F U N K C J E   R Ó Ż N I C Z K O W A L N E

Tekst poprawiony 5 stycznia 2014, 14:39

1. Podstawowe pojęcia i wzory

Funkcje służą do opisu różnych zjawisk fizycznych, ekonomicznych, biologicznych itd. Uzyskanie samego opisu matematycznego jest na ogół pierwszym krokiem do zbadania zjawiska. Wielokrotnie jedna z dróg prowadzących do celu jest poznanie własności funkcji. Jednym z pierwszych problemów, które trzeba rozwiązywać jest ustalenie, jak szybko zmieniają się wartości funkcji. Tego rodzaju kwestie napotykamy przy próbach znalezienia największych lub najmniejszych wartości funkcji, przy ustalaniu prędkości z jaką porusza się interesujący nas obiekt, przy znajdowaniu przyspieszenia, zmiany liczby ludzi lub zwierząt na jakimś obszarze itd.

Do pojęcia pochodnej, czyli wielkości mierzącej tempo zmian funkcji, ludzie dochodzili stopniowo. Matematycy i fizycy w wieku XVII i XVIII (Fermat, Newton, Leibniz i inni), ekonomiści nieco później, niezależnie od matematyków i fizyków (stąd nieco inna terminologia: np. koszt krańcowy, dochód krańcowy, ...). Za początek rachunku różniczkowego i całkowego przyjmuje się przełom wieków XVII i XVIII. Najważniejsze odkrycia zostały dokonane przez Newtona (1643–1727) i Leibniza (1646–1716). Początkowo nie istniał język, którym można by opisywać uzyskiwane rezultaty, ale na początku XIX wieku i później teoria została usystematyzowana dzięki pracom wielu matematyków, głównie wspominanego już Augusta Cauchy'ego.

To, co w momencie powstawania było zrozumiałe jedynie dla niewielu i to tylko najwybitniejszych, stało się przedmiotem obowiązkowych wykładów dla początkujących studentów, a nawet uczniów szkół średnich. Oczywiście nie wszyscy poznają teorię z taką samą dokładnością i tak samo dobrze ją rozumieją, jednak jest ona powszechnie studiowana od momentu powstania i nic nie zapowiada zmian w tym zakresie. Wielu studentów ma trudności ze zrozumieniem różnych twierdzeń. Przyczyn jest wiele, ale w większości przypadków sprowadzają się one do nieopanowania podstawowych twierdzeń matematyki elementarnej i prób uproszczenia sobie życia przez opanowanie tzw. niezbędnego minimum. Tacy studenci starają się opanować zlepek twierdzeń, które nie tworzą całości. W związku z tym zrozumienie ich jest prawie niemożliwe. Jeden z nauczycieli licealnych autora tego tekstu, nieżyjący już chemik i fizyk, tłumaczył niektórym uczniom, że *„nie można nauczyć się za mało”*. Myślę, że jest to głęboka prawda. Drogą do poznania jakiejś teorii nie jest wybieranie z niej najprostszych faktów, twierdzeń. Trzeba starać się zrozumieć całość. To czasem jest trudne i wymaga powracania do podstaw, ale bez tego nie ma szans na sukces.

Po przydługim wstępie zdefiniujem kilka podstawowych pojęć matematycznych.

Definicja 5.1 (granicy funkcji) *

Niech p oznacza dowolny punkt skupienia dziedziny funkcji f, tzn. punkt, który jest granicą jakiegoś ciągu (x_n) punktów z dziedziny funkcji różnych od p. Mówimy, że $g \in \overline{\mathbb{R}}$ jest granicą funkcji f w punkcie p wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu (x_n) zbieżnego do p, którego wszystkie wyrazy są różne od p, ma miejsce równość $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = g$. Granicę funkcji f w punkcie p oznaczamy symbolem $\lim\limits_{x\to p} f(x)$. ■

Definicja 5.2 (granicy lewostronnej)

g jest granicą lewostronna funkcji f w punkcie p wtedy i tylko wtedy, gdy można znaleźć w dziedzinie ciąg (x_n) o wyrazach mniejszych (ściśle!) niż p, zbieżny do p i gdy dla każdego takiego ciągu odpowiadający mu ciąg wartości $(f(x_n))$ ma granicę g. Stosujemy oznaczenie $\lim\limits_{x\to p^-} f(x)$. ■

Łatwo można udowodnić, że funkcja $\frac{1}{x}$ ma jednostronne granice w punkcie 0: prawostronna jest równa $+\infty$, zaś lewostronną jest $-\infty$. Funkcja $\sin\frac{1}{x}$ nie ma granicy prawostronnej w punkcie 0 — można wskazać dwa ciągi *dodatnich* argumentów tej funkcji zbieżne do 0, takie że odpowiadające im ciągi wartości mają różne granice.

Bez trudu można udowodnić „funkcyjną" wersję twierdzenia o scalaniu.

Twierdzenie 5.3 (o scalaniu)

Funkcja f określona na zbiorze zawierającym ciąg liczb mniejszych niż p, zbieżny do p oraz ciąg liczb większych niż p, zbieżny do p, ma granicę w punkcie p wtedy i tylko wtedy, gdy ma obie granice jednostronne i są one równe.

Dowód. Jest jasne, że z istnienia granicy wynika istnienie granic jednostronnych – zamiast wszystkich ciągów zbieżnych do p, których wyrazy są różne od p, rozpatrujemy jedynie ich część. Jeśli natomiast wiemy, że istnieją granice jednostronne, to ciąg o wyrazach różnych od p możemy rozbić na podciąg o wyrazach mniejszych niż p i na podciąg o wyrazach większych niż p. Odpowiadające im ciągi wartości mają tę samą granicę, więc ciąg wartości odpowiadający naszemu ciągowi ma granicę i to równą wspólnej wartości obu granic jednostronnych. Oczywiście jeśli ciąg argumentów zawiera jedynie skończenie wiele wyrazów większych niż p, to nie możemy rozpatrywać granicy prawostronnej, ale to niczemu nie przeszkadza, bo w tym przypadku wystarczy skorzystać z istnienia granicy lewostronnej. ■

* Ta definicja jest nazywana ciągową lub definicją Heinego

Podobnie jak w przypadku twierdzenia o scalaniu, można przenieść inne twierdzenia dotyczące granic ciągów na ogólniejszy przypadek granicy funkcji.

Twierdzenie 5.4 (o arytmetycznych własnościach granicy)

A1. Jeśli istnieją granice $\lim\limits_{x\to p} f(x)$, $\lim\limits_{x\to p} g(x)$ i określona jest ich suma, to istnieje granica $\lim\limits_{x\to p}(f(x)+g(x))$ i zachodzi wzór:

$$\lim_{x\to p}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to p} f(x) + \lim_{x\to p} g(x)\,.$$

A2. Jeśli istnieją granice $\lim\limits_{x\to p} f(x)$, $\lim\limits_{x\to p} g(x)$ i określona jest ich różnica, to istnieje granica $\lim\limits_{x\to p}(f(x)-g(x))$ i zachodzi wzór:

$$\lim_{x\to p}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to p} f(x) - \lim_{x\to p} g(x)\,.$$

A3. Jeśli istnieją granice $\lim\limits_{x\to p} f(x)$, $\lim\limits_{x\to p} g(x)$ i określony jest ich iloczyn, to istnieje granica $\lim\limits_{x\to p}(f(x)\cdot g(x))$ i zachodzi wzór: $\lim\limits_{x\to p}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to p} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to p} g(x)$.

A4. Jeśli istnieją granice $\lim\limits_{x\to p} f(x)$, $\lim\limits_{x\to p} g(x)$ i określony jest ich iloraz, to istnieje granica $\lim\limits_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)}$ i zachodzi wzór: $\lim\limits_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to p} f(x)}{\lim_{x\to p} g(x)}$.

Dowód tego twierdzenia jest natychmiastową konsekwencją twierdzenia o arytmetycznych własnościach granicy ciągu. ■

Z twierdzenia o trzech ciągach wynika analogiczne twierdzenie dla granic funkcji.

Definicja 5.5 (o trzech funkcjach)

Jeśli dla wszystkich argumentów x dostatecznie bliskich punktowi p zachodzi nierówność podwójna $f(x) \le g(x) \le h(x)$ i istnieją granice $\lim\limits_{x\to p} f(x)$, $\lim\limits_{x\to p} h(x)$ oraz $\lim\limits_{x\to p} f(x) = \lim\limits_{x\to p} h(x)$, to również funkcja g ma granicę w punkcie p i zachodzi równość $\lim\limits_{x\to p} f(x) = \lim\limits_{x\to p} g(x) = \lim\limits_{x\to p} h(x)$. ■

Twierdzenie 5.6 (o granicy złożenia dwu funkcji)

Załóżmy, że dziedzina funkcji f zawiera zbiór wartości funkcji g, że funkcja g ma granicę G w punkcie p, że granica G jest punktem skupienia dziedziny funkcji f i funkcja f ma granicę H w punkcie G oraz że wartości funkcji g w punktach dostatecznie bliskich p są różne od G. Przy tych założeniach funkcja $f\circ g$ określona wzorem $(f\circ g)(x) = f(g(x))$ ma w punkcie p granicę, ta granica jest równa H.

Założenia tego twierdzenia są tak dobrane, że dowód wynika od razu z definicji ciągowej granicy funkcji w punkcie. ■

Definicja 5.7 (funkcji ciągłej)

Funkcja f jest ciągła w punkcie p wtedy i tylko wtedy, gdy p jest argumentem funkcji i zachodzi jedna z dwu możliwości:

(i) p nie jest punktem skupienia dziedziny funkcji f;

(ii) p jest punktem skupienia dziedziny funkcji f, która ma granicę w punkcie p i ta granica jest równa wartości funkcji w punkcie p: $\lim\limits_{x\to p} f(x) = f(p)$. ■

Twierdzenie 5.8 (charakteryzacja ciągłości) *

Funkcja f jest ciągła w punkcie p wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby dodatniej ε istnieje taka liczba $\delta > 0$, że jeśli $|x - p| < \delta$, to $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$.

Dowód. Jeżeli p nie jest punktem skupienia dziedziny funkcji f, to istnieje liczba $\delta > 0$, taka że jedynym punktem x dziedziny funkcji f, dla którego $|x - p| < \delta$ jest punkt p – w tym przypadku $|f(x) - f(p)| = |f(p) - f(p)| = 0 < \varepsilon$, niezależnie od wyboru liczby dodatniej ε.

Załóżmy teraz, że punkt p jest granicą pewnego ciągu punktów z dziedziny funkcji f, różnych od p. Załóżmy, że dla każdego ciągu (x_n) punktów z dziedziny funkcji f, zbieżnego do punktu p zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(p)$. Załóżmy też, że istnieje taka liczba $\varepsilon > 0$, że dla każdej liczby $\delta > 0$ istnieje taki punkt x, że $|x-p| < \delta$ i jednocześnie $|f(x) - f(p)| \geq \varepsilon$. Niech x_n będzie punktem dobranym do liczby $\frac{1}{n}$, czyli $|x_n - p| < \delta$ i $|f(x_n) - f(p)| \geq \varepsilon$. Z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = p$ i wobec tego $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(p)$ wbrew temu, że $\lim\limits_{x\to p} f(x) = f(p)$.

Załóżmy dla odmiany, że dla każdej liczby dodatniej ε istnieje taka dodatnia liczba δ, że jeśli $|x - p| < \delta$, to $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$. Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = p$, to dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność $|x_n - p| < \delta$. Wtedy $|f(x_n) - f(p)| < \varepsilon$. Z definicji granicy ciągu wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(p)$. Dowód został zakończony. ■

Z poznanych twierdzeń o granicach funkcji wynika od razu następujące

Twierdzenie 5.9 (o operacjach na funkcjach ciągłych)

Załóżmy, że funkcje f i g określone na wspólnej dziedzinie są ciągłe w punkcie p. Wtedy następujące funkcje są ciągłe w punkcie p: $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ oraz $\frac{f}{g}$ pod warunkiem $g(p) \neq 0$. ■

Ważną operacją jest składanie (superponowanie) funkcji. Polega ono na „wykonaniu” po kolei dwu funkcji: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Okazuje się, że składając funkcje ciągłe otrzymujemy w rezultacie funkcję ciągłą.

* Definicja ciągłości zawarta w tym twierdzeniu nazywana otoczeniową lub definicją Cauchy'ego.

Twierdzenie 5.10 (o ciągłości złożenia dwu funkcji)
Jeżeli funkcja g jest ciągła w punkcie p, funkcja f określona na zbiorze zawierającym zbiór wartości funkcji g jest ciągła w punkcie $g(p)$, to złożenie $f \circ g$ jest funkcją ciągłą w punkcie p.

Dowód. Wynika to od razu z otoczeniowej definicji ciągłości: jeśli $\varepsilon > 0$, to istnieje takie $\delta > 0$, że jeśli $|y - g(p)| < \delta$, to $|f(y) - f(g(p))| < \varepsilon$, istnieje też takie $\eta > 0$, że jeśli $|x - p| < \eta$, to $|g(x) - g(p)| < \delta$, a wobec tego $|f(g(x)) - f(g(p))| < \varepsilon$. Dowód został zakończony. ■

Nie jest natomiast prawdą, że funkcja odwrotna do funkcji f ciągłej w punkcie p musi być ciągła w punkcie $f(p)$. Zachęcamy czytelników do samodzielnego skonstruowania przykładu. Musi on być nieco dziwaczny, bowiem jeśli założymy, że funkcja f o wartościach rzeczywistych jest ciągła w całej dziedzinie, która jest przedziałem, to wtedy funkcja odwrotna musi być ciągłą. Tego twierdzenia jednak nie udowodnimy teraz, bowiem później jego dowód stanie się znacznie łatwiejszy i krótszy.

Przykład 5.1 Funkcja stała jest ciągła w każdym punkcie. ■

Przykład 5.2 Funkcja *identyczność*, czyli funkcja, której wartością w punkcie x jest liczba x jest ciągła w każdym punkcie prostej — wynika to natychmiast z definicji ciągłości. Zamiast mówić funkcja *identyczność*, będziemy mówić funkcja x, rozumiejąc, że jest ona określona na całej prostej. ■

Przykład 5.3 Funkcje x^2, x^3, $\ldots$ są ciągłe w każdym punkcie prostej. Wynika to natychmiast z twierdzenia o ciągłości iloczynu funkcji ciągłych i poprzedniego przykładu. ■

Przykład 5.4 Każdy wielomian, czyli funkcja postaci $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, gdzie a_0, a_1, $\ldots$, a_n są dowolnymi liczbami rzeczywistymi, jest ciągła w każdym punkcie prostej. Wynika to z poprzednich przykładów oraz twierdzenia o ciągłości iloczynu i sumy funkcji: funkcja postaci a_jx^j jest iloczynem funkcji stałej o wartości a_j oraz funkcji x^j, wielomian jest sumą takich funkcji. ■

Przykład 5.5 Funkcja $\frac{x-1}{x+3}$, której dziedziną jest zbiór złożony ze wszystkich liczb rzeczywistych z wyjątkiem liczby -3, jest ciągła w każdym punkcie swej dziedziny, bo jest ilorazem funkcji ciągłych. ■

Przykład 5.6 Funkcja wykładnicza e^x jest ciągła. Wykazaliśmy to wcześniej (twierdzenie o ciągłości funkcji wykładniczej). ■

Przykład 5.7 Logarytm naturalny (o podstawie e) jest funkcją ciągłą. Zostało to wykazane wcześniej. ■

Przykład 5.8 Dla każdej liczby rzeczywistej a funkcja potęgowa x^a o wykładniku a jest ciągła w każdym punkcie półprostej $(0,+\infty)$. Wynika to z ciągłości logarytmu naturalnego, ciągłości funkcji wykładniczej o podstawie e i ciągłości iloczynu oraz złożenia funkcji ciągłych: $x^a = e^{a\ln x}$. ■

Przykład 5.9 Jeśli $a > 0$, to funkcja x^a jest ciągła w punkcie 0, jej wartość w punkcie 0 definiujemy w tym przypadku jako 0. Trzeba jeszcze wykazać, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ i $x_n > 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^a = 0$. Jest tak dla $a = \frac{1}{k}$, k – dowolna liczba całkowita większa niż 1, bo $x^{1/k} = \sqrt[k]{x}$. W przypadku dowolnego a znajdujemy najpierw dodatnią liczbę całkowitą $k > \frac{1}{a}$. Dla każdej liczby nieujemnej $x < 1$ mamy wtedy $0 \le x^a \le x^{1/k}$. Teza wynika teraz z twierdzenia o trzech ciągach. ■

Przykład 5.10 Jeśli $a = \frac{p}{q}$, gdzie q jest nieparzystą liczbą całkowitą dodatnią, zaś p liczbą całkowitą ujemną, to funkcja $x^a = \sqrt[q]{x^p}$ jest ciągła w każdym punkcie półprostej $(-\infty,0)$. Wynika to od razu z ciągłości funkcji pierwiastek q–tego stopnia, ciągłości wielomianu i ciągłości ilorazu funkcji ciągłych oraz twierdzenia o ciągłości złożenia. ■

W ostatnich trzech przykładach wykazaliśmy, że funkcja potęgowa jest ciągła wszędzie tam, gdzie jest określona.

Przykład 5.11 Funkcje sinus i kosinus są ciągłe w każdym punkcie prostej. Wynika to od razu z nierówności $|\sin x - \sin y| \le |x-y|$. Ta nierówność wynika od razu z definicji funkcji sinus, z tego , że cięciwa okręgu jest krótsza od łuku, na którym się opiera oraz z tego, że przyprostokątna jest krótsza od przeciwprostokątnej. ■

Przykład 5.12 Niech $\arcsin x$ oznacza taką liczbę, że $\sin(\arcsin x) = x$ oraz $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}$, oczywiście zakładamy, że $-1 \le x \le 1$. Jasne jest, że te warunki określają jednoznacznie liczbę $\arcsin x$. Zdefiniowaliśmy więc na przedziale $[-1,1]$ funkcję, która go przekształca na przedział $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Wykażemy , że funkcja arcsin jest ciągła na przedziale $[-1,1]$. Załóżmy, że tak nie jest. Oznacza to, że istnieje ciąg (x_n) punktów przedziału $[-1,1]$ zbieżny do pewnej liczby g, taki że ciąg $(\arcsin x_n)$ nie jest zbieżny do $\arcsin g$. Z ciągu $(\arcsin x_n)$ można wybrać podciąg $\big(\arcsin x_{k_n}\big)$ zbieżny do granicy $G \ne \arcsin g$. Oczywiście $-\frac{\pi}{2} \le G \le \frac{\pi}{2}$. Stąd i z ciągłości funkcji sinus wynika, że

$$g = \lim_{n\to\infty} x_{k_n} = \lim_{n\to\infty} \sin(\arcsin(x_{k_n})) = \sin(G) \neq \sin(\arcsin g) = g\,.$$

Otrzymaliśmy sprzeczność $g \neq g$. Wobec tego każdy podciąg ciągu $(\arcsin x_n)$, który ma granicę, jest zbieżny do liczby $\arcsin g$, więc $\lim\limits_{n\to\infty} \arcsin x_n = \arcsin g$. ■

Przykład 5.13 Niech $\mathrm{arctg}\, x$ oznacza taką liczbę, że $-\frac{\pi}{2} < \mathrm{arctg}\, x < \frac{\pi}{2}$ oraz $\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\, x) = x$. Jasne jest, że te dwa warunki wyznaczają liczbę $\mathrm{arctg}\, x$ jednoznacznie. Zdefiniowaliśmy więc funkcję, która przekształca zbiór wszystkich liczb rzeczywistych na przedział otwarty $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Funkcja arctg jest ciągła na całej prostej. Dowód, który można przeprowadzić podobnie do podanego w poprzednim przykładzie dowodu ciągłości funkcji $\arcsin$, pozostawiamy czytelnikom, by mogli sprawdzić, na ile zrozumieli metodę. Oczywiście w dowodzie należy skorzystać z ciągłości funkcji tangens, która ciągła jako iloraz funkcji ciągłych. ■

Przykład 5.14 Dla każdej liczby rzeczywistej $a > 0$ funkcja wykładnicza a^x jest ciągła w każdym punkcie prostej rzeczywistej. Wynika to z tego, że $a^x = e^{x \ln a}$, twierdzeń o ciągłości iloczynu i złożenia oraz ciągłości funkcji wykładniczej o podstawie e i ciągłości identyczności oraz funkcji stałej. ■

Z tych przykładów wynika, że każda funkcja, którą można zdefiniować „wzorem" używając standardowych funkcji, jest ciągła w całej swojej dziedzinie, np.

$$\exp\left(\frac{\sin(x^2-12x+2)}{\mathrm{tg}(\cos x+\ln x)}\right) - \sin\sqrt{x^4-113}\,.$$

Wynika to z wielokrotnego stosowania twierdzeń o ciągłości złożenia, sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu. Mogłoby więc powstać wrażenie, że wszystkie funkcje są ciągłe. Tak jednak nie jest. Podamy poniżej kilka przykładów.

Przykład 5.15 $\mathrm{sgn}(x) = \frac{|x|}{x}$ dla $x \neq 0$ oraz $f(0) = 0$, ta funkcja jest ciągła w każdym punkcie $p \neq 0$, bo wtedy jest stała w pewnym przedziale otwartym zawierającym p, w punkcie 0 ta funkcja jest nieciągła, bowiem jej granica prawostronna jest w tym punkcie równa 1, lewostronna jest równa -1, więc funkcja sgn (znak liczby) nie ma granicy w punkcie 0. ■

Przykład 5.16 Niech $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ dla $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Funkcja tak zdefiniowana nie ma granicy w punkcie 0, więc nie jest w tym punkcie ciągła. We wszystkich innych punktach jest ciągła jako złożenie funkcji ciągłej sinus z funkcją ciągłą $\frac{1}{x}$. ■

Przykład 5.17 Niech $f(x) = 1$ dla $x \neq 0$ i $f(0) = 0$. Funkcja ta jest nieciągła w punkcie 0, choć ma w tym punkcie granicę, jednak ta granica nie jest równa wartości funkcji w punkcie 0. W innych punktach p funkcja jest ciągła, bo jest stała na pewnym przedziale otwartym zawierającym punkt p. Oczywiście można uznać ten przykład za sztuczny. ■

Przykład 5.18 Niech $V(t)$ oznacza objętość jednego kilograma wody w temperaturze t, ciśnienie jest stałe, tzw. normalne i niezależne od temperatury. Ze szkolnych lekcji fizyki wiadomo, że funkcja V ma nieciągłość w punkcie 0 tj. w temperaturze, w której następuje przejście ze stanu ciekłego w stały lub odwrotnie, zresztą w punkcie 0 funkcja jest z punktu widzenia fizyki niezdefiniowana, ze względu na zmianę stanu skupienia. Granice jednostronne istnieją: prawostronna jest mniejsza niż lewostronna (dlatego lód pływa w wodzie wystając z niej). Przykład ten podajemy po to, by czytelnicy tego tekstu zdali sobie sprawę, że w niektórych sytuacjach funkcje nieciągłe pojawiają się w naturalnych sposób. ■

Innym miejscem, w którym pojawiają się nieciągłości w fizyce, jest elektryczność: włączając bądź wyłączając prąd w obwodzie powodujemy nieciągłość.

Podamy teraz dwa twierdzenia opisujące najczęściej wykorzystywane własności funkcji ciągłych.

Twierdzenie 5.11 (**Bolzano – Cauchy'ego o przyjmowaniu wartości pośrednich**)

Jeśli f jest funkcją ciągłą w każdym punkcie pewnego przedziału P i dla pewnych punków x, z przedziału P zachodzi nierówność $f(x) < C < f(z)$, to między punktami x i z znajduje taki się punkt y, że $C = f(y)$.

Dowód. Niech $x_0 = x$, $z_0 = z$. Niech c_0 będzie środkiem odcinka o końcach x_0 i z_0. Mamy $c_0 = \frac{1}{2}(x_0 + z_0)$. Są trzy możliwości $f(c_0) = C$, $f(c_0) < C$, $f(c_0) > C$. W pierwszym przypadku przyjmujemy $y = c_0$ i kończymy dowód. W drugim przypadku przyjmujemy $x_1 = c_0$ i $z_1 = z_0$. W trzecim przypadku przyjmujemy $x_1 = x_0$ i $z_1 = c_0$. W drugim i trzecim przypadku spełnione są zależności: $f(x_1) < C < f(z_1)$ oraz $|z_1 - x_1| = \frac{1}{2}|z_0 - x_0|$. Powtórzymy rozumowanie. Niech $c_1 = \frac{1}{2}(x_1 + z_1)$. Jeśli $f(c_1) = C$, to kończymy dowód, przyjmując $y = c_1$. W przypadku przeciwnym przyjmujemy $x_2 = c_1$ i $z_2 = z_1$, jeśli $f(c_1) < C$, oraz $x_2 = x_1$ i $z_2 = c_1$, jeżeli $f(c_1) > C$. W obu przypadkach $f(x_2) < C < f(z_2)$ i $|z_2 - x_2| = \frac{1}{2}|z_1 - x_1| = \left(\frac{1}{2}\right)^2 |z_0 - x_0|$. Postępując w dalszym ciągu w ten sposób, natrafiamy na taki punkt y, że $C = f(y)$ lub otrzymujemy takie dwa ciągi (x_n) i (z_n) punktów przedziału P, że dla każdego n spełnione są związki $|z_n - x_n| = \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0 - x_0|$ oraz $f(x_n) < C < f(z_n)$. Z definicji ciągów x_n i z_n wynika, że dla każdego n punkty x_{n+1} i z_{n+1} znajdują się w przedziale domkniętym o końcach x_n i z_n. Stąd wynika, że jeżeli $k > m > n$, to punkty x_m, z_m, x_k, z_k znajdują się w przedziale o końcach x_n, z_n i wobec tego odległości między każdymi dwoma z nich są mniejsze niż $|z_n - x_n| = \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0 - x_0|$, w szczególności $|x_k - x_m| < \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0 - x_0|$ i $|z_k - z_m| < \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0 - x_0|$. Z tego, że $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, wynika, że oba ciągi (x_n) i (z_n) spełniają warunek Cauchy'ego, więc każdy z nich ma skończoną granicę. Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n - x_n| = 0$, więc te granice są równe. Niech $y = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$. Z ciągłości funkcji f w punkcie y wynika, że $f(y) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \le C$ oraz $C \le \lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = f(y)$. Z nierówności $f(y) \le C \le f(y)$ wynika, że $C = f(y)$. Dowód został zakończony. ■

Typowym zastosowaniem twierdzenia o przyjmowaniu wartości pośrednich jest wykazywanie, że funkcja ciągła w każdym punkcie przedziału, przyjmująca w pewnym punkcie tego przedziału wartość dodatnią, a w innym – ujemną, ma między tymi punktami pierwiastek. Naśladując dowód twierdzenia o przyjmowaniu wartości pośrednich, można skracać dwukrotnie w kolejnych krokach przedział, co daje rozsądną metodę przybliżania pierwiastków*.

Twierdzenie 5.12 (**o istnieniu pierwiastków wielomianów stopnia nieparzystego**)
Każdy wielomian nieparzystego stopnia, tj. funkcja postaci

$$w(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n ,$$

gdzie $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ są liczbami rzeczywistymi, przy czym $a_n \neq 0$, a n jest liczbą naturalna nieparzystą, ma pierwiastek rzeczywisty, to znaczy, że istnieje taka liczba x_0, że $w(x_0) = 0$.

Dowód. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$, więc:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{w(x)}{x^n} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{x} + a_n\right) = a_n.$$

Załóżmy, że $a_n > 0$ — przypadek $a_n < 0$ można sprowadzić do poprzedniego przez zastąpienie wielomianu w wielomianem przeciwnym $-w$. Stosując twierdzenia o granicach, stwierdzamy, że z jednej strony zachodzi:

$$\lim_{x\to\infty} w(x) = \lim_{x\to\infty} x^n \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{w(x)}{x^n} = +\infty \cdot a_n = +\infty,$$

a z drugiej strony:

$$\lim_{x\to-\infty} w(x) = \lim_{x\to-\infty} x^n \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{w(x)}{x^n} = -\infty \cdot a_n = -\infty.$$

Z tego wnioskujemy, że wielomian w przyjmuje zarówno wartości dodatnie, jak i ujemne: jeśli x jest dostatecznie dużą liczbą dodatnią, to $w(x) > 0$, jeśli $|x|$ jest dostatecznie dużą liczbą dodatnią i $x < 0$, to $w(x) < 0$. Stąd zaś wynika, że wielomian ten przyjmuje w pewnym punkcie wartość 0, czyli że ma pierwiastek. Dowód został zakończony. ■

* Istnieją lepsze, ale bardziej skomplikowane metody.

Twierdzenie 5.13 (Weierstrassa o przyjmowaniu kresów)
Załóżmy, że funkcja f jest ciągła w każdym punkcie przedziału domkniętego $[a,b]$. Wtedy w przedziale [a,b] znajdują się takie punkty p, q, że dla każdego punktu x z tego przedziału zachodzi nierówność $f(p) \leq f(x) \leq f(q)$, tzn. $f(p)$ jest najmniejszą wartością funkcji f na przedziale [a,b], zaś $f(q)$ jest największą wartością funkcji f.
Dowód. Niech M będzie kresem górnym funkcji f na przedziale $[a,b]$. Istnieje wtedy taki ciąg (x_n) punktów przedziału $[a,b]$, że $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = M$. Z twierdzenia Bolzano–Weierstrassa wynika, że z ciągu (x_n) można wybrać podciąg zbieżny (x_{k_n}). Niech $q = \lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n}$. Ponieważ dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $a \leq x_{k_n} \leq b$, więc w granicy otrzymujemy $a \leq q \leq b$. Funkcja f jest ciągła w każdym punkcie przedziału $[a,b]$, w szczególności w punkcie q. Wynika stąd, że $f(q) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = M$. Wykazaliśmy, więc że $\sup f = M = f(q)$, co oznacza, że $f(q)$ jest największą wartością funkcji f na przedziale $[a,b]$. Istnienie punktu, w którym funkcja f przyjmuje swą najmniejszą wartość, wnioskujemy, stosując twierdzenie o wartości największej do funkcji $-f$. Dowód został zakończony. ■

Zdefiniujemy teraz jedno z najważniejszych pojęć w matematyce.

Definicja 5.14 (pochodnej)
Załóżmy, że funkcja f jest określona w dziedzinie zawierającej przedział otwarty o środku p oraz że istnieje granica $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(p+h)-f(p)}{h}$. Granicę tę nazywamy pochodną funkcji f w punkcie p i oznaczamy symbolem $f'(p)$ lub $\frac{df}{dx}(p)$. Jeśli pochodna jest skończona, to mówimy, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie p. Funkcję liniową przypisującą liczbie h liczbę $f'(p)h$ nazywamy różniczką funkcji f w punkcie p i oznaczamy symbolem $df(p)$, a wartość tej funkcji liniowej w punkcie h oznaczamy przez $df(p)(h)$ lub — częściej — przez $df(p)h$. ■

Definicja 5.15 (prostej stycznej do wykresu funkcji)
Załóżmy, że funkcja f ma pochodną w punkcie p oraz że jest ciągła w punkcie p.* Jeśli pochodna $f'(p)$ jest skończona, to mówimy, że prostą styczną do wykresu funkcji f w punkcie $(p, f(p))$ jest prosta, której współczynnik kierunkowy jest równy $f'(p)$ przechodząca przez punkt $(p, f(p))$. Jeśli $f'(p) = \infty$ lub $f'(p) = -\infty$, to mówimy, że styczną do wykresu w punkcie $(p, f(p))$ jest prosta pionowa przechodząca przez ten punkt, czyli prosta o równaniu $x = p$. ■

* Wykażemy później, że jeśli pochodna $f'(p)$ funkcji f w punkcie p jest skończona, czyli że f jest różniczkowalna w punkcie p, to funkcja f jest ciągła w punkcie p, więc w tym przypadku nie ma potrzeby dodatkowo zakładać ciągłości funkcji w punkcie p.

Twierdzenie 5.16 (o ciągłości funkcji różniczkowalnej)

Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie p, to jest w tym punkcie ciągła.

Dowód. $\lim\limits_{x\to p} f(x) = f(p) + \lim\limits_{h\to 0}\left(f(p+h) - f(p)\right) = f(p) + \lim\limits_{h\to 0} h\cdot \frac{f(p+h)-f(p)}{h} =$
$= f(p) + 0\cdot f'(p) = f(p)$. Dowód został zakończony. ■

Twierdzenie 5.17 (o najlepszym przybliżeniu liniowym)

Jeśli funkcja f jest ciągła w punkcie p, to liczba a jest pochodną funkcji f w punkcie p wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba $b\in\mathbb{R}$, że

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(p+h)-(ah+b)}{h} = 0\,.$$

Dowód. Jeśli f jest funkcją różniczkowalną w punkcie p, to przyjmujemy $b = f(p)$ oraz $a = f'(p)$. Wtedy

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(p+h)-(ah+b)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(p+h)-(f'(p)h+f(p))}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(p+h)-f(p))}{h} - f'(p) = f'(p) - f'(p) = 0\,.$$

Załóżmy, że $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(p+h)-(ah+b)}{h} = 0$. Stąd i z ciągłości f w punkcie p wynika, że

$$f(p) - b = \lim_{h\to 0}\left(f(p+h) - (ah+b)\right) = \lim_{h\to 0} h\cdot\frac{f(p+h)-(ah+b)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\left(h\cdot\frac{f(p+h)-(ah+b)}{h}\right) = \left(\lim_{h\to 0} h\right)\cdot\left(\lim_{h\to 0}\frac{f(p+h)-(ah+b)}{h}\right) = 0\cdot 0 = 0\,.$$

Wobec tego $b = f(p)$. Mamy więc

$$0 = \lim_{h\to 0}\frac{f(p+h)-(ah+b)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(p+h)-(ah+f(p))}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(p+h)-f(p)}{h} - a\right) =$$
$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(p+h)-f(p)}{h}\right) - a\,,$$

to oznacza, że liczba a jest pochodną funkcji f w punkcie p, czyli że $a = f'(p)$. ■

Dzięki temu twierdzeniu pisujemy często przybliżoną równość

$$f(p+h) \approx f(p) + f'(p)h$$

pamiętając, że błąd tego przybliżenia jest mały w porównaniu z $|h|$, gdy $|h|\approx 0$.

Z tej definicji wynika od razu, że jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie p, to prosta styczna do wykresu tej funkcji w punkcie $(p, f(p))$ ma równanie

$$y = f'(p)(x-p) + f(p)\,.$$

Niebawem przekonamy się, że próby przenoszenia definicji stycznej do okręgu (jako prostej mającej z okręgiem dokładnie jeden punkt wspólny) na przypadek stycznej do wykresu funkcji są bez sensu, bo prowadzą do wyników niezgodnych z intuicją. Motywy wprowadzenia podanej przez nas definicji są następujące. Jeśli $|h|\neq 0$ jest niedużą liczbą, to współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty $(p, f(p))$ oraz $(p+h, f(p+h))$ jest równy *ilorazowi różnicowemu* $\frac{f(p+h)-f(p)}{h}$, który jest w przybliżeniu równy $f'(p)$.

Prosta styczna jest więc „granicą prostych” przechodzących przez punkt $(p, f(p))$ i jeszcze jeden punkt wykresu leżący blisko wymienionego. Nie zamierzamy tu precyzować pojęcia „granicy prostych”, bo używamy go jedynie w tym miejscu i to jedynie w celu wyjaśnienia, skąd się taka definicja stycznej bierze. Mówiąc jeszcze mniej dokładnie: prosta styczna ma przylegać możliwie ściśle do wykresu w pobliżu punktu $(p, f(p))$. Daleko od tego punktu wykres i styczna mogą się rozchodzić. Podamy teraz kilka przykładów.

Przykład 5.19 Niech $f(x) = ax + b$. W tym przypadku iloraz różnicowy
$$\tfrac{f(p+h)-f(p)}{h} = \tfrac{a(p+h)-ap}{h} = a$$
jest niezależny od h, zresztą również od p. Wobec tego pochodna funkcji liniowej $ax + b$ jest równa a. Z tego wynika, że prostą styczną do prostej $y = ax + b$ jest ona sama, co nie powinno dziwić, bo ona sama do siebie przylega najlepiej ze wszystkich prostych. Często stosowany jest zapis $(ax + b)' = a$.
Najlepszym liniowym przybliżeniem funkcji liniowej jest ona sama! ■

Pozdrowienia dla tych osób, które po zrozumieniu powyższego przykładu, zechcą jeszcze definiować styczną do wykresu funkcji jako prostą, która ma z nim jeden punkt wspólny! Oznaczać to będzie, że uważają, iż prosta składa się z jednego punktu.

Przykład 5.20 Niech $f(x) = x^2$ i niech p będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Bez trudu stwierdzamy, że $\frac{f(p+h)-f(p)}{h} = 2p+h \xrightarrow[h\to 0]{} 2p$, co oznacza, że pochodną funkcji f w punkcie p jest liczba $2p$. Zwykle piszemy $(x^2)' = 2x$. Ponieważ $f'(0) = 0$, więc styczna do wykresu tej funkcji w punkcie $(0, 0)$ jest pozioma. Jeśli natomiast $p = 10$, to współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu jest równy 20, więc styczna w punkcie $(20, 400)$ jest *prawie* pionowa. ■

Przykład 5.21 Niech $f(x) = x^3$. Mamy $\frac{f(p+h)-f(p)}{h} = 3p^2 + 3ph + h^2 \xrightarrow[h\to 0]{} 3p^2$, co oznacza, że pochodną funkcji f w punkcie p jest $3p^2$, tzn. $(p^3)' = 3p^2$. I tym razem $f'(0) = 0$, więc styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(0, f(0)) = (0, 0)$ jest pozioma, czyli jest opisana równaniem $y = 0$. Jednak w tym przypadku wykres nie leży po jednej stronie stycznej, lecz przechodzi z jednej strony tej prostej na drugą. Pochodna jest dodatnia z jednym wyjątkiem: $f'(0) = 0$. Bez trudu można stwierdzić, że styczna do wykresu tej funkcji w każdym punkcie, z wyjątkiem punktu $(0, 0)$, przecina wykres w jeszcze jednym punkcie*, więc w tym przypadku nie jest prawdą,

* Czytelnik zechce sprawdzić w jakim — to pomaga w zrozumieniu tekstu!

że styczna ma z wykresem funkcji dokładnie jeden punkt wspólny. ■

Przykład 5.22 Teraz zajmiemy się funkcją $f(x)=|x|$. Jeśli $p>0$ i $|h|<p$, to $\frac{f(p+h)-f(p)}{h}=\frac{p+h-p}{h}=1=1\xrightarrow[h\to 0]{}1$, co oznacza, że pochodną funkcji f w punkcie p jest 1. W taki sam sposób pokazać można, że $f'(p)=-1$ dla każdej liczby $p<0$. Pozostał jeszcze jeden przypadek do rozważenia, mianowicie $p=0$. Jeśli $h>0$, to $\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=1$ i wobec tego $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=1$. Analogicznie $\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=-1$. Z tych dwu równości wynika od razu, że nie istnieje granica $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$, czyli że funkcja $|x|$ pochodnej w punkcie 0 nie ma, chociaż jest ciągła — ma ona w tym punkcie pochodne jednostronne, ale są one różne. Na wykresie funkcji jest to widoczne, w punkcie $(0,0)$ wykres się załamuje. Często mówimy, że wykres ma w tym punkcie „ostrze". Zauważmy, że rezultaty tych rozważań można opisać wzorem $(|x|)'=\frac{|x|}{x}$. ■

Przykład 5.23 Podamy teraz przykład świadczący o tym, że istnieją funkcje ciągłe, które przynajmniej w niektórych punktach nie mają pochodnych jednostronnych. Studenci zmęczeni tymi przykładami mogą pominąć w pierwszym czytaniu ten przykład i ewentualnie powrócić do niego później. Warto też spróbować sporządzić szkic wykresu funkcji, co może ułatwić zrozumienie sytuacji.

Przechodzimy do szczegółów. Niech $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ dla $x\neq 0$ oraz $f(0)=0$. Z oczywistej nierówności $|f(x)|\leq |x|$ wynika, że $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$, a to znaczy, że funkcja f jest ciągła w punkcie 0. Ciągłość w innych punktach jest oczywistym wnioskiem z twierdzenia o operacjach na funkcjach ciągłych i twierdzenia o ciągłości złożenia dwu funkcji. Z twierdzeń, które udowodnimy niedługo wyniknie, że funkcja ta ma pochodną skończoną w każdym punkcie z wyjątkiem punktu 0. Wykażemy teraz, że funkcja ta nie ma pochodnej w punkcie 0, dokładniej, że w tym punkcie funkcja nie ma pochodnej prawostronnej w punkcie 0. Jeśli $h>0$, to $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\sin\frac{1}{h}$. Udowodniliśmy poprzednio, że funkcja $\sin\frac{1}{h}$ nie ma granicy prawostronnej: $\sin\left(1/\frac{1}{2n\pi}\right)=0$ oraz $\sin\left(1/\frac{1}{2n\pi+\pi/2}\right)=1$. Nie istnieje więc $f'_+(0)$, czyli prawostronna pochodna funkcji f w punkcie 0.

Osiągnęliśmy cel, jednak wypowiemy jeszcze kilka zdań na temat tej funkcji. Dla każdej liczby naturalnej n punkt $\left(\frac{1}{2n\pi},0\right)$ leży na wykresie funkcji, co oznacza, że styczną do wykresu funkcji w punkcie $(0,0)$ powinna być pozioma oś układu współrzędnych. Jednakże dla każdej liczby naturalnej n punkt $\left(\frac{1}{2n\pi+\pi/2},\frac{1}{2n\pi+\pi/2}\right)$

leży na wykresie funkcji, więc styczną powinna być prosta, na której te punkty leżą, czyli prosta o równaniu $y=x$ — styczną ma być prosta najdokładniej „przylegająca" do wykresu. Podobnie można uzasadniać, że styczną do wykresu tej funkcji w punkcie $(0,0)$ powinna być prosta o równaniu $y=kx$, gdzie k jest dowolną liczbą z przedziału $[-1,1]$ — na każdej takiej prostej znajdują się punkty leżące na wykresie funkcji f, tworzące ciąg zbieżny do 0. Można powiedzieć, że wykres funkcji $x\sin\frac{1}{x}$ oscyluje między prostymi $y=x$ oraz $y=-x$ i do żadnej z nich ani do żadnej leżącej w kącie przez nie wyznaczonym w punkcie $(0,0)$ nie „przylega". ■

Przykład 5.24 Obliczymy teraz pochodną funkcji wykładniczej. Niech $f(x)=e^x$. Przypomnieć wypada, że $\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=e^x\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=e^x\cdot 1=e^x$. Wobec tego pochodną w punkcie x funkcji wykładniczej o podstawie e jest liczba e^x, czyli $(e^x)'=e^x$. Wobec tego równanie stycznej w punkcie (p,e^p) do wykresu funkcji e^x ma postać $y=e^p(x-p)+e^p$. ■

Uwaga 5.18 Mamy więc $e^{p+h}\approx e^p+e^p\cdot h$ dla $h\approx 0$. W szczególności dla $p=0$ zachodzi przybliżona równość $e^h\approx 1+h$ dla $h\approx 0$. To często stosowane przybliżenie, np. przy omawianiu rozszerzalności cieplnej stali. ■

Przykład 5.25 Następną bardzo ważną funkcją jest logarytm naturalny. Znajdziemy jej pochodną. Niech $f(x)=\ln x$ dla każdej liczby dodatniej x. Przypomnijmy, że $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$. Mamy więc dla $x>0$ następującą równość*:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h/x)}{h/x}\cdot\frac{1}{x}=1\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x}.$$

Znaczy to, że pochodną logarytmu naturalnego w punkcie x jest liczba $\frac{1}{x}$, czyli $(\ln x)'=\frac{1}{x}$. Wobec tego styczna w punkcie $(p,\ln p)$ do wykresu logarytmu naturalnego ma równanie $y=\frac{1}{p}(x-p)+\ln p$. ■

Przykład 5.26 Ostatnią z krótkiego cyklu „najważniejszych" funkcji elementarnych jest sinus. Przypomnijmy, że $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. Z niej wynika, że

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos(x+\frac{h}{2})}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h/2)}{h/2}\cdot\cos(x+\tfrac{h}{2})=\cos x.$$

Udało się więc nam wykazać, że pochodną funkcji sinus w punkcie x jest liczba $\cos x$, czyli że zachodzi wzór $(\sin x)'=\cos x$. Stąd wynika, że równanie stycznej W punkcie $(p,\sin p)$ do wykresu funkcji sinus to $y=(\cos p)\cdot(x-p)+\sin p$, w szczególności styczna do wykresu funkcji sinus w punkcie $(0,0)$ ma równanie $y=x$. ■

* Przypomnijmy, że $\ln(x+h)-\ln x=\ln\frac{x+h}{x}=\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)$

Uwaga 5.19 Otrzymany wzór daje przybliżoną równość $\sin(p+h) \approx \sin p + h \cdot \cos p$. Dla $p = 0$ wygląda on tak: $\sin h \approx h$ dla $h \approx 0$. To często stosowane w fizyce przybliżenie: optyka geometryczna, wahadło matematyczne, itp. ■

Następne wzory wyprowadzimy po podaniu reguł, według których obliczane są pochodne. Nie będziemy w tym przypadku zajmować się pochodnymi nieskończonymi, bowiem w zastosowaniach będą nam potrzebne na ogół pochodne skończone.

Twierdzenie 5.20 (o arytmetycznych własnościach pochodnej)
Załóżmy, że funkcje f i g są różniczkowalne w punkcie p. Wtedy funkcje $f \pm g$, $f \cdot g$ i, jeśli $g(p) \neq 0$, to również $\frac{f}{g}$ są różniczkowalne w punkcie p i zachodzą wzory:

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x), \qquad (f-g)'(x) = f'(x) - g'(x),$$

$$(f \cdot g)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Dowód. Mamy $f'(p) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(p+h)-f(p)}{h}$ oraz $g'(p) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{g(p+h)-g(p)}{h}$ i wiemy, że te pochodne są skończone. Stąd i z twierdzenia o arytmetycznych własnościach granicy funkcji wynika, że

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(p+h)+g(p+h)-f(p)-g(p)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(p+h)-f(p)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(p+h)-g(p)}{h} = f'(p) + g'(p).$$

Udowodniliśmy więc twierdzenie o pochodnej sumy dwu funkcji różniczkowalnych. W identyczny sposób dowodzimy twierdzenie pochodnej różnicy funkcji różniczkowalnych. Zajmiemy się teraz iloczynem funkcji różniczkowalnych. Tym razem skorzystamy z udowodnionego wcześniej twierdzenia o ciągłości funkcji różniczkowalnej. Mamy

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(p+h)g(p+h)-f(p)g(p)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[f(p+h)-f(p)]\cdot g(p+h)+f(p)[g(p+h)-g(p)]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(p+h)-f(p)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} g(p+h) + f(p) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(p+h)-g(p)}{h} = f'(p)g(p) + f(p)g'(p).$$

Teraz kolej na iloraz. Mamy teraz dodatkowe założenie: $g(p) \neq 0$. Wynika stąd, że istnieje taka liczba $\delta > 0$, że $|g(p+h) - g(p)| < |g(p)| = |0 - g(p)|$, jeżeli $|h| < \delta$. Wnioskujemy stąd, że liczby $g(p)$ i $g(p+h)$ leżą po tej samej stronie zera, w szczególności $g(p+h) \neq 0$. Mamy zatem

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(p+h)}{g(p+h)} - \frac{f(p)}{g(p)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(p+h)g(p)-f(p)g(p+h)}{hg(p+h)g(p)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(p+h)g(p)-f(p)g(p)-[f(p)g(p+h)-f(p)g(p)]}{hg(p+h)g(p)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(p+h)-f(p)}{h} g(p) - f(p) \frac{g(p+h)-g(p)}{h}}{g(p+h)g(p)} = \frac{f'(p)g(p)-f(p)g'(p)}{g(p)^2}.$$

Dowód został zakończony. ■

Twierdzenie 5.21 (o pochodnej złożenia)

Załóżmy, że funkcja g jest różniczkowalna w punkcie p, zaś funkcja f, określona na zbiorze zawierającym wszystkie wartości funkcji g, jest różniczkowalna w punkcie $g(p)$. Wtedy złożenie tych funkcji $f\circ g$ jest różniczkowalne w punkcie p i zachodzi wzór:

$$(f\circ g)'(x)=f'(g(x))g'(x)\,.$$

Wprowadzimy oznaczenie $y=g(x)$. Można napisać $(f\circ g)'(x)=f'(y)g'(x)$ lub $\frac{d(f\circ g)}{dx}(x)=\frac{df}{dy}(g(x))\cdot\frac{dg}{dx}(x)=\frac{df}{dy}(y)\cdot\frac{dg}{dx}(x)$ lub krócej $\frac{d(f\circ g)}{dx}=\frac{df}{dy}\cdot\frac{dg}{dx}$. Często wzór ten zapisywany jest w postaci $\frac{d(f\circ g)}{dx}=\frac{df}{dg}\cdot\frac{dg}{dx}$ lub, po oznaczeniu $z=f(y)$, jako $\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$. W literaturze anglojęzycznej nosi nazwę „the Chain Rule”, czego oczywistym motywem jest jego ostatnia postać, zwłaszcza jeśli zastosujemy go nie w przypadku złożenia dwu funkcji, lecz większej ich liczby – wtedy łańcuch staje się bardziej widoczny.

Dowód. Mamy do czynienia z dwiema funkcjami różniczkowalnymi: f w punkcie $q=g(p)$ oraz g w punkcie p. Niech $r_g(h)=\frac{g(p+h)-g(p)-g'(p)h}{h}$ i niech $r_g(0)=0$. Funkcja g jest różniczkowalna w punkcie p wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja r_g jest ciągła w punkcie 0. Prawdziwa jest zatem równość: $g(p+h)=g(p)+g'(p)h+r_g(h)h$. Przyjmijmy teraz, że $r_f(H)=\frac{f(g(p)+H)-f(g(p))}{H}$ oraz $r_f(0)=0$. Tak jak w przypadku funkcji g funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $q=g(p)$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja r_f jest ciągła w punkcie 0. Również w tym przypadku zachodzi też wzór: $f(g(p)+H)=f(g(p))+f'(g(p))H+r_f(H)H$. Gotowi jesteśmy do „wydzielenia części liniowej złożenia” $f\circ g$ w otoczeniu punktu p:

$$\begin{aligned}
&f(g(p+h))=f(g(p)+g'(p)h+r_g(h)h)=\\
&\quad=f(g(p))+f'(g(p))\big(g'(p)h+r_g(h)h\big)+r_f\big(g'(p)h+r_g(h)h\big)\big(g'(p)h+r_g(h)h\big)=\\
&\qquad=f(g(p))+f'(g(p))g'(p)h+h\cdot\big[r_g(h)+r_f\big(g'(p)h+r_g(h)h\big)\big(g'(p)+r_g(h)\big)\big]\,.
\end{aligned}$$

Jasne jest, że granicą wyrażenia znajdującego się w nawiasie kwadratowym przy $h\to 0$ jest liczba 0. Stąd zaś wynika od razu, zob. twierdzenie charakteryzujące pochodną jako współczynnik wielomianu stopnia ≤ 1 najlepiej przybliżającego funkcję, że pochodną funkcji $f\circ g$ w punkcie p jest liczba $f'(g(p))g'(p)$. Dowód został zakończony. ■

Twierdzenie 5.22 (o pochodnej funkcji odwrotnej)

Załóżmy, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie p, że $f'(p)\neq 0$, że funkcja f ma funkcję odwrotną oraz że funkcja f^{-1} odwrotna do f jest ciągła w punkcie $q=f(p)$. Wtedy funkcja f^{-1} jest różniczkowalna w punkcie q i zachodzi wzór

$$\left(f^{-1}\right)'(q)=\tfrac{1}{f'(p)}\ .$$

Wzór na pochodną funkcji odwrotnej można zapisać tak: $\left(f^{-1}\right)'(f(p))=\frac{1}{f'(p)}$ lub tak: $\left(f^{-1}\right)'(q)=\frac{1}{f'(f^{-1}(q))}$. Piszemy też $\frac{dx}{dy}=\left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1}$, oznaczywszy uprzednio $y=f(x)$. Ten ostatni zapis, zwłaszcza w połączeniu z wzorem $\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$, sugeruje, że symbol $\frac{dy}{dx}$ można traktować jak ułamek. Trzeba jednak uważać, bo nie oznacza on ułamka, lecz pochodną i posługiwać się analogiami z ilorazem jedynie w zakresie dopuszczonym podawanymi twierdzeniami. Można np. napisać wzór $\frac{dg}{dx}+\frac{dh}{dx}=\frac{d(g+h)}{dx}$ — oznacza on, że pochodna sumy dwu funkcji względem zmiennej x jest równa sumie ich pochodnych względem tej samej zmiennej x. Natomiast *nie można* napisać wzoru $\frac{df}{dy}+\frac{dg}{dx}=\frac{df\cdot dx+dg\cdot dy}{dy\cdot dx}$ np. dlatego, że jego prawa strona nie ma sensu, bo w ogóle nie jest zdefiniowana. Później rozważać będziemy pochodne wyższych rzędów i tam sytuacja będzie jeszcze bardziej skomplikowana.

Dowód. Tym razem wiemy, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie p, że $f'(p)\neq 0$ oraz że funkcja f^{-1} odwrotna do funkcji f jest ciągła w punkcie $q=f(p)$. Wystarczy teraz wykazać, że $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f^{-1}(q+h)-f^{-1}(q)}{h}=\frac{1}{f'(p)}$.

Niech $H=f^{-1}(q+h)-f^{-1}(q)$. Oczywiście H zależy od h. Z ciągłości funkcji f^{-1} w punkcie q wynika od razu, że $\lim\limits_{h\to 0}H=0$. Zachodzi wzór $h=q+h-q=$
$=f(f^{-1}(q+h))-f(f^{-1}(q))=f(f^{-1}(q)+H)-f(f^{-1}(q))=f(p+H)-f(p)$.
Z tego i z poprzednich wzorów wynika, że

$$\lim_{h\to 0}\tfrac{f^{-1}(q+h)-f^{-1}(q)}{h}=\lim_{H\to 0}\tfrac{H}{f(p+H)-f(p)}=\tfrac{1}{f'(p)}\ .\ \blacksquare$$

Pokażemy teraz, jak podane przed chwilą twierdzenia można stosować.

Przykład 5.27 Znajdziemy pochodną funkcji kosinus. Mamy $\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$. Skorzystamy z wzoru wynikającego z wzoru wykazanego w przykładzie pierwszym: $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)'=\left((-1)x+\frac{\pi}{2}\right)'=-1$. Teraz skorzystamy z twierdzenia o pochodnej złożenia:

$$(\cos x)'=\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)'=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot(-1)=-\sin x$$

— tutaj rolę funkcji f z wzoru na pochodną złożenia pełni sinus, którego pochodną jest kosinus, zaś rolę funkcji g odgrywa funkcja $\dfrac{\pi}{2}-x$, której pochodną jest -1. $\blacksquare$

Przykład 5.28 Zastosujemy wzór na pochodną ilorazu dla uzyskania wzoru na pochodną funkcji tangens. Mamy $(\operatorname{tg}x)'=$

$$=\left(\tfrac{\sin x}{\cos x}\right)'=\tfrac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{(\cos x)^2}=\tfrac{\cos x\cdot\cos x-(-\sin x)\sin x}{\cos^2 x}=\tfrac{1}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tg}^2 x\ .\ \blacksquare$$

Przykład 5.29 Teraz kolej na kotangens. Wzór ten można uzyskać na różne sposoby, np. modyfikując nieznacznie wyprowadzenie wzoru na pochodną funkcji tangens. Można też zastosować metodę znaną już z wyprowadzenia wzoru na pochodną funkcji kosinus i właśnie tak postąpimy:

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\operatorname{tg}\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \tfrac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} \cdot (-1) = -\tfrac{1}{\sin^2 x} = -1 - \operatorname{ctg}^2 x\,. \ \blacksquare$$

Przykład 5.30 Przypomnijmy, że funkcją odwrotną do funkcji tangens ograniczonej do przedziału $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ jest funkcja arctg, która przekształca zbiór wszystkich liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ na przedział $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Zachodzi zatem wzór: $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$. Funkcja arctg jest ciągła. Pochodna funkcji tangens nie jest w żadnym punkcie mniejsza od 1, więc jest różna od 0. Wobec tego z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej wynika, że funkcja arctg ma pochodną w każdym punkcie. Z twierdzenia o pochodnej złożenia wynika, że musi zachodzić wzór:

$$1 = (x)' = (\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x))' = \left(1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)\right) \cdot (\operatorname{arctg} x)' = \left(1 + x^2\right) \cdot (\operatorname{arctg} x)'.$$

Stąd wnioskujemy, że $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$. $\blacksquare$

Przykład 5.31 Wyprowadzimy wzór na pochodną funkcji arcsin, czyli funkcji odwrotnej do funkcji sinus ograniczonej do przedziału $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Funkcja arcsinus jest ciągła i przekształca przedział $[-1, 1]$ na przedział $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Na tym przedziale funkcja kosinus przyjmuje nieujemne wartości. Stąd wynika, że jeśli $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, to $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$. Ponieważ pochodna funkcji sinus jest różna od 0 w punktach przedziału otwartego $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, więc funkcja arcsin jest różniczkowalna w punktach odpowiadających punktom przedziału $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, czyli w punktach przedziału otwartego $(-1, 1)$. Mamy więc

$$1 = (x)' = (\sin(\arcsin(x)))' = \cos(\arcsin(x)) \cdot (\arcsin(x))' =$$
$$= \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))} \cdot (\arcsin)' = \sqrt{1 - x^2} \cdot (\arcsin(x))'.$$

Stąd już łatwo wynika, że zachodzi wzór: $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Znaleźliśmy więc pochodną funkcji arcsin w punktach wewnętrznych jej dziedziny. W punktach leżących na jej brzegu, czyli w punktach -1 i 1 można by mówić jedynie o pochodnych jednostronnych. Pozostawiamy czytelnikom wykazanie tego, że w obu końcach przedziału $[-1, 1]$ funkcja arcsin ma pochodną jednostronną i że ta pochodna jednostronna równa jest $+\infty$. Warto naszkicować sobie wykres funkcji arcsin – jest on oczywiście symetryczny do wykresu funkcji sinus, ograniczonej do przedziału $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, względem prostej o równaniu $y = x$. $\blacksquare$

Przykład 5.32 Niech $f(x) = x^a$, gdzie a jest dowolną liczbą rzeczywistą, zaś x

jest liczbą dodatnią. Wykażemy, że $(x^a)' = ax^{a-1}$.*

Z definicji wynika, że $x^a = e^{a\ln x}$. Korzystając z twierdzenia o pochodnej złożenia dwu funkcji oraz poprzednio wyprowadzonych wzorów na pochodne funkcji wykładniczej, logarytmu i funkcji liniowej otrzymujemy:

$$(x^a)' = \left(e^{a\ln x}\right)' = e^{a\ln x} \cdot a \cdot \tfrac{1}{x} = ax^{a-1}.$$

Dodać wypada, że potęgę x^a można zdefiniować też w przypadku $x = 0$ i $a > 0$ oraz w przypadku $x < 0$, jeśli a jest liczbą wymierną, której mianownik jest całkowitą liczbą nieparzystą, a licznik — liczbą całkowitą, po ewentualnym skróceniu. Pozostawiamy czytelnikom uzasadnienie tego, że w obu tych przypadkach podany przez nas wzór na pochodną funkcji potęgowej pozostaje w mocy. Oczywiście w przypadku pierwszym mowa jest jedynie o pochodnej prawostronnej, chyba że a jest wykładnikiem dodatnim, wymiernym o mianowniku nieparzystym (mowa o zapisie liczby wymiernej w postaci ułamka nieskracalnego, którego licznik i mianownik są liczbami całkowitymi). ■

Przykład 5.33 Zajmiemy się teraz przez chwilę funkcją wykładniczą o dowolnej podstawie. Niech a będzie dowolną liczbą dodatnią, x — dowolną liczbą rzeczywistą. Postępując tak jak w przypadku funkcji potęgowej otrzymujemy wzór:

$$(a^x)' = \left(e^{x\ln a}\right)' = e^{x\ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a. \ ■$$

Na tym zakończymy krótki przegląd najbardziej podstawowych wzorów na pochodne. Będziemy je obliczać wielokrotnie. Przekonamy się niebawem, że można ich używać w celu rozwiązywania rozlicznych problemów, np. znajdowania największych i najmniejszych wartości funkcji. Do tego potrzebne będą nam jednak twierdzenia pozwalające na wiązanie własności funkcji z własnościami jej pochodnej. Warto nadmienić, że z twierdzeń, które już podaliśmy, wynika, że funkcje zdefiniowane za pomocą „jednego wzoru", mają pochodną we wszystkich punktach swej dziedziny z wyjątkiem nielicznych punktów wyjątkowych, np. wzór

$$(\sqrt[3]{x})' = \left(\left(x^{1/3}\right)\right)' = \tfrac{1}{3}x^{-2/3} = \tfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

ma miejsce dla wszystkich $x \neq 0$. Istnieją, co prawda, funkcje ciągłe określone na całej prostej, które nie mają pochodnej w żadnym punkcie, ale my się takimi tworami zajmować nie będziemy. Jednak w fizyce rozpatrywany jest tzw. ruch Browna, w którego modelu matematycznym tego rodzaju dziwactwa pojawiają się. Związane jest to z tym, że w tym modelu rozpatrywana jest sytuacja otrzymana przez przejście z liczbą

*Dla $a=\frac{1}{2}$ jest to znany wielu czytelnikom z nauki w szkole wzór na pochodną pierwiastka kwadratowego, dla $a=2$ oraz $a=3$ otrzymaliśmy wzory wcześniej, zob, przykład 2,3.

rozpatrywanych cząstek do nieskończoności, co zważywszy na ich liczbę dziwne nie jest. Wtedy jednak typowa cząstka zderza się z innymi „bez przerwy”, a to powoduje załamania trajektorii, czyli punkty nieróżniczkowalności. Związany z ruchem Browna proces Wienera znajduje zastosowania również w modelach ekonomicznych.

Następne twierdzenie było używane przez Fermata (1601–1665) w odniesieniu do wielomianów jeszcze przed wprowadzeniem przez Newtona i Leibniza rachunku różniczkowego i całkowego. Fermat zajmował się znajdował między innymi znajdowaniem wartości największych i najmniejszych wielomianów na przedziałach domkniętych. Doprowadziło go to w gruncie rzeczy do pojęcia pochodnej, choć nie stworzył on teorii. Tym nie mniej odkrył twierdzenie, którego wagę trudno przecenić, choć zarówno twierdzenie jak i jego dowód są niesłychanie proste.

Twierdzenie 5.23 (o zerowaniu się pochodnej w punktach lokalnego ekstremum)
Jeśli f jest funkcją różniczkowalną w punkcie p i przyjmuje w punkcie p wartość najmniejszą lub największą, to $f'(p) = 0$, podkreślić wypada, że zakładamy tu, że p jest środkiem pewnego przedziału otwartego zawartego w dziedzinie funkcji.

Dowód. Załóżmy, że funkcja f ma w punkcie p wartość największą. Znaczy to, że dla każdego punktu x z dziedziny funkcji f zachodzi nierówność $f(x) \le f(p)$, zatem dla $h > 0$ mamy $\frac{f(p+h)-f(p)}{h} \le 0$, wobec tego $f'(p) = \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(p+h)-f(p)}{h} \le 0$. Mamy też $f'(p) = \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{f(p+h)-f(p)}{h} \ge 0$ dla $h < 0$. Obie te nierówności mogą zachodzić jednocześnie jedynie w przypadku $f'(p) = 0$.

Jeśli f przyjmuje w punkcie p wartość najmniejszą, to funkcja przeciwna $-f$ przyjmuje w tym punkcie wartość największą, więc $0 = (-f)'(p) = -f'(p)$. Dowód został zakończony. ■

Wypada podkreślić, że jeśli funkcja określona na przedziale przyjmuje wartość największą w jego końcu, to nawet w przypadku, gdy jest w tym końcu jednostronnie różniczkowalna, to jej pochodna nie musi być równa 0, funkcja x rozpatrywana na przedziale $[7, 13]$ przyjmuje swą największą wartość w punkcie 13, w którym jej pochodną jest liczba 1.

Uwaga 5.24 (o pozornej monotnoniczności)
Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie p oraz $f'(p) > 0$, to istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że jeśli $0 < h < \delta$, to $f(p-h) < f(p) < f(p+h)$, tzn. dostatecznie blisko punktu p, na lewo od niego wartości funkcji są mniejsze niż w wartość punkcie p, zaś na prawo od tego punktu, w jego pobliżu wartości funkcji są większe niż wartość

w punkcie p.

Dowód. Iloraz różnicowy $\frac{f(p+h)-f(p)}{h}$ jest dodatni dla dostatecznie małych h, bowiem ma dodatnią granicę przy $h \to 0$, zatem licznik i mianownik tego ułamka mają taki sam znak. ■

Twierdzenie 5.25 (Rolle'a)
Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$ i ma pochodną we wszystkich jego punktach wewnętrznych oraz $f(a) = f(b)$, to istnieje taki punkt $c \in (a, b)$, że $f'(c) = 0$.

Dowód. Załóżmy, że $f(a) = f(b)$ nie jest największą wartością funkcji f. Niech c będzie punktem, w którym funkcja f przyjmuje wartość największą spośród przyjmowanych na tym przedziale. Oczywiście $a < c < b$. Wobec tego f jest różniczkowalna w punkcie c i na mocy twierdzenia Fermata zachodzi równość $f'(c) = 0$. Jeśli funkcja f nie przyjmuje wewnątrz przedziału $[a, b]$ wartości większych niż $f(a) = f(b)$, to albo przyjmuje mniejsze i możemy zamiast niej rozważyć funkcję przeciwną $-f$, albo funkcja f jest stała na przedziale $[a, b]$. W tym drugim przypadku c może być dowolnym punktem przedziału otwartego (a, b). Dowód został zakończony. ■

Interpretacja fizyczna tego twierdzenia może być np. taka: po prostoliniowej drodze porusza się pojazd, który rozpoczyna i kończy przemieszczanie się w tym samym punkcie $\big(f(a) = f(b)\big)$, ponieważ kończymy podróż w punkcie startu, więc w którymś punkcie musieliśmy zawrócić, w momencie zmiany kierunku jazdy nasza prędkość była równa 0.

Na wykresie funkcji punkty, o których jest mowa w dowodzie twierdzenia Rolle'a to te w otoczeniu, których wykres wygląda tak, jak wykres funkcji $-x^2$ w otoczeniu punktu 0. Oczywiście to nie są jedyne punkty, w których pochodna przyjmuje wartość 0. Niech $f(x) = \sin^3 x$. Wtedy $f'(x) = 3\sin^2 x \cos x$, zatem $f'(0) = 0$, chociaż w punkcie 0 funkcja f nie ma lokalnego maksimum ani lokalnego minimum, w każdym przedziale postaci (δ, δ), gdzie $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$, funkcja f jest ściśle rosnąca. Ma ona lokalne ekstrema, ale w innych punktach, np. w punktach $\pm\frac{\pi}{2}$.

Przejdziemy teraz do najważniejszego twierdzenia w rachunku różniczkowym, twierdzenia o wartości średniej.

Twierdzenie 5.26 (Lagrange'a o wartości średniej)
Jeśli funkcja f jest ciągła w każdym punkcie przedziału domkniętego $[a, b]$ i ma pochodną we wszystkich punktach przedziału otwartego (a, b), to istnieje taki punkt $c \in (a, b)$, że $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Dowód. Niech $g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a)$ — od funkcji f odejmujemy funkcję $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$, więc liniową, której wartości w końcach przedziału $[a,b]$ pokrywają się z wartościami funkcji f. Mamy więc $g(a)=0=g(b)$. Funkcja g jest funkcja ciągła, jako różnica funkcji ciągłych. Taki sam argument przekonuje nas o istnieniu pochodnej g' we wszystkich punktach przedziału otwartego (a,b). Wobec tego dla funkcji g spełnione są założenia twierdzenia Rolle'a. Istnieje wobec tego taki punkt $c\in(a,b)$, że $0=g'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, a to właśnie mieliśmy wykazać. Dowód został zakończony. ■

Każdy czytelnik z pewnością zauważył, że twierdzenie Rolle'a jest przypadkiem szczególnym twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej. Można też zinterpretować „fizycznie" twierdzenie Lagrange'a. Jeśli $f(x)$ oznacza położenie w chwili x obiektu poruszającego się po prostej, to $f'(c)$ oznacza prędkość w chwili c, zaś $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ to prędkość średnia w okresie od a do b. Wg. tej interpretacji twierdzenie o wartości średniej mówi, że prędkość chwilowa w pewnej chwili c równa jest prędkości średniej, co wygląda na stwierdzenie zupełnie oczywiste. Geometrycznie twierdzenie to oznacza, że jeśli poprowadzimy prostą przez dwa punkty leżące na wykresie funkcji f, to styczna do wykresu f w *pewnym* punkcie leżącym między wybranymi punktami jest równoległa do wybranej prostej.

Widzimy więc, że twierdzenie Lagrange'a ma krótki dowód, prosto można je zinterpretować na różne sposoby. Pokażemy niedługo, że ma ono liczne i ważne konsekwencje.

Zadania

5.01 Korzystając jedynie z definicji pochodnej oblicz $f'(0)$, jeśli $f(x)=x^2\cos x$.

5.02 Korzystając jedynie z definicji pochodnej oblicz $f'(0)$, jeśli $f(x)=xe^x$.

5.03 Korzystając jedynie z definicji pochodnej oblicz $f'(0)$, jeśli $f(x)=x(x-1)$.

5.04 Korzystając jedynie z definicji pochodnej oblicz $f'(1)$, jeśli $f(x)=x(x-1)$.

5.05 Korzystając jedynie z definicji pochodnej oblicz $f'(0)$, jeśli $f(x)=x^2\cos\frac{1}{x}$ i $f(0)=0$.

5.06 Wykazać, że jeśli $f(0)=0$ i $f(x)=x\cos\frac{1}{x}$, to funkcja f jest ciągła w punkcie 0, ale pochodnej w tym punkcie nie ma.

5.07 Korzystając jedynie z definicji pochodnej oblicz $f'(1)$, jeśli $f(x)=(x-1)e^x$.

5.08 Korzystając jedynie z definicji pochodnej oblicz $f'(0)$, jeśli

$$f(x)=x\sqrt{9+\sin(\operatorname{tg}x)}.$$

5.09 Korzystając jedynie z definicji pochodnej oblicz $f'(0)$, jeśli

$$f(x) = \sin\left(x\sqrt{4+\sin(\operatorname{tg} x)}\right).$$

5.10 Korzystając jedynie z definicji pochodnej oblicz $f'(2)$, jeśli

$$f(x) = (x-2)\,|x+3|\,.$$

5.11 Korzystając jedynie z definicji pochodnej oblicz $f'(1)$, jeśli

$$f(x) = (\ln x)\sqrt{1+3x^2}\,.$$

5.12 Obliczyć pochodną funkcji πx^2 w tych punktach, w których istnieje.

5.13 Obliczyć pochodną funkcji $\frac{4}{3}\pi x^3$ w tych punktach, w których istnieje.

5.14 Obliczyć pochodną funkcji $1-3x+7x^2+5x^3$ w tych punktach, w których istnieje.

5.15 Obliczyć pochodną funkcji $\sqrt{1+x}$ w tych punktach, w których istnieje.

5.16 Obliczyć pochodną funkcji $\sqrt{1+2x}$ w tych punktach, w których istnieje.

5.17 Obliczyć pochodną funkcji $\sqrt{1+x^2}$ w tych punktach, w których istnieje.

5.18 Obliczyć pochodną funkcji $\sqrt{1+\sin x}$ w tych punktach, w których istnieje.

5.19 Obliczyć pochodną funkcji $\frac{2x}{1+x^2}$ w tych punktach, w których istnieje.

5.20 Obliczyć pochodną funkcji $\frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}$ w tych punktach, w których istnieje.

5.21 Obliczyć pochodną funkcji $\arccos(\sin x)$ w tych punktach, w których istnieje.

5.22 Obliczyć pochodną funkcji $\frac{\sin^2 x}{\sin(x^2)}$ w tych punktach, w których istnieje.

5.23 Obliczyć pochodną funkcji $x^{\sqrt{3}}$ w tych punktach, w których istnieje.

5.24 Obliczyć pochodną funkcji $\sin\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ w tych punktach, w których istnieje.

5.25 Obliczyć pochodną funkcji $\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$ w tych punktach, w których istnieje.

5.26 Obliczyć pochodną funkcji x^x w tych punktach, w których istnieje.

5.27 Obliczyć pochodną funkcji $\sqrt{\operatorname{tg} x}$ w tych punktach, w których istnieje.

5.28 Obliczyć pochodną funkcji e^{-x^2} w tych punktach, w których istnieje.

5.29 Obliczyć pochodną funkcji $e^{\sin x}$ w tych punktach, w których istnieje.

5.30 Obliczyć pochodną funkcji $\sqrt{x+\sqrt{2x+\sqrt{3x}}}$ w tych punktach, w których istnieje.

5.31 Obliczyć pochodną funkcji $\ln|x|$ w tych punktach, w których istnieje.

5.32 Obliczyć pochodną funkcji $\sin^2 x$ w tych punktach, w których istnieje.

5.33 Obliczyć pochodną funkcji $|\sin x|$ w tych punktach, w których istnieje.

5.34 Obliczyć pochodną funkcji $\ln|\sin x|$ w tych punktach, w których istnieje.

5.35 Obliczyć pochodną funkcji $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ w tych punktach, w których istnieje.

5.36 Obliczyć pochodną funkcji $\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$ w tych punktach, w których istnieje.

5.37 Obliczyć pochodną funkcji $x\,|x|$ w tych punktach, w których istnieje.

5.38 Obliczyć pochodną funkcji $\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$ w tych punktach, w których istnieje.

5.39 Znaleźć równanie stycznej do wykresu $\sqrt{1-x^2}$ w punkcie $\left(a, \sqrt{1-a^2}\right)$ i wykazać, że styczna do wykresu funkcji $\sqrt{1-x^2}$ w tym punkcie jest prostopadła do prostej przechodzącej przez punktu $(0,0)$ i $\left(a, \sqrt{1-a^2}\right)$.

5.40 Znaleźć równanie stycznej do wykresu $\cos^2 x - 2\sin x$ w punkcie $(\pi, 1)$ lub wykazać, że w tym punkcie wykres funkcji f nie ma stycznej.

5.41 Znaleźć równanie stycznej do wykresu $\operatorname{arctg}(2x)$ w punkcie $(0,0)$ lub wykazać, że w tym punkcie wykres funkcji f nie ma stycznej.

5.42 Znaleźć równanie stycznej do wykresu $|x-1|\sqrt[3]{x+2}$ w punkcie $(-3,-4)$ albo wykazać, że w tym punkcie wykres funkcji f nie ma stycznej.

5.43 Znaleźć równanie stycznej do wykresu $\left(x^2-1\right)^2$ w punkcie $(0,1)$ lub wykazać, że w tym punkcie wykres funkcji f nie ma stycznej.

5.44 Znaleźć równanie stycznej do wykresu $\left(x^2-1\right)^2$ w punkcie $\left(\sqrt{2}, 1\right)$ lub wykazać, że w tym punkcie wykres funkcji f nie ma stycznej.

5.45 Znaleźć równanie stycznej do wykresu $\sqrt[3]{x}$ w punkcie $(0,0)$ lub wykazać, że w tym punkcie wykres funkcji f nie ma stycznej.

5.46 Znaleźć równanie stycznej do wykresu $\sqrt[3]{e^x - 1}$ w punkcie $(0,0)$ lub wykazać, że w tym punkcie wykres funkcji f nie ma stycznej.

5.47 Znaleźć równanie stycznej do wykresu $\sqrt{1-\cos\left(x\sqrt{2}\right)}$ w punkcie $(0,0)$ lub wykazać, że w tym punkcie wykres funkcji f nie ma stycznej.

5.48 Znaleźć równanie stycznej do wykresu $\sqrt[3]{x-\sin x}$ w punkcie $(0,0)$ lub wykazać, że w tym punkcie wykres funkcji f nie ma stycznej.

W następnych ośmiu zadaniach proszę zakładać, że przybliżenie funkcją liniową jest wystarczająco dokładne.

5.49 Znaleźć przybliżoną wartość liczby $\sqrt{50}$.

5.50 Znaleźć przybliżoną wartość liczby $\sqrt{80}$.

5.51 Znaleźć przybliżoną wartość liczby $\sqrt{145}$.

5.52 Znaleźć przybliżoną wartość liczby $\sqrt{10\,001}$.

5.53 Znaleźć przybliżoną wartość liczby $\sqrt[3]{1\,001}$.

5.54 Znaleźć przybliżoną wartość liczby $\sqrt[3]{65}$.

5.55 Znaleźć przybliżoną wartość liczby $\sqrt[10]{1000}$.

5.56 Znaleźć przybliżoną wartość liczby $\log 1000$, wiedząc, że $\ln 10 \approx 2{,}3$.

5.57 Wykazać, że jeśli $f(x) = x^3 + 3x$ dla $x \in (-\infty, +\infty)$, to funkcja f określona na wskazanym przedziale ma funkcję odwrotną f^{-1}. Znaleźć dziedzinę funkcji f^{-1}

oraz $\left(f^{-1}\right)'(0)$.

5.58 Wykazać, że jeśli $f(x) = x + e^x$ dla $x \in (-\infty, +\infty)$, to funkcja f określona na wskazanym przedziale ma funkcję odwrotną f^{-1}. Znaleźć dziedzinę funkcji f^{-1} oraz $\left(f^{-1}\right)'(1)$.

5.59 Wykazać, że jeśli $f(x) = x + \ln x$ dla $x \in (0, +\infty)$, to funkcja f określona na wskazanym przedziale ma funkcję odwrotną f^{-1}. Znaleźć dziedzinę funkcji f^{-1} oraz $\left(f^{-1}\right)'(1)$.

5.60 Niech $f(x) = 5e^{3x}$. Obliczyć $f'(x) - 3f(x)$.

5.61 Niech $f(x) = 5e^{-7x}$. Obliczyć $f'(x) + 7f(x)$.

5.62 Niech $f(x) = 5xe^{3x}$. Obliczyć $f'(x) - 3f(x)$.

5.63 Niech $f(x) = 5x^2e^{3x}$. Obliczyć $f'(x) - 3f(x)$.

5.64 Niech $f(x) = 5x^3e^{3x}$. Obliczyć $f'(x) - 3f(x)$.

5.65 Niech $f(x) = 5xe^{3x}$. Obliczyć $f'(x) - 3f(x)$.

5.66 Niech $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie różniczkowalną funkcją parzystą, tzn. $f(-x) = f(x)$ dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$. Wykazać, że $f'(0) = 0$ i ogólnie $f'(-x) = -f'(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

5.67 Załóżmy, że funkcja f ma pochodną w każdym punkcie oraz że $f'(x) = 2f(x)$ dla każdej liczby x. Obliczyć pochodną funkcji $f(x)e^{-2x}$.

5.68 Załóżmy, że funkcja f ma pochodną w każdym punkcie oraz że $f'(x) = 2xf(x)$ dla każdej liczby x. Obliczyć pochodną funkcji $f(x)e^{-x^2}$.

5.69 Załóżmy, że funkcja f ma pochodną w każdym punkcie oraz że $f'(x)+f(x) = 0$ dla każdej liczby x. Obliczyć $\left(f(x)e^x\right)'$.