bernoulliego.* Jeśli zachodzą nierówności $a > 0$ lub $a < 0$ i $-1 < x \ne 0$, to $(1+x)^a > 1 + ax$. Jeśli natomiast $0 < a < 1$ oraz $-1 < x \ne 0$, to $(1+x)^a < 1 + ax$.
Wynika to od razu z wyników poprzedniego przykładu, z tego że pochodną funkcji $(1+x)^a$ w punkcie 0 jest liczba a oraz z tego, że wykres funkcji ściśle wypukłej leży nad styczną mając z nią dokładnie jeden punkt wspólny, zaś wykres funkcji ściśle wklęsłej leży pod styczną mając z nią dokładnie jeden punkt wspólny. ■

Przykład 6.34 Funkcja wykładnicza a^x o podstawie dodatniej $a \ne 1$ jest ściśle wypukła. Mamy bowiem $(a^x)' = \big(e^{x\ln a}\big)' = e^{x\ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$. Wobec tego $\big((a^x)'\big)' = a^x \cdot (\ln a)^2 > 0$ dla każdego x, więc funkcja $(a^x)'$ jest ściśle rosnąca na całej prostej, a wobec tego funkcja a^x jest ściśle wypukła. Wynika stąd, między innymi, że wykres funkcji wykładniczej leży nad styczną (w dowolnym punkcie), np. $a^x > 1 + x \cdot \ln a$ dla $x \ne 0$ i $0 < a \ne 1$. ■

Przykład 6.35 Funkcja $\log_a x$ jest ściśle wklęsła na półprostej $(0,+\infty)$ w przypadku $a > 1$, natomiast w przypadku $0 < a < 1$ funkcja $\log_a x$ jest ściśle wypukła.

Wynika to z tego, że $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$, wobec czego $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, więc pochodna ta jest ściśle malejąca w przypadku $\ln a > 0$, czyli w przypadku $a > 1$ oraz — ściśle rosnąca w przypadku $\ln a < 0$, czyli $0 < a < 1$. ■

Przykład 6.36 Funkcja sinus jest ściśle wklęsła na każdym przedziale postaci $[2n\pi, (2n+1)\pi]$, zaś na przedziałach postaci $[(2n-1)\pi, 2n\pi]$ jest ona ściśle wypukła, n oznacza tu dowolną liczbę całkowitą. Wynika to stąd, że $(\sin x)' = \cos x$ oraz z tego, że funkcja kosinus maleje na przedziałach postaci $[2n\pi, (2n+1)\pi]$ i rośnie na przedziałach postaci $[(2n-1)\pi, 2n\pi]$.

Ze ścisłej wklęsłości funkcji sinus na przedziale $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ wynika, że jeśli $0 < x < \frac{\pi}{2}$, to $\frac{2x}{\pi} < \sin x < x$ – wykres leży nad sieczną (odcinkiem o końcach $(0,0)$ i $(\frac{\pi}{2}, 1)$) i pod styczną (w punkcie $(0,0)$). Druga z tych nierówności znamy już od dawna, ale warto raz jeszcze podkreślić jej związek z wklęsłością funkcji sinus. ■

Przykład 6.37 Funkcja tangens jest ściśle wypukła na każdym przedziale postaci $[n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2})$ zaś na każdym przedziale postaci $(n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi]$ jest ściśle wklęsła, n oznacza tu dowolną liczbę całkowitą. Wynika to, z tego że na przedziałach postaci $[n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2})$ pochodna funkcji tangens, czyli funkcja $1 + \mathrm{tg}^2 x$ rośnie, zaś na przedziałach postaci $(n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi]$ – maleje. ■

Analiza przykładów wskazuje na to, że zdarzają się funkcje, które w całej swej dziedzinie nie są ani wypukłe ani wklęsłe. W podanych przykładach zdarzało się tak, że po jednej stronie pewnego punktu mieliśmy do czynienia z funkcją wypukłą a po drugiej – z wklęsłą. Przy szkicowaniu wykresów funkcji rozsądnie jest znaleźć takie punkty zawczasu. Mają one swą nazwę.

Definicja 6.16 (punktu przegięcia)
Punkt p jest jest punktem przegięcia funkcji ciągłej f wtedy i tylko wtedy, gdy wykres funkcji f ma styczną w punkcie $\big(p, f(p)\big)$ i istnieje taka liczba $\delta > 0$, że:

(i) przedział $(p-\delta, p+\delta)$ jest zawarty w dziedzinie funkcji f,

(ii) na jednym z przedziałów $(p-\delta, p]$, $[p, p+\delta)$ funkcja f jest wypukła, a na drugim wklęsła,

(iii) na żadnym z przedziałów $(p-\eta, p+\eta]$, $[p, p+\eta)$, gdzie $\eta \in (0, \delta)$, funkcja f nie jest liniowa. ■

Wypada dodać, że w literaturze istnieje kilka nierównoważnych definicji punktu przegięcia, jednak wszystkie one pokrywają się w przypadku najprostszych funkcji.

Przykładowym określeniem punktu przegięcia nierównoważnym podanemu wyżej jest: *p jest punktem przegięcia funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy wykresu funkcji f ma styczną w punkcie $(p, f(p))$ przy czym z jednej strony tego punktu wykres znajduje się pod tą styczną, a z drugiej – nad nią.* Czytelnik może sprawdzić, że 0 jest punktem przegięcia funkcji f zdefiniowanej wzorami $f(0)=0$, $f(x)=x^2(2+\sin\frac{1}{x})$ dla $x>0$ oraz $f(x)=-x^2(2+\sin\frac{1}{x})$ dla $x<0$ w sensie drugiego określenia, ale nie jest punktem przegięcia w sensie definicji, którą podaliśmy wcześniej. Natomiast 0 jest punktem przegięcia funkcji f zdefiniowanej wzorami $f(x)=-x^2$ dla $x<0$ oraz $f(x)=x+x^2$ dla $x\geq 0$ w sensie „definicji punktu przegięcia", ale nie w sensie określenia zacytowanego po niej. Niestety, matematycy nie ustalili tej definicji na tyle sztywno, by jedna jedna jej wersja została przyjęta przez wszystkich, więc czytając różne podręczniki można spotykać się z istotnie różnymi definicjami, które jednak w przypadku funkcji zdefiniowanych „za pomocą jednego wzoru"* dają ten sam rezultat.

Założyliśmy, że wykres funkcji f ma styczną w punkcie $\big(p,f(p)\big)$ po to, by funkcja zdefiniowana wzorami $f(x)=x-x^2$ dla $x<0$ i $f(x)=x(x-1)$, której wykres ma w punkcie 0 „ostrze" i która ma w tym punkcie lokalne maksimum właściwe nie miała w tym punkcie przegięcia. Punkty przegięcia to raczej ciekawostka, z naszego punktu widzenia chodzi jedynie o wypukłość lub wklęsłość, a nie o szczegółową analizę najbardziej właściwej definicji punktu przegięcia.

Jest jasne, że punkty postaci $n\pi$ są punktami przegięcia funkcji sinus oraz funkcji tangens, że 0 jest punktem przegięcia funkcji x^{2n+1} dla $n=1,2,3,\ldots$, że funkcja postaci $ax+b$ nie ma punktów przegięcia, że funkcja x^{2n} dla $n=1,2,3,\ldots$ nie ma punktów przegięcia, bowiem jest ściśle wypukła. Funkcja $\sqrt[7]{x}$ zdefiniowana na całej prostej ma punkt przegięcia w 0, choć nie jest w tym punkcie różniczkowalna (ma pochodną, ale równą $+\infty$), bo jest ściśle wypukła na półprostej $(-\infty,0]$ zaś na półprostej $[0,+\infty)$ jest ściśle wklęsła. Te przykłady można mnożyć, ale nie będziemy tego robić, bo to proste pojęcie nie przysparza większych problemów studentom.

Symbole nieoznaczone, reguła de l'Hospitala

Często zachodzi potrzeba obliczenia granicy ilorazu dwu funkcji, gdy granica każdej z nich równa jest 0 lub ∞. Zdarza się, że trzeba obliczyć granicę iloczynu dwu funkcji, z których jedna ma granicę 0, a druga — ∞. Ten drugi przypadek można sprowadzić do pierwszego: $fg=\frac{f}{1/g}=\frac{g}{1/f}$. Bywa, że interesuje nas granica wyrażenia f^g przy czym granicą f jest 1, a granicą g jest ∞. Wzór $f^g=e^{g\cdot\ln f}$ pozwala problem zredukować do obliczania granicy iloczynu, więc w dalszym ciągu do obliczania granicy ilorazu. Zdarzają się też inne sytuacje, w których nie są spełnione założenia dotychczas sformułowanych twierdzeń o granicach. Podobnie jak w przypadku ciągów istnieje twierdzenie, które w wielu sytuacjach ułatwia znalezienie gra-

* Chodzi o tzw. funkcje analityczne, którymi zajmować się nie będziemy z braku czasu, choć są bardzo ważne zwłaszcza z punktu widzenia fizyki.

nicy. Jest to tzw. reguła de l'Hospitala, francuskiego markiza, który po wysłuchaniu wykładów Jana Bernoulliego wydał drukiem notatki z nich pod tytułem *Analyse des infiniment petites**, co spowodowało protesty rzeczywistego autora tekstu, ale wtedy nie istniało jeszcze pojęcie praw autorskich. Twierdzenie, które znajduje się poniżej, pochodzi z tej właśnie książki i — według historyków matematyki — powinno mieć inną nazwę.

Twierdzenie 6.17 (Reguła de l'Hospitala)
Załóżmy, że funkcje $f, g\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ są różniczkowalne w każdym punkcie pewnego przedziału (a,b), że $g(x) \neq 0 \neq g'(x)$ dla każdego $x \in (a,b)$, że istnieje granica $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = G \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ oraz że spełniony jest jeden z dwóch warunków:

$$1^\circ \quad \lim_{x\to a} f(x) = 0 = \lim_{x\to a} g(x), \qquad\qquad 2^\circ \quad \lim_{x\to a} |g(x)| = +\infty.$$

Wtedy iloraz $\frac{f(x)}{g(x)}$ ma granicę przy $x \to a$ i zachodzi równość $\quad G = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Dowód. Udowodnimy teraz to twierdzenie przy bardzo mocnych założeniach. Chodzi nam o to, by wyjaśnić jego sens. Dowód w przypadku ogólnym, znajduje się w wielu podręcznikach. Założymy mianowicie, że $a > -\infty$, że zachodzi warunek 1° oraz że istnieją *skończone* granice $\lim\limits_{x\to a} f'(x)$ i $\lim\limits_{x\to a} g'(x)$, przy czym ta druga jest różna od 0. W tej sytuacji można dookreślić funkcje f, g w punkcie a przyjmując $f(a) = 0 = g(a)$. Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej zastosowanego do funkcji f rozpatrywanej na przedziale $[a,x]$ wynika, że $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c_x)$ dla pewnego punktu $c_x \in (a,x)$. Stąd wynika natychmiast, że $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} f'(x)$. Wykazaliśmy więc, że w tym przypadku funkcję f można potraktować jako określoną w punkcie a i to w taki sposób, że $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} f'(x)$. To samo dotyczy oczywiście funkcji g. Oczywiście w obu przypadkach mamy na myśli różniczkowalność prawostronną. Niech $r(h) = \frac{f(a+h)-f(a)-f'(a)h}{h}$ dla $h \neq 0$ oraz $r(0) = 0$. Jest oczywiście $\lim\limits_{h\to 0} r(h) = 0$. Analogicznie niech $\varrho(h) = \frac{g(a+h)-g(a)-g'(a)h}{h}$. Wtedy $\lim\limits_{h\to 0} \varrho(h) = 0$. Stąd możemy wywnioskować, że

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-0}{g(x)-0} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(a)(x-a)+(x-a)r(x-a)}{g'(a)(x-a)+(x-a)\varrho(x-a)} = \frac{f'(a)+r(x-a)}{g'(a)+\varrho(x-a)} \xrightarrow[x\to a]{} \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Ostatnie przejście graniczne jest wykonalne, bo założyliśmy, że $g'(a) \neq 0$. ■

Od tego i innych zbędnych założeń można uwolnić się, ale nie mamy czasu na dowodzenie twierdzeń przy najsłabszych założeniach.

W dowodzie tym wykorzystaliśmy w istotny sposób założenia $f(a) = g(a) = 0$. Oczywiście bez tych założeń teza może być w konkretnej sytuacji prawdziwa jedynie

* **Analiza nieskończenie małych**. Trzeba jednak powiedzieć, że tylko nieliczni potrafią zanotować zrozumiale wykład.

przypadkiem – pochodne decydują o wielkości funkcji w otoczeniu punktu, w którym wartością funkcji jest 0, jeśli $f(a) \neq 0$, to „w pierwszym przybliżeniu" $f(x) \approx f(a)$!

Zauważmy jeszcze, że twierdzenie pozostaje prawdziwe dla granicy $\lim\limits_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)}$ po dokonaniu odpowiednich kosmetycznych zmian w założeniach i w tezie. Z tego zdania wynika, że można je też stosować w przypadku granic dwustronnych

Pokażemy teraz na kilku przykładach, jak można stosować regułę de l'Hospitala. Niektóre z podanych rezultatów zostały uzyskane wcześniej lub można je było uzyskać używając twierdzeń wykazanych wcześniej.

Przykład 6.38 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0$. Możemy próbować zastosować regułę de l'Hospitala, bo mianownik ma granicę nieskończoną i jego pochodna, e^x, jest różna od 0 wszędzie. Nie jest istotne jaka jest granica licznika, a nawet czy licznik ma granicę. Iloraz pochodnych to $\frac{ax^{a-1}}{e^x}$, więc jest to wyrażenie tego samego typu co wyjściowe. Istotną zmianą jest pojawienie się w wykładniku $a-1$ w miejsce a. Jeśli $a \leq 1$, to licznik jest ograniczony z góry na półprostej $[1, +\infty)$, a mianownik dąży do $+\infty$, więc iloraz dąży do 0. Jeśli $a > 1$, to stosujemy regułę de l'Hospitala $k \geq a$ razy. Omówimy to dokładniej. Po k–krotnym zróżniczkowaniu w liczniku pojawia się wyrażenie $a(a-1)(a-2)\cdot\ldots\cdot(a-k+1)x^{a-k}$, w mianowniku natomiast mamy e^x. Ponieważ $k \geq a$, więc funkcja $a(a-1)(a-2)\cdot\ldots\cdot(a-k+1)x^{a-k}$ jest ograniczona, zatem $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a(a-1)(a-2)\cdot\ldots\cdot(a-k+1)x^{a-k}}{e^x} = 0$. Dzięki regule de l'Hospitala możemy stwierdzić, że $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a(a-1)(a-2)\cdot\ldots\cdot(a-k+2)x^{a-k+1}}{e^x} = 0$. Stosując twierdzenie jeszcze $k-1$ razy dochodzimy w końcu do granicy $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0$.

Oczywiście wynik ten można otrzymać stosując jedynie elementarne metody: wykładnik a można zastąpić liczbą naturalną $m > a$, następnie skorzystać z nierówności $e^x > \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ prawdziwej dla każdej liczby naturalnej n i każdej liczby $x > 0$, potem skorzystać z tego, że granicą ilorazu wielomianu stopnia m przez wielomian stopnia $n > m$ przy $x \to \infty$ jest liczba 0. Pokazaliśmy tu jak można wykorzystać twierdzenie de l'Hospitala. Pozwala ono obliczać granice w wielu sytuacjach, w których metody elementarne nie działają lub wymagają dobrego pomysłu! ■

Przykład 6.39 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$ dla każdego $a > 0$. Ponieważ mianownik jest funkcja ściśle rosnącą o granicy $+\infty$, więc można spróbować znaleźć granicę ilorazu pochodnych: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1/x}{ax^{a-1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{ax^a} = 0$. Istnieje, więc istnieje też również granica ilorazu funkcji i również jest równa 0. ■

Przykład 6.40 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = 1$. Mamy bowiem: $x^x = e^{x\ln x}$. Funkcja wykładnicza jest ciągła, więc starczy wykazać, że $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$. Mamy

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to +\infty} \tfrac{1}{y}\ln\tfrac{1}{y} = -\lim_{y\to +\infty}\tfrac{\ln y}{y} = 0$$

— ostatnia równość wynika z rezultatu uzyskanego w poprzednim przykładzie dla $a = 1$, przedostatnia – z tego, że $\ln\frac{1}{y} = -\ln y$. ■

Przykład 6.41 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$ – to wzmocnienie wyniku $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. Dzięki oczywistej równości $(1+x)^{1/x} = e^{(1/x)\cdot\ln(1+x)}$ wiemy, że wystarczy wykazać równość $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$. Ta równość została już wcześniej udowodniona, zresztą $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln 1}{x}$, więc granica ta jest równa pochodnej logarytmu naturalnego w punkcie 1 (to wniosek z definicji pochodnej, reguła de l'Hospitala nie jest tu potrzebna), czyli $\frac{1}{1} = 1$. ■

Przykład 6.42 Pokażemy teraz w prosty sposób, że ciąg $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ jest wolno zbieżny do liczby e, więc nie należy go używać do jej przybliżonego obliczania. Obliczymy mianowicie granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\frac{1}{n}}$. W tym celu obliczymy granicę

$$\lim_{x\to 0}\frac{e-(1+x)^{1/x}}{x}.$$

Z istnienia tej ostatniej wynika oczywiście istnienie poprzedniej (definicja granicy wg. Heinego), odwrotne wynikanie nie zachodzi. Z rezultatu z poprzedniego przykładu wynika, że zarówno licznik jak i mianownik dążą do 0 przy $x\to 0$. Zbadamy więc iloraz pochodnych. Jest on równy pochodnej licznika, czyli

$$\left(e-(1+x)^{1/x}\right)' = \left(-e^{\ln(1+x)/x}\right)' = -e^{\ln(1+x)/x}\cdot\frac{\frac{1}{1+x}x-\ln(1+x)}{x^2} =$$

$$= -(1+x)^{1/x}\cdot\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)} = -\frac{(1+x)^{1/x}}{1+x}\cdot\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}.$$

Z tego co już wiemy wynika, że $\lim\limits_{x\to 0} -\frac{(1+x)^{1/x}}{1+x} = -e$. Wystarczy więc obliczyć granicę drugiego czynnika, czyli $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}$. Jest jasne, że licznik i mianownik dążą do 0 przy $x\to 0$. Zajmiemy się więc ilorazem pochodnych. Jest on równy $\frac{1-\left(\ln(1+x)+(1+x)\cdot\frac{1}{1+x}\right)}{2x} = -\frac{\ln(1+x)}{2x} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}$, więc ma przy $x\to 0$ granicę $-\frac{1}{2}$. Wobec tego $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e-(1+x)^{1/x}}{x} = (-e)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{e}{2}$.

Z otrzymanej równości $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\frac{1}{n}} = \frac{e}{2}$ wynika, że dla „dużych” n zachodzi równość przybliżona $e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx \frac{e}{2n}$, więc dla uzyskania dobrej dokładności przybliżenia trzeba używać dużej liczby naturalnej n.

Komentarz: w końcowej fazie obliczeń, przed zastosowaniem reguły de l'Hospitala, przedstawiliśmy ułamek w postaci iloczynu dwóch ułamków. Gdybyśmy tego nie uczynili obliczenia wyglądałyby o wiele poważniej. ■

Przykład 6.43 W ostatnim przykładzie pokazaliśmy, że $e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\approx\frac{e}{2n}$ dla dostatecznie dużych n. Podamy teraz konkretne oszacowanie. Wykażemy, że dla wszystkich liczb naturalnych $n\ge 1$ zachodzi nierówność podwójna

$$\tfrac{e}{2n+2}<e-\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n<\tfrac{e}{2n+1}\,.\ ^*$$

Z nierówności tej wynika, że jeśli np. chcemy znaleźć trzy miejsca po przecinku dziesiętnego rozwinięcia liczby e stosując wzór $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, to musimy wybrać n tak duże, by $\frac{e}{2n+1}<\frac{1}{1000}$, czyli $n>\frac{1000e-1}{2}>1359$. Z nierówności $e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>\frac{e}{2n+2}$ wynika, że dla $n=1358$, błąd jest większy niż $0{,}001$.

Zajmiemy się najpierw nierównością $\frac{e}{2n+2}<e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Jest ona równoważna następującej nierówności $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}<e\left(1+\frac{1}{2n}\right)$ — przenieśliśmy składniki zawierające liczbę e na prawą stronę, składniki bez e — na lewą, następnie pomnożyliśmy obie strony nierówności przez $1+\frac{1}{n}=\frac{n+1}{n}$. Teraz zastąpimy $\frac{1}{n}$ przez x. Mamy dowieść, że $(1+x)^{1+1/x}<e\left(1+\frac{x}{2}\right)$. Ponieważ logarytm naturalny jest funkcją ściśle rosnącą, więc nierówność ta równoważna jest następującej

$$\left(\tfrac{1}{x}+1\right)\ln(1+x)<1+\ln\left(1+\tfrac{x}{2}\right).$$

Wystarczy rozpatrywać $x>0$, bo chodzi nam o $x=\frac{1}{n}$. Po pomnożeniu obu stron przez $x>0$ i przeniesieniu wszystkich składników na jedną stronę otrzymujemy

$$x+x\ln\left(1+\tfrac{x}{2}\right)-(1+x)\ln(1+x)>0\,.$$

Oznaczywszy lewą stronę przez $f(x)$ stwierdzamy, że $f(0)=0$ oraz

$$f'(x)=1+\ln\left(1+\tfrac{x}{2}\right)+x\,\tfrac{\frac{1}{2}}{1+\frac{x}{2}}-\ln(1+x)-(1+x)\tfrac{1}{1+x}=$$

$$=\tfrac{x}{2+x}-\ln\tfrac{1+x}{1+\frac{x}{2}}=\tfrac{x}{2+x}-\ln\left(1+\tfrac{x}{2+x}\right)>0$$

— ostatnia nierówność wynika z tego, że $\ln(1+y)<y$ dla $-1<y\neq 0$, co wynika np. z tego, że funkcja ln jest ściśle wklęsła na $(0,+\infty)$, a wykres funkcji ściśle wklęsłej leży pod styczną do siebie. Wykazaliśmy, że $f'(x)>0$ dla $x>0$, więc funkcja f rośnie na półprostej $[0,+\infty)$, a ponieważ $f(0)=0$, więc dla $x>0$ przyjmuje jedynie wartości dodatnie. W szczególności $f\left(\frac{1}{n}\right)>0$, a to właśnie chcieliśmy udowodnić.

Teraz zajmiemy się nierównością $e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{e}{2n+1}$. Jest ona równoważna nierówności

$$e<\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n\left(1+\tfrac{1}{2n}\right)$$

— przenieśliśmy oba wyrazy zawierające e na lewą stronę nierówności, resztę —

* zob. G.Pólya, G.Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Springer 1964, wyd. 3, t.1.

na prawą stronę, następnie podzieliliśmy nierówność przez $1-\frac{1}{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}$. Teraz oznaczymy $\frac{1}{n}$ przez x i zlogarytmujemy obie strony nierówności. Otrzymujemy nierówność $1<\frac{1}{x}\ln(1+x)+\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)$. Niech $g(x)=\frac{1}{x}\ln(1+x)+\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)-1$. Wykażemy, że dla $x>0$ zachodzi $g(x)>0$.

Niech $h(x)=xg(x)=\ln(1+x)+x\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)-x$. Obliczamy pochodną $h'(x)=\frac{1}{1+x}+\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)+\frac{\frac{x}{2}}{1+\frac{x}{2}}-1=\frac{x}{2+x}-\frac{x}{1+x}+\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)=\frac{-x}{(2+x)(1+x)}+\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)$. Dla $t>0$ zachodzi nierówność $\ln(1+t)>\frac{t}{1+t}$ — to dosyć łatwa nierówność wyprowadzona kiedyś na wykładzie. Z niej wynika, że $h'(x)>\frac{-x}{(2+x)(1+x)}+\frac{\frac{x}{2}}{1+\frac{x}{2}}=$ $=\frac{-x}{(2+x)(1+x)}+\frac{x}{2+x}=\frac{x}{2+x}\left(\frac{-1}{1+x}+1\right)>0$. Wykazaliśmy, że $h'(x)>0$ dla $x>0$. Wobec tego funkcja h jest ściśle rosnąca na $[0,\infty)$, a ponieważ $h(0)=0$, więc $0<h(x)=xg(x)$ dla $x>0$. Stąd wynika, że $g(x)>0$. W ten sposób udowodniliśmy drugą nierówność. ■

Uwaga 6.18 Oczywiście ten ostatni przykład jest istotnie trudniejszy od zadań, które pojawiają się na egzaminach. Jednak warto czasem obejrzeć coś trudniejszego, by potem bez trudu rozwiązać łatwiejsze zadanie. Warto też porównać to rozumowanie z przedstawianymi wcześniej, bez użycia pochodnych — to ułatwi pogodzenie się z pochodnymi, one na prawdę ułatwiają szacowanie, badanie funkcji, a jednocześnie należy zdać sobie sprawę z tego, że człowiek ma tu wiele do zrobienia, programy komputerowe, przynajmniej jeszcze na razie, nie wiedzą przez należałoby pomnożyć funkcję, aby obliczenia uprościły się, nie analizują odpowiedniego jej fragmentu itp. W rezultacie wielu problemów nie są w stanie rozwiązać bez udziału człowieka. Użytkownik sprzętu elektronicznego musi rozumieć, co z jego pomocą może osiągnąć. Bez zrozumienia nie ma szans na dobre rezultaty z wyjątkiem tych, o których autor używanego programu myślał. ■

Asymptoty

Zdarza się, że funkcja „zbliża" się nieograniczenie do pewnej prostej, np. funkcja $\frac{1}{x}$ zbliża się nieograniczenie do osi poziomej układu współrzędnych. Iloraz wielomianu przez wielomian stopnia o 1 mniejszego, takiego samego lub większego o 1 też zbliżą się do pewnej prostej, niekoniecznie poziomej. Mówimy wtedy o *asymptotach.* Ścisła definicja, z której będziemy korzystać, wygląda tak:

Definicja 6.19 (asymptoty)

1. Asymptotą funkcji f, określonej na pewnej półprostej postaci $(a,+\infty)$, przy $x\longrightarrow+\infty$ nazywamy taką prostą o równaniu $y=ax+b$, że

$$\lim_{x\to0}\left(f(x)-ax-b\right)=0.$$

Jeśli $a=0$, asymptotę nazywamy *poziomą*, a gdy $a\neq0$ — *ukośną*.

2. Jeśli funkcja f określona jest na przedziale postaci (a,b), gdzie $b<+\infty$ oraz $\lim\limits_{x\to b} f(x)=+\infty$ lub $\lim\limits_{x\to b} f(x)=-\infty$, to prostą $x=b$ nazywamy lewostronną *asymptotą pionową* przy $x\longrightarrow b^+$. ■
Analogicznie definiujemy asymptoty przy $x\longrightarrow -\infty$ oraz przy $x\longrightarrow b^-$.

Z definicji wynika od razu, że jeśli prosta $y=ax+b$ jest asymptotą funkcji f przy $x\longrightarrow+\infty$ lub przy $x\longrightarrow-\infty$, to $a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ i $b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)$. Jeśli istnieje $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)$, to na mocy twierdzenia de l'Hospitala zachodzi równość $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$.

Przykład 6.44 Prosta $y=0$ jest asymptotą funkcji $\frac{1}{x}$ zarówno przy $x\longrightarrow+\infty$ jak i przy $x\longrightarrow-\infty$. ■

Przykład 6.45 Prosta $y=x+1$ jest asymptotą funkcji $\frac{x^2+x+1}{x-1}$ przy $x\longrightarrow+\infty$ oraz przy $x\longrightarrow-\infty$, zaś prosta pionowa $x=1$ jest asymptotą pionową obustronną przy $x\longrightarrow 1$. ■

Przykład 6.46 Funkcja $e^{-x}\sin x$ ma asymptotę poziomą, prostą $y=0$, przy $x\longrightarrow+\infty$, ale nie przy $x\longrightarrow-\infty$. Zauważmy, że wykres tej funkcji przecina asymptotę $y=0$ w nieskończenie wielu punktach. Należy pogodzić się z tym, że asymptota może mieć wiele punktów wspólnych z wykresem i to nie tylko w przypadku funkcji liniowej, której wykres jest jej asymptotą przy $x\longrightarrow\pm\infty$. ■

Przykład 6.47 Funkcja $e^{1/x}$ ma asymptotę pionową przy $x\longrightarrow 0^+$, która nie jest asymptotą tej funkcji przy $x\longrightarrow 0^-$, bo lewostronna granica tej funkcji w punkcie 0 równa jest 0. ■

Dodajmy jeszcze, że asymptota ma pełnić rolę niejako analogiczną do stycznej do wykresu funkcji, tylko ma to być w punkcie „znajdującym się w nieskończoności" – mówimy tu oczywiście jedynie o intuicjach, jakie należy wiązać z pojęciem asymptoty.

Na tym kończymy krótki przegląd zagadnień związanych z asymptotami.

Zadania

6.1 Jaki jest minimalny czas dojścia do domu stojącego przy prostoliniowej szosie w odległości 13 km od miejsca, w którym się znajdujemy, jeśli odległość od szosy wynosi 5 km, w terenie poruszamy się z prędkością 3km/h, zaś po szosie — z prędkością 5 km/h.

6.2 Znaleźć maksimum objętości brył powstałych w wyniku obrotu trójkąta prostokątnego o obwodzie 1 wokół przeciwprostokątnej.

6.3 Znaleźć maksimum objętości stożka wpisanego w kulę o promieniu 1.

6.4 Znaleźć maksimum obwodu trójkąta wpisanego w okrąg o promieniu 1.

6.5 Znaleźć maksimum długości statku, który może wpłynąć z kanału o szerokości $a > 0$ do prostopadłego doń kanału, którego szerokość jest równa $b > 0$.

6.6 Znaleźć maksimum pola trójkąta o obwodzie 3 – można skorzystać z wzoru Herona.

6.7 Znaleźć największy wyraz ciągu (a_n), jeśli $a_n = n^5 2^{-n}$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$.

6.8 Znaleźć największy wyraz ciągu (a_n), jeśli $a_n = n^5 3^{-n}$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$.

6.9 Ciężarówka porusza się po autostradzie ze stałą prędkością v km/h. Minimalna prędkość dla ciężarówek na autostradzie wynosi 50 km/h, maksymalna 100 km/h, litr benzyny kosztuje 2 zł, kierowca otrzymuje 10 zł za godzinę swej pracy. Ciężarówka zużywa $11 + \frac{v^2}{400}$ litrów paliwa w ciągu godziny jazdy z prędkością v. Przy jakiej prędkości koszt przejazdu ustalonego odcinka trasy jest najmniejszy? (bardzo stare ceny!)

6.10 Statek pływa z portu A do portu B. Koszt ruchu statku składa się z dwu części: niezależnej od prędkości i równej 25600 zł dziennie oraz zależnej od prędkości i równej (liczbowo) podwojonemu sześcianowi prędkości dziennie. Przy jakiej prędkości koszt przepłynięcia trasy jest najmniejszy?

6.11 Zbadano, że w pewnej fabryce robotnik rozpoczynający pracę o godzinie 8:00 wykonuje w ciągu x godzin $-x^3 + 6x^2 + 15x$ radioodbiorników. Po 15–minutowej przerwie wykonuje w ciągu x godzin $-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 23x$ radioodbiorników. O której powinna rozpocząć się 15–minutowa przerwa, aby do 12:15 wykonał najwięcej radioodbiorników, a której – by wykonał ich najmniej?

6.12 Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x) = \left|x^2 + 2x - 3\right| + \frac{3}{2}\ln x$ na przedziale $[\frac{1}{2}, 2]$.

6.13 Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji f, jeśli $f(x) = e^{\sqrt{x^2 \cdot |x+1|}}$ na przedziale $[-2, 1]$.

6.14 Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji f, jeśli $f(x) = 4x + \frac{9\pi^2}{x} + \sin x$ na przedziale $[\pi, 2\pi]$.

6.15 Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji f, jeśli $f(x) = -1791x^2$ dla $-1 \le x \le 0$.

6.16 Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji f, jeśli $f(x) = 2ex\ln x$ dla $0 < x \le 2$.

6.17 Ile pierwiastków rzeczywistych ma równanie $x^3 - 6x^2 + 9x - 10 = 0$.

6.18 Ile pierwiastków rzeczywistych ma równanie $3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 20 = 0$.

6.19 Ile pierwiastków rzeczywistych ma równanie $e^x = ax^2$ w zależności od $a \in \mathbb{R}$.

6.20 Ile pierwiastków rzeczywistych ma równanie $x^5 - 5x = a$ w zależności od $a \in \mathbb{R}$.

6.21 Z helikoptera znajdującego się na wysokości 60 m nad powierzchnia morza wysłano promień światła do nurka znajdującego się na głębokości 40 m pod powierzchnią wody. Odległość **w poziomie** między helikopterem i nurkiem jest równa 110 m. Przyjmujemy, że prędkość światła w powietrzu to 300 000 km/s a — w wodzie to 225 000 km/s. Wiedząc, że światło „wybiera” taką drogę, na przebycie której potrzeba najmniej czasu, znaleźć punkt, w którym promień wszedł do wody, tzn. znaleźć odległość tego punktu od punktu na powierzchni wody, nad którym znajduje się helikopter.
Może warto coś narysować?
Wygodną jednostką w tym zadaniu jest 1 dam = 10 m (dekametr).
Pomnożyć zawsze się zdąży, a pomyśleć?
W dekametrach szukana odległość to nieduża całkowita.

6.22 Z każdego z czterech rogów tekturowego prostokąta o bokach 35 cm i 11 cm wycięto kwadrat o boku x. Zagięto tekturę w wyniku czego powstało pudełko (bez pokrywki) w kształcie prostopadłościanu. Wysokość pudełka równa jest x. Dla jakiego x pojemność otrzymanego pudełka jest największa?

6.23 Na paraboli $y = x^2$ znaleźć punkt, który leży najbliżej punktu $\left(4, \frac{7}{2}\right)$.

6.24 Na paraboli $y = \frac{1}{2}x^2$ znaleźć punkt, którego odległość od punktu $(24, 15)$ jest najmniejsza.

6.25 Znaleźć na paraboli $y = x^2$, który leży najbliżej punktu $(-3, 10)$.

6.26 Na paraboli $y = x^2$ znaleźć punkt P leżący najbliżej punktu $Q = (0, 2)$. Znaleźć kąt między prostą QP a styczną do wykresu funkcji x^2 w punkcie P.

6.27 Znaleźć na paraboli $y = \frac{x^2}{4}$ punkt P leżący się najbliżej punktu $A = (2, 5)$. Znaleźć kąt między odcinkiem AP i prostą styczną do paraboli w punkcie P.

6.28 Niech $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji f na przedziale domkniętym $[-2, 6]$.

6.29 Znaleźć najmniejszą wartość funkcji $x^2 + \frac{4x^2}{(x-2)^2}$ na półprostej otwartej $(2, +\infty)$ lub wykazać, że ta funkcja na półprostej $(2, \infty)$ najmniejszej wartości nie ma.

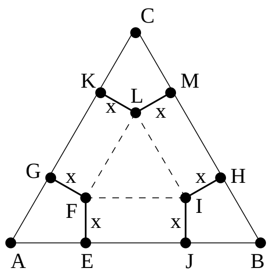
6.30 Znaleźć na paraboli $y = \frac{x^2}{4}$ trzy punkty: P znajdujący się najbliżej punktu $A = (0, 1)$, Q znajdujący się najbliżej punktu $B = (0, 2)$ i R znajdujący się najbliżej punktu $C = (0, 3)$.

6.31 Niech $f(x) = e^{-x} \sin x$. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji f na półprostej $[0, \infty)$.

6.32 Niech $f(x) = -x^3 + 12x - 6$. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji f na przedziale domkniętym $[-5, 3]$.

6.33 Znaleźć najmniejszą wartość funkcji $x^2+\frac{125x^2}{(x-1)^2}$ na półprostej otwartej $(1,+\infty)$ lub wykazać, że ta funkcja na półprostej $(1,\infty)$ najmniejszej wartości nie ma.

6.34 Z tekturowego trójkąta równobocznego ABC o boku a odcięto trzy deltoidy $AEFG$, $BHIJ$, $CKLM$ przy czym: punkty E,J leżą na boku AB, punkty H,M — na boku BC, punkty KG na boku CA, zaś punkty F,I,L — wewnątrz trójkąta ABC; odcinki FE oraz IJ są prostopadłe do boku AB, odcinki IH oraz LM — do boku BC, odcinki LK oraz FG — do boku CA; długość każdego odcinków z tych sześciu odcinków jest równa x. Następnie zagięto tekturę uzyskując pudełko o wysokości x, otwarte z góry, którego denkiem jest trójkąt FIL. Dla jakiego x pojemność powstałego pudełka jest największa?



6.35 Niech $b>1$ będzie liczbą rzeczywistą. Wyznaczyć liczbę $k>0$ tak, by prosta L o równaniu $y=kx+b$ miała dokładnie jeden punkt wspólny z elipsą o równaniu $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.
Znaleźć punkt wspólny prostej L z prostą o równaniu $y=-1$.
Niech $A=(0,-1)$, $B=(0,b)$ dla $b>1$ i C oznacza punkt znaleziony w poprzedniej części zadania. Znaleźć taką liczbę $b>1$, żeby pole trójkąta ABC było najmniejsze.

6.36 Znaleźć stożek o najmniejszej objętości spośród wszystkich stożków opisanych na kuli o promieniu 1.

Stożek jest opisany na kuli wtedy i tylko wtedy, gdy jego powierzchnia boczna i podstawa są styczne do kuli.

6.37 Słup ma wysokość 12 m. W odległości 8 m od słupa stoi dziecko wzrostu 100 cm. Znaleźć wysokość x, na której należy umieścić lampę, by odległość $d(x)$ lampy od końca cienia dziecka była najmniejsza.

6.38 Który z trójkątów równoramiennych wpisanych w okrąg o promieniu 1 ma największe pole? Odpowiedź szczegółowo uzasadnić.

6.39 Na wykresie funkcji $y=\frac{1}{9}x^3-3x$ znaleźć punkt najbliższy punktowi $(-15,-5)$.

6.40 Niech A oznacza zbiór złożony z tych wszystkich punktów (x,y), dla których $xy=8$ i $x>0$. W zbiorze A znaleźć punkt leżący najbliżej punktu $\left(13,\frac{19}{2}\right)$.

6.41 Znaleźć takie dwie liczby nieujemne, których suma jest równa 165, że iloczyn sześcianu jednej z nich i pierwiastka trzeciego stopnia z kwadratu drugiej jest największy.