S Z E R E G I   P O T Ę G O W E

15 lutego 2016

Wiele funkcji można przedstawiać w postaci sum szeregów potęgowych. Udało nam się już przedstawić w takiej postaci funkcję wykładniczą. W tym punkcie przekonamy się, że nie jest ona żadnym wyjątkiem – praktycznie wszystkie funkcje, które są zdefiniowane ,,za pomocą jednego wzoru”, można tak zapisać, co ułatwia w licznych przypadkach poznanie ich własności. Zaczniemy od definicji i twierdzenia opisującego podstawowe własności szeregów potęgowych.

Definicja 18.1 (szeregu potęgowego)
Szeregiem potęgowym o środku w punkcie 0 i współczynnikach $a_0, a_1, a_2, \ldots$ nazywamy szereg sumę nieskończoną postaci

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n\,.$$

Mówimy, że szereg taki jest zbieżny dla $x \in \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończona granica $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n\right)$. Tę granicę nazywamy sumą szeregu potęgowego i oznaczamy symbolem $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$. ■

W tej definicji i w przypadku stosowania zapisu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ przyjmujemy wyjątkowo, że $x^0 = 1$ również dla $x = 0$, by nie komplikować oznaczeń.

Dla $x = 0$ szereg potęgowy jest zbieżny. Czasem jest to jedyny punkt zbieżności, np. jeśli $a_n = n^n$. Jeśli granica $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n\right)$ jest skończona, to $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}\right)$, bo granica ciągu i podciągu jest taka sama, zatem

$$\lim_{n\to\infty} a_nx^n = \lim_{n\to\infty}\big(\left(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n\right) - \left(a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}\right)\big) = 0\,.$$

Ze zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^nx^n$ wynika więc, że $0 = \lim\limits_{n\to\infty} n^nx^n = \lim\limits_{n\to\infty}(nx)^n$, a ta równość ma miejsce jedynie dla $x = 0$.

Może też zdarzyć się, że szereg potęgowy jest zbieżny dla wszystkich liczb rzeczywistych x. Przykładem jest tu szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots$,* którego

* Teraz $a_n = \frac{1}{n!}$

sumą jest e^x, w tym wypadku $a_n = \frac{1}{n!}$. Wykazaliśmy to wcześniej męcząc się nieco. Mamy również $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ dla $x \in (-1,1)$ — to znany wzór na sumę nieskończonego ciągu geometrycznego, tym razem $a_n = 1$ dla wszystkich całkowitych $n \geqslant 0$. Widzimy więc, że zbiór tych liczb x dla których szereg jest zbieżny zależy od współczynników $a_0, a_1, a_2, \ldots$. O tym zbiorze coś jednak można powiedzieć.

Lemat 18.2 (o zbieżności szeregu potęgowego)

Jeśli szereg potęgowy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny dla $x = x_1$ i $|x_2| < |x_1|$, to szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_2^n$ jest zbieżny. Co więcej, dla każdej liczby naturalnej k szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^k a_n x_2^n$ jest zbieżny.

Dowód. *

Ponieważ szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ jest zbieżny, więc $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_1^n = 0$ — wykazaliśmy to przed sformułowaniem dowodzonego lematu. Istnieje więc taka liczba $M > 0$, że nierówność $\left|a_n x_1^n\right| \leqslant M$ zachodzi dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}$. Niech $q = \left|\frac{x_2}{x_1}\right|$. Z założenia wynika, że $0 \leq q < 1$. Niech $q_1 = \frac{1+q}{2}$. Wtedy $q < q_1 < 1$, więc $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k q^n}{q_1^n} = \lim\limits_{n\to\infty} n^k \left(\frac{q}{q_1}\right)^n = 0$. Wobec tego istnieje taka liczba $K > 0$, że $\left|\frac{n^k q^n}{q_1^n}\right| \leqslant K$ dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}$. Niech m, n oznaczają liczby naturalne i niech $n > m$. Wtedy

$$\Big|\sum_{j=m+1}^{n} j^k\, a_j\, x_2^j\Big| \leqslant \sum_{j=m+1}^{n} \left|j^k\, a_j\, x_2^j\right| = \sum_{j=m+1}^{n} \left|a_j x_1^j\right| j^k \left|\tfrac{x_2}{x_1}\right|^j = \sum_{j=m+1}^{n} \left|a_j x_1^j\right| j^k q^j \leqslant$$

$$\leqslant M \sum_{j=m+1}^{n} j^k q^j = M \sum_{j=m+1}^{n} \frac{j^k q^j}{q_1^j} q_1^j \leqslant MK \sum_{j=m+1}^{n} q_1^j =$$

$$= MK q_1^{m+1} \frac{1-q_1^{n-m}}{1-q_1} < MK q_1^{m+1} \frac{1}{1-q_1} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

Wobec tego dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ i dla dostatecznie dużego $m \in \mathbb{N}$ oraz dowolnego $n > m$ zachodzi nierówność

$$\left|(a_0 + a_1 x_2 + 2^k a_2 x_2^2 + \cdots + n^k a_n x_2^n) - (a_0 + a_1 x_2 + 2^k a_2 x_2^2 + \cdots + n^k a_m x_2^m)\right| < \varepsilon.$$

Wykazaliśmy więc, że ciąg o wyrazie $a_0 + a_1 x_2 + 2^k a_2 x_2^2 + \cdots + n^k a_n x_2^n$ spełnia warunek Cauchy'ego, co dowodzi, że ma on skończoną granicę, a to było naszym

*Należy koniecznie przypomnieć sobie własności ciągu geometrycznego w tym wzór na sumę nieskończonego ciągu geometrycznego!

celem. ■

Z lematu o zbieżności szeregu potęgowego wynika, że zbiór tych punktów $x \in \mathbb{R}$, dla których ten szereg jest zbieżny jest przedziałem o środku w punkcie 0, być może nieskończonym, czyli całą prostą lub zbiorem złożonym tylko z liczby 0. Ogólnie nic nie można powiedzieć na temat końców tego przedziału. W każdym z końców szereg może być zbieżny lub nie. Przedział złożony z punktów, dla których szereg $\sum a_n x^n$ jest zbieżny nazywamy **przedziałem zbieżności** szeregu $\sum a_n x^n$, a połowę jego długości — promieniem zbieżności szeregu. Wobec tego promieniem zbieżności szeregu $\sum n^n x^n$ jest liczba 0, promieniem zbieżności szeregu $\sum x^m$ jest liczba 1, promieniem zbieżności szeregu $\sum \frac{x^n}{n!}$ jest $+\infty$.

Uwaga 18.3 (o bezwzględnej zbieżności szeregu potęgowego)
Dowodząc lemat o zbieżności szeregu potęgowego wykazaliśmy, że oprócz szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^k a_n x^n$ zbieżny jest też szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|n^k a_n x^n\right|$. W tej sytuacji matematycy mówią o bezwzględnej zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^k a_n x^n$. ■

Funkcje, które można przedstawić w postaci sumy szeregu potęgowego nie mają ,,patologicznych" własności. W zasadzie wszystkie podstawowe funkcje można przynajmniej lokalnie zapisywać w takiej postaci. Nie będziemy się zbytnio wgłębiać w te zagadnienia. Wykażemy jeszcze jedno twierdzenie.

Twierdzenie 18.4 (o pochodnej szeregu potęgowego)
Jeśli szereg potęgowy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ma dodatni promień zbieżności, to *wewnątrz* przedziału zbieżności suma tego szeregu jest funkcją różniczkowalną i zachodzi wzór:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

Dowód. Niech $r > 0$ będzie promieniem zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Wtedy szereg potęgowy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^k a_n x^n$ jest zbieżny każdego $x \in (-r, r)$ i dla każdej liczby $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$, zaś jeśli $|x| > r$, to szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ nie jest zbieżny. W rzeczywistości wykazaliśmy, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ i $x \in (-r, r)$ zbieżny jest szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|n^k a_n x^n\right|$. Załóżmy dalej, że $|x|<r$, że $d>0$ jest liczbą mniejszą niż $r-|x|$ oraz że $0<|h|\leq d$. Stąd wynika, że $|x+h|\leqslant|x|+|h|\leq|x|+d<r$, więc szeregi $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|na_nx^{n-1}\right|$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|a_nx^n\right|$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|a_n(x+h)^n\right|$ i $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|(|x|+d)^n$ są zbieżne.

Niech $s(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$. Wtedy

$$\left|\tfrac{s(x+h)-s(x)}{h}-\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}\right|=\left|\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(\frac{(x+h)^n-x^n}{h}-nx^{n-1}\right)\right|=$$

$$=\left|\sum_{n=2}^{\infty}a_n\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}h^{k-1}\right|\leqslant|h|\cdot\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}|x|^{n-k}|h|^{k-2}\leqslant$$

$$\leqslant|h|\cdot\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|n^2\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}|x|^{(n-2)-(k-2)}|h|^{k-2}=$$

$$=|h|\cdot\sum_{n=2}^{\infty}n^2|a_n|\left(|x|+|h|\right)^{n-2}\leqslant|h|\cdot\sum_{n=2}^{\infty}n^2|a_n|\left(|x|+d\right)^{n-2}.$$

Przedostatnia nierówność wynika z tego, że jeśli $n\geqslant k\geqslant 2$, to

$$\binom{n}{k}=\frac{n\cdot(n-1)}{(k-1)\cdot k}\cdot\binom{n-2}{k-2}\leqslant n^2\binom{n-2}{k-2}.$$

Oczywiście $\lim\limits_{h\to 0}|h|\cdot\sum\limits_{n=2}^{\infty}n^2|a_n|\left(|x|+d\right)^{n-2}=0$, zatem

$$\lim_{h\to 0}\frac{s(x+h)-s(x)}{h}-\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=0,$$

więcx

$$s'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{s(x+h)-s(x)}{h}=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}.$$ Dowód został zakończony. ■

Z twierdzenia o różniczkowaniu szeregu potęgowego wynika, że wewnątrz dziedziny ma on skończoną pochodną, która też jest sumą szeregu potęgowego, więc jest różniczkowalna wewnątrz swej dziedziny. Z tego wynika, że suma szeregu potęgowego jest funkcją ciągłą wewnątrz jego przedziału zbieżności. Powstaje pytanie: czy jest też ciągła w końcu, jeśli jest w nim określona. Odpowiedź na to pytanie znana jest jako

Twierdzenie 18.5 (Abela o ciągłości szeregu potęgowego w końcu przedziału zbieżności) ♣

♣ Zdecydowanie poza programem dla chemików, zwłaszcza dowód, który podajemy jedynie dla kompletności wykładu

Jeśli szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n p^n$ jest zbieżny, $|p| = r$ i r jest promieniem zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, to funkcja, która przypisuje liczbie x liczbę $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n r^n$, określona co najmniej na przedziale domkniętym o końcach 0 i p, jest ciągła w punkcie p.

Dowód. Załóżmy, że $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = p$. Dla dostatecznie dużych k liczba x_k znajduje się w przedziale o końcach 0 i p, zatem $|x_k| \leq |p| = r$. Niech $t_k = \frac{x_k}{p}$, czyli $x_k = t_k p$. Ponieważ $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} p$, więc $t_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$. Stąd wynika, że dla dostatecznie dużych k zachodzi nierówność $0 \leq t_k \leq 1$. Niech $b_n = a_n p^n$. Mamy więc $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_k^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n t_k^n$ i $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n p^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$. Niech $s_n = b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_n$. Bez straty ogólności rozważań możemy założyć, że $x_k \neq p$, czyli $t_k < 1$. Wtedy

$$b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots = s_0 + (s_1 - s_0)t + (s_2 - s_1)t^2 + \ldots =$$
$$= s_0 + s_1 t + s_2 t^2 + \ldots - \big(s_0 t + s_1 t^2 + \ldots\big) =$$
$$= s_0(1-t) + s_1(t - t^2) + s_2(t^2 - t^3) + \ldots = (1-t)\big(s_0 + s_1 t + s_2 t^2 + \ldots\big).$$

Te przekształcenia można wykonać, bo szereg $\sum s_n t^n$ jest zbieżny dla $0 \leqslant t < 1$, bowiem ciąg (s_n) jest zbieżny do granicy skończonej, zatem jest ograniczony. Z tego wynika, że szereg $\sum s_n t^{n+1}$ też jest zbieżny. Oznaczmy $s = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$. Niech ε będzie dowolną liczba dodatnią. Istnieje wtedy taka liczba naturalna n_ε, że dla każdej liczby naturalnej $k > n_\varepsilon$ zachodzi nierówność $|s_k - s| < \frac{\varepsilon}{2}$. Wybierzmy jakąkolwiek liczbę $m > n_\varepsilon$, np. $m = n_\varepsilon + 1$. Niech $0 < t < 1$. Mamy wtedy:

$$\big|\, b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots - s \big| = \big|(1-t)\big(s_0 + s_1 t + s_2 t^2 + \ldots\big) - s(1-t)\big(1 + t + t^2 + \ldots\big)\,\big| =$$
$$= (1-t)\big|(s_0 - s) + (s_1 - s)t + (s_2 - s)t^2 + \ldots\,\big| \leq$$
$$\leq (1-t)\big(|s_0 - s| + |s_1 - s|t + |s_2 - s|t^2 + \ldots + |s_{m-1} - s|t^{m-1}\big) +$$
$$+ (1-t)\big(|s_m - s|t^m + |s_{m+1} - s|t^{m+1} + \ldots\big) <$$
$$< (1-t)\big(|s_0 - s| + |s_1 - s|t + |s_2 - s|t^2 + \ldots + |s_{m-1} - s|t^{m-1}\big) +$$
$$+ \tfrac{\varepsilon}{2}(1-t)(t^m + t^{m+1} + \ldots) =$$
$$= (1-t)\big(|s_0 - s| + |s_1 - s|t + |s_2 - s|t^2 + \ldots + |s_{m-1} - s|t^{k-1}\big) + \tfrac{\varepsilon}{2}t^m <$$
$$< (1-t)\big(|s_0 - s| + |s_1 - s|t + |s_2 - s|t^2 + \ldots + |s_{m-1} - s|t^{m-1}\big) + \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Dotychczas t było dowolną liczbą z przedziału $(0,1)$. Nas interesuje granica przy $t \to 1^-$. Niech

$$B = 1 + |s_0 - s| + |s_1 - s| + |s_2 - s| + \cdots + |s_{m-1} - s| >$$
$$> |s_0 - s| + |s_1 - s|t + |s_2 - s|t^2 + \cdots + |s_{m-1} - s|t^{m-1}.$$

Jeśli $0 < 1-t < \frac{\varepsilon}{2B}$, to $\left|b_0+b_1t+b_2t^2+\ldots-s\right| < \dfrac{\varepsilon}{2B}\cdot B+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. Wobec tego dla dostatecznie dużych k zachodzi nierówność $\left|b_0+b_1t_k+b_2t_k^2+\ldots-s\right|<\varepsilon$. Stąd i z definicji granicy wynika, że

$$a_0+a_1x_k+a_2x_k^2+\ldots=b_0+b_1t_k+b_2t_k^2+\ldots\xrightarrow[k\to\infty]{} s=\sum_{n=0}^{\infty}b_n=\sum_{n=0}^{\infty}a_np^n\,.$$

Dowód został zakończony. ■

Teraz pokażemy jak można niektóre funkcje przedstawić jako sumy szeregów potęgowych. Zaczniemy od logarytmu naturalnego. Udowodnimy mianowicie, że

Przykład 18.1 Wykażemy, że

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\tfrac{1}{n}\,x^n=x-\tfrac12x^2+\tfrac13x^3-\tfrac14x^4+\ldots$$

dla każdej liczby $x\in(-1,1]$. Jeśli $|x|<1$, to

$$(\ln(1+x))'=\tfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots=\left(x-\tfrac12x^2+\tfrac13x^3-\tfrac14x^4+\ldots\right)'=$$
$$=\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\tfrac{1}{n}\,x^n\right)',$$

zatem pochodna funkcji $\ln(1+x)-\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\,x^n$, określonej i ciągłej na przedziale $(-1,1]$ i różniczkowalnej w jego punktach wewnętrznych jest równa 0. Stąd wynika, że funkcja $\ln(1+x)-\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\,x^n$ jest stała na przedziale domknięto–otwartym $(-1,1]$. Wobec tego dla każdej liczby $x\in(-1,1]$ zachodzi równość

$$\ln(1+x)-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\,x^n=\ln(1+0)-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\,0^n=0\,.$$

Przedstawiliśmy więc funkcję $\ln(1+x)$ w postaci sumy szeregu potęgowego o środku w punkcie 0. Z tego wzoru wynika, że jeśli $x_0>0$ i $0<x\leqslant 2x_0$, to

$$\ln x=\ln\left(x_0\left(1+\tfrac{x-x_0}{x_0}\right)\right)=\ln x_0+\ln\left(1+\tfrac{x-x_0}{x_0}\right)=\ln x_0+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\tfrac{1}{n}\left(\tfrac{x-x_0}{x_0}\right)^n.$$

Podstawimy $x=1$ w równości $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\,x^n$. Rezultat to

$$\ln 2 = \ln(1+1) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\tfrac{1}{n} = 1 - \tfrac12 + \tfrac13 - \tfrac14 + \ldots =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(1 - \tfrac12 + \tfrac13 - \tfrac14 + \ldots + (-1)^{n-1}\tfrac1n\right).$$

Znaleźliśmy więc granicę ciągu, którego zbieżność stwierdziliśmy już dawno. Przykład ten świadczy, że innym problemem jest wykazanie zbieżności szeregu, a innym znalezienie jego sumy. Dodajmy jeszcze, że szereg ten jest wolno zbieżny i nie warto przybliżać liczby $\ln 2$ jego sumami częściowymi. Można natomiast np. zauważyć, że

$$\ln 2 = -\ln\frac12 = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac1n\left(-\frac12\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac1n\left(\frac12\right)^n .$$

W tym przypadku błąd jaki popełniamy przybliżając liczbę $\ln 2$ sumą $\sum\limits_{n=1}^{k}\frac1n\left(\frac12\right)^n$ jest równy $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty}\frac1n\left(\frac12\right)^n = \frac{1}{(k+1)2^{k+1}} + \frac{1}{(k+2)2^{k+2}} + \frac{1}{(k+3)2^{k+3}} + \cdots$, więc jest mniejszy niż suma

$$\tfrac{1}{(k+1)2^{k+1}} + \tfrac{1}{(k+1)2^{k+2}} + \tfrac{1}{(k+1)2^{k+3}} + \cdots = \tfrac{1}{(k+1)2^{k+1}}\tfrac{1}{1-\frac12} = \tfrac{1}{(k+1)2^k}.$$

W przypadku szeregu anharmonicznego $1 - \frac12 + \frac13 - \frac14 + \cdots$ wartość bezwzględna błędu, który popełniamy zastępując liczbę $\ln 2$ sumą $\sum\limits_{n=1}^{k}(-1)^{n-1}\frac1n$ jest równa

$$\tfrac{1}{k+1} - \tfrac{1}{k+2} + \tfrac{1}{k+3} - \tfrac{1}{k+4} + \cdots = \tfrac{1}{(k+1)(k+2)} + \tfrac{1}{(k+3)(k+4)} + \cdots >$$
$$> \tfrac12\left(\tfrac{1}{(k+1)(k+2)} + \tfrac{1}{(k+2)(k+3)} + \tfrac{1}{(k+3)(k+4)} + \tfrac{1}{(k+4)(k+5)} + \cdots\right) =$$
$$= \tfrac12\left(\tfrac{1}{k+1} - \tfrac{1}{k+2} + \tfrac{1}{k+2} - \tfrac{1}{k+3} + \tfrac{1}{k+3} - \tfrac{1}{k+4} + \tfrac{1}{k+4} - \tfrac{1}{k+5} + \cdots\right) = \tfrac{1}{2(k+1)}.$$

Jeśli przyjmiemy $k=4$, to w pierwszym przypadku błąd będzie *mniejszy* niż $\frac{1}{80}$, a w drugim — *większy* niż $\frac{1}{10}$. Dla $k=9$ w pierwszym przypadku błąd jest *mniejszy* od $\frac{1}{5120}$, a w drugim — *większy* niż $\frac{1}{20}$. Jasne jest więc, że chcąc przybliżyć liczbę $\ln 2$ należy użyć sum częściowych szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac1n\left(\frac12\right)^n$, a nie szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac1n$. ■

Przykład 18.2 Teraz zajmiemy się funkcją arctg. Mamy $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$. Wobec tego dla $x \in (-1,1)$ zachodzi równość

$$(\operatorname{arctg} x)' = \tfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \left(x - \tfrac{x^3}{3} + \tfrac{x^5}{5} - \tfrac{x^7}{7} + \cdots\right)'.$$

Jasne jest, że szereg $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ jest zbieżny dla $x = \pm 1$.

Wobec tego jego przedziałem zbieżności jest $[-1,1]$ — szereg potęgowy jest *wewnątrz* przedziału zbieżności zbieżny. Wykazaliśmy więc, że funkcja

$$\operatorname{arctg} x - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \tfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

jest ciągła na przedziale $[-1,1]$ oraz że jej pochodna jest równa 0 w punktach wewnętrznych tego przedziału. Stąd wynika, że ta funkcja jest stała na przedziale $[-1,1]$. Wobec tego dla każdej liczby $x \in [-1,1]$ zachodzi równość:

$$\operatorname{arctg} x - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \operatorname{arctg} 0 - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{0^{2n+1}}{2n+1} = 0 .$$

Stąd wynika, że dla każdej liczby $x \in [-1,1]$ zachodzi równość:

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} .$$

Podobnie jak w poprzednim przykładzie tak i tu możemy uzyskać konkretne rezultaty. Np. podstawiając $x = 1$ do otrzymanego wzoru otrzymujemy

$$\tfrac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1}$$

— ta równość nazywana jest zwykle wzorem Leibniza. Można wykazać, że jeśli chcielibyśmy za pomocą tego wzoru znajdować przybliżenia dziesiętne liczby π, to musielibyśmy wykonać wiele obliczeń, co nawet w przypadku komputerów ma istotne znaczenie – konkretnie: dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność podwójna $\frac{1}{4(n+1)} < \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+5} - \frac{1}{2n+7} + \cdots < \frac{1}{4n}$ (nie jest ona oczywista!), więc błąd popełniany przy zastępowaniu liczby $\frac{\pi}{4}$ liczbą $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}$ jest zawarty między $\frac{1}{4(n+1)}$ oraz $\frac{1}{4n}$. Stosując wzór z lepiej dobranym x otrzymać można bez trudu szeregi ,,szybciej" zbieżne.* ■

Przykład 18.3 Wykażemy teraz, że $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Wykazaliśmy poprzednio, że dla każdej liczby rzeczywistej $x > 0$ zachodzi nierówność podwójna $x - \frac{x^3}{3!} < \sin x < x$. Teraz wykażemy, że $\sin x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$. Przyjmijmy, że $f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \sin x$. Mamy $f'(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cos x$ i wobec tego możemy napisać, że $(f')'(x) = -x + \frac{x^3}{3!} + \sin x$. Z przypomnianej nierówności wynika, że dla każdej liczby $x > 0$ zachodzi $(f')'(x) > 0$, a stąd wynika, że funkcja f' jest ściśle rosnąca na półprostej $[0, +\infty)$. Ponieważ $f'(0) = 0$, więc jeśli $x > 0$, to

* Można o tym przeczytać np. w rachunku różniczkowym i całkowym G.M.Fichtenholza, t.2, rozdział XI, \$ 8, punkt 410, książce wielokrotnie wznawianej przez PWN.

$f'(x) > f'(0) = 0$. Stąd wynika, że funkcja f jest ściśle rosnąca na półprostej $[0,+\infty)$ i wobec tego jeśli $x > 0$, to $f(x) > f(0) = 0$, czyli $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} > \sin x$, a to właśnie chcieliśmy wykazać. Rozumując w taki sam sposób wnioskujemy, że dla $x > 0$ zachodzi nierówność $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} < \sin x$ — obliczamy pochodną różnicy prawej i lewej strony tej nierówności, potem jej pochodną tej pochodnej, w wyniku otrzymujemy funkcję dodatnią na półprostej $(-\infty, 0)$ itd. Powtarzając to rozumowanie, czyli stosując indukcję zupełną, dochodzimy do wniosku, że dla każdej liczby rzeczywistej $x > 0$ i każdej całkowitej liczby nieujemnej n zachodzi nierówność podwójna:
$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{2n-1}\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!} < \sin x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{2n}\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}$
Różnica skrajnych sum równa jest $\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}$. Mamy też $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} = 0$ — można zauważyć, że jeśli $n > x > 0$, to $\frac{x}{4n+1} < \frac{x}{4n} < \frac{1}{4}$, a stąd wynika, że dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność $\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} < \frac{1}{16} \cdot \frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!}$.
Niech $s_{4n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}$, $s_{4n-1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!}$.
Z tego że $s_{4n-1} < \sin x < s_{4n+1}$ i $\lim\limits_{n\to\infty}(s_{4n+1} - s_{4n-1}) = 0$ wynika oczywiście, że $\lim\limits_{n\to\infty} s_{4n-1} = \sin x = \lim\limits_{n\to\infty} s_{4n+1}$. Oznacza to, że $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x$, czyli że $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$. Na razie wiemy, że równość ta ma miejsce dla $x > 0$, ale w rzeczywistości jest tak dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$, bo obie strony, lewa i prawa, są funkcjami nieparzystymi zmiennej x. Wykazaliśmy więc, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{18.1}$$

,,Po drodze" wykazaliśmy też, że skończona suma $\sum\limits_{n=0}^{k}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ przybliża sumę nieskończoną z błędem mniejszym niż $\frac{|x|^{2(k+1)+1}}{(2(k+1)+1)!}$. Wynika stąd np. że jeśli x jest miarą kąta ostrego, czyli $0 < x < \frac{\pi}{2} < \frac{3{,}16}{2} = 1{,}58$, to różnica między liczbami $x - \frac{x^3}{3!}$ i $\sin x$ jest mniejsza niż $\frac{x^5}{5!} < \frac{1{,}58^5}{5!} < \frac{10}{120} < 0{,}1$. Zwiększenie liczby składników o 1, tj. przybliżanie liczby $\sin x$ liczbą $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ powoduje zmniejszenie błędu do wartości mniejszej niż $\frac{x^7}{7!} < \frac{1{,}58^7}{7!} < 0{,}005 = \frac{1}{200}$. Widzimy więc, że możemy w miarę dokładnie znajdować wartości liczbowe sinusów stosunkowo niewielkim kosztem, przy czym można dokładność istotnie zwiększyć zwiększając liczbę składników nieznacznie. Oczywiście tego typu oszacowania są przydatne nie tylko do rachowania, ale również w przypadku rozważań teoretycznych. Zwróćmy jeszcze uwagę na to, że jeśli interesujemy się liczbami x bliskimi 0, to w wyniku zmniejszenia $|x|$ nie tylko błąd maleje, ale również błąd względny zmniejsza się. ■

Przykład 18.4 Z wzoru $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ wynika natychmiast, że

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \tag{18.2}$$

– po prostu obliczamy pochodne obu stron wzoru (18.1) , co wolno zrobić dzięki twierdzeniu o pochodnej szeregu potęgowego. ■

Przykład 18.5 Zajmiemy się teraz dwumianem Newtona. Nie chodzi przy tym o wzór na obliczanie n-tej potęgi sumy dwu liczb, bo ten był z pewnością znany przed Newtonem, na pewno znał go Pascal, a prawdopodobnie (wg. N. Bourbaki, *Elementy historii matematyki*, PWN, Warszawa, 1980) był znany Arabom w wieku XIII, a Chińczykom w wieku XIV. Nam chodzi teraz o wzór na $(1+x)^a$, gdzie wykładnik a nie musi być liczbą naturalną — może być dowolną liczbą rzeczywistą, liczba x zaś w przypadku dowolnego wykładniki nie może być dowolna, musi mieć wartość bezwzględną mniejszą niż 1.

Rozpoczniemy od zdefiniowania *symbolu Newtona*. Jeśli $a \in \mathbb{R}$ i $n \in \{1, 2, \ldots\}$, to przyjmujemy, że

$$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)}{n!} = \frac{a}{1} \cdot \frac{a-1}{2} \cdot \frac{a-2}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{a-n+1}{n}.$$

Dodatkowo definiujemy $\binom{a}{0} = 1$ dla każdej liczby rzeczywistej a. Z definicji tej wynika natychmiast, że jeśli a jest liczbą naturalną nie mniejszą niż n, to $\binom{a}{n} = \frac{a!}{n!(a-n)!}$. Oznacza to, że nasza definicja jest po prostu rozszerzeniem definicji znanej ze szkoły. Przy okazji wypada stwierdzić, że jeżeli a jest liczbą naturalną *mniejszą* niż n, to $\binom{a}{n} = 0$, bowiem w tym przypadku w liczniku ułamka definiującego symbol Newtona występuje liczba $a - a = 0$.

Z definicji symbolu Newtona i tego, że $1 + \frac{a-n}{n+1} = \frac{a+1}{n+1}$ wynika od razu, że

$$\binom{a}{n} = \frac{a}{n} \cdot \binom{a-1}{n-1} \qquad \text{oraz} \qquad \binom{a}{n} + \binom{a}{n+1} = \binom{a+1}{n+1}. \tag{18.3}$$

Wykażemy teraz, że jeśli $|x|<1$, to dla każdej liczby rzeczywistej a zachodzi wzór Newtona:

$$(1+x)^a = \binom{a}{0} + \binom{a}{1}x + \binom{a}{2}x^2 + \binom{a}{3}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n\,. \qquad (18.4.)$$

Rozpoczniemy od znalezienia promienia zbieżności szeregu potęgowego występującego po prawej stronie równości (18.4). Znów posłużymy się szeregiem geometrycznym dla wykazania, że promień zbieżności nie jest mniejszy od 1. Obliczamy granicę ilorazu kolejnych wyrazów szeregu zakładając, że a *nie* jest liczbą naturalną:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\binom{a}{n+1}x^{n+1}}{\binom{a}{n}x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(a-n)x}{n+1}\right| = |x|\,.$$

Stąd wnioskujemy, że w przypadku $|x|<1$ szereg jest zbieżny, bo dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność $\left|\frac{\binom{a}{n+1}x^{n+1}}{\binom{a}{n}x^n}\right| < \frac{1+|x|}{1} < 1$, więc można skorzystać z warunku Cauchy'ego* i ze zbieżności szeregu geometrycznego o ilorazie $\frac{1+|x|}{2}<1$.

♠ Obliczymy pochodną ilorazu $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n\right)\Big/(1+x)^a$. Mamy

$$\left(\left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n\right)(1+x)^{-a}\right)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty}n\binom{a}{n}x^{n-1}\right)\cdot(1+x)^{-a} - a(1+x)^{-a-1}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n =$$

$$= a\,(1+x)^{-a-1}\left((1+x)\sum_{n=1}^{\infty}\binom{a-1}{n-1}x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n\right) =$$

$$= a(1+x)^{-a-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\binom{a-1}{n-1}x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\binom{a-1}{n-1}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n\right) =$$

$$= a(1+x)^{-a-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a-1}{n}x^n + \sum_{n=1}^{\infty}\binom{a-1}{n-1}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n\right) =$$

$$= a(1+x)^{-a-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\binom{a-1}{n}x^n + \sum_{n=1}^{\infty}\binom{a-1}{n-1}x^n - \sum_{n=1}^{\infty}\binom{a}{n}x^n\right) =$$

$$= a(1+x)^{-a-1}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\binom{a-1}{n} + \binom{a-1}{n-1} - \binom{a}{n}\right)x^n = a(1+x)^{-a-1}\sum_{n=1}^{\infty}0\cdot x^n = 0\,.$$

Wykazaliśmy, więc że pochodna ilorazu równa jest 0 w każdym punkcie przedziału $(-1,1)$. Stąd wynika, że na tym przedziale ten iloraz jest funkcją stałą, więc jego wartość w każdym punkcie x jest taka sama jak wartość w punkcie 0, a w tym

* Jak w dowodzie lematu o zbieżności szeregu potęgowego.

♠ W przypadku $|x|>1$ szereg jest rozbieżny, bowiem jego wyraz nie dąży do 0 przy $n\longrightarrow\infty$.

punkcie wartość tego ilorazu jest równa $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}0^n\right)\Big/(1+0)^a = \binom{a}{0}\big/(1+0)^a = 1$.

Wykazaliśmy więc, że dla każdego $x \in (-1,1)$ zachodzi równość

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n\,,$$

czyli zrealizowaliśmy nasz plan.

Zauważmy jeszcze, że dla $a=-1$ otrzymaliśmy wzór $\frac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{-1}{n}x^n$. Czytelnik bez trudu stwierdzi, że $\binom{-1}{n} = \frac{(-1)(-2)\ldots(-n)}{n!} = (-1)^n$, zatem otrzymaną równość możemy zapisać jako $\frac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-x)^n$. Widzimy więc, że wzór (18.4) możemy potraktować nie tylko jako uogólnienie wzoru dwumianowego pozwalającego na zapisywanie w postaci sumy skończonej potęgi o wykładniku naturalnym sumy dwóch składników, ale również jako uogólnienie wzoru na sumę nieskończonego ciągu geometrycznego (o ilorazie $-x$). ■

Przykład 18.6 Zastosujemy wzór Newtona do wyrażenia $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}$. Otrzymujemy $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = =1 + \binom{-1/2}{1}\cdot(-x^2) + \binom{-1/2}{2}\cdot(-x^2)^2 + \binom{-1/2}{3}\cdot(-x^2)^3 + \ldots$. Mamy też

$$\binom{-1/2}{n}\cdot(-x^2)^n = \frac{(-1/2)\cdot(-3/2)\cdot(-5/2)\cdot\ldots\cdot\big(-(2n-1)/2\big)}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n}\cdot(-x^2)^n =$$

$$= \frac{(1/2)\cdot(3/2)\cdot(5/2)\cdot\ldots\cdot\big((2n-1)/2\big)}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n}\cdot(x^2)^n = \frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)}\cdot x^{2n}\,.$$

Stąd wynika, że $\binom{-1/2}{n}\cdot(-x^2)^n = \left(\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)}\cdot x^{2n+1}\right)'$. Konsekwencją tej równości, twierdzenia o różniczkowaniu szeregu potęgowego, równości $\arcsin 0 = 0$ oraz wzoru $(\arcsin x)' = =\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ jest równość

$$\arcsin x = x + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot x^3 + \frac{1}{5}\cdot\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot x^5 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n}\cdot x^{2n+1}\,,$$

która zachodzi dla $x\in(-1,1)$, bo dla tych x prawa strona jest szeregiem zbieżnym — wynika to łatwo z tego, że iloraz dwóch kolejnych wyrazów ma granicę $x^2<1$. Trochę trudniejszy dowód zbieżności tego szeregu dla $x=\pm1$ opuszczamy. Ponieważ dla $x\notin[-1,1]$ granica ilorazu dwóch kolejnych wyrazów rozpatrywanego szeregu jest większa niż 1, więc w tym przypadku szereg jest rozbieżny. Stąd wynika, że równość w rzeczywistości zachodzi dla wszystkich $x\in[-1,1]$ i żadnych innych. Możemy więc zastosować ją w przypadku $x=\frac{1}{2}$. Mamy więc

$$\tfrac{\pi}{6} = \arcsin\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^5 + \cdots.$$

Jest oczywiste, że przybliżając liczbę $\frac{\pi}{6}$ liczbą $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{5}\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5$ popełniamy błąd mniejszy niż suma szeregu geometrycznego, którego pierwszym wyrazem jest $\frac{1}{7}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^7$, a ilorazem – liczba $\frac{1}{4}$, czyli $\frac{1}{7}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^7\cdot\frac{4}{3} = \frac{5}{10752} < 0{,}0005$. Ponieważ mamy do czynienia z szeregiem zbieżnym „szybciej ” niż szereg geometryczny o ilorazie $\frac{1}{4}$, więc wydłużenie sumy o jeden składnik spowoduje przynajmniej czterokrotne zmiejszenie się błędu jaki popełniamy zastępując sumę nieskończonego szeregu jego sumą częściową. Nie jest to rezultat rewelacyjny, ale jednak znacznie lepszy niż w przypadku szeregu Leibniza $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$. ■

Pokazaliśmy rozwinięcia kilku najważniejszych funkcji. Wiadomo jak wyglądają szeregi, których sumami są inne funkcje, np. tangens. Jednak nie wszystkie rozwinięcia można uzyskać równie prosto, jak te które omówiliśmy wcześniej. Nie będziemy wgłębiać się w tę tematykę. Pokażemy jeszcze jak z już poznanych rozwinięć można otrzymywać inne.

Przykład 18.7 Znajdziemy teraz rozwinięcie funkcji $\frac{x}{x^2+5x+6}$ w szereg potęgowy o środku w punkcie 0, a następnie w szereg potęgowy o środku w punkcie 5, czyli zamiast x^n wystąpi w rozwinięciu wyrażenie $(x-5)^n$. Mamy

$$\frac{x}{x^2+5x+6} = \frac{x}{(x+2)(x+3)} = \frac{3}{x+3} - \frac{2}{x+2} = \frac{1}{1-(-\frac{x}{3})} - \frac{1}{1-(-\frac{x}{2})} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\tfrac{x}{3}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\tfrac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(-\tfrac{1}{3}\right)^n - \left(-\tfrac{1}{2}\right)^n\right)x^n$$

— to pierwsze z obiecanych rozwinięć.

Niech teraz $u = x - 5$. Wtedy

$$\frac{x}{x^2+5x+6} = \frac{u+5}{(u+5)^2+5(u+5)+6} = \frac{u+5}{(u+7)(u+8)} = \frac{3}{u+8} - \frac{2}{u+7} = \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{u}{8}\right)} - \frac{2}{7}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{u}{7}\right)} =$$

$$= \tfrac{3}{8}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\tfrac{u}{8}\right)^n - \tfrac{2}{7}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\tfrac{u}{7}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\tfrac{3}{8}\left(-\tfrac{1}{8}\right)^n - \tfrac{2}{7}\left(-\tfrac{1}{7}\right)^n\right)(x-5)^n.$$

Otrzymaliśmy drugie z obiecanych rozwinięć. Wzór jest poprawny dla $x \in \left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$. W obu przypadkach wyprowadzenie sprowadzało się do użycia wzoru na sumę szeregu geometrycznego. ■

Przykład 18.8 Znajdziemy rozwinięcie funkcji $\cos^2 x$ wokół punktu 0. Mamy

$$\cos^2 x = \tfrac{1}{2}\left(1+\cos 2x\right) = \tfrac{1}{2}\left(2 - \tfrac{1}{2!}(2x)^2 + \tfrac{1}{4!}(2x)^4 - \tfrac{1}{6!}(2x)^6 + \cdots\right) =$$

$$= 1 - \tfrac{2}{2!}x^2 + \tfrac{2^3}{4!}x^4 - \tfrac{2^5}{6!}x^6 + \cdots.$$

Ten wzór zachodzi dla wszystkich x rzeczywistych, bowiem w takim zakresie działa wzór, z którego skorzystaliśmy przy wyprowadzeniu: $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$. ■

Przykład 18.9 Z twierdzenia o wzroście wykładniczym można np. wywnioskować łatwo znany nam już wzór $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Można po prostu sprawdzić, że szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ jest zbieżny dla wszystkich liczb rzeczywistych x :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}/(n+1)!}{|x|^n/n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1\,,$$

więc szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ jest zbieżny dla każdego $x \neq 0$, argument jak w dowodzie lematu o zbieżności szeregu potęgowego. Teraz oznaczymy sumę tego szeregu przez $f(x)$ i sprawdzimy, że wtedy $f'(x) = f(x)$ (prościutki rachunek) i wobec tego $f(x) = Ce^x$ dla pewnej liczby rzeczywistej C i wszystkich liczb rzeczywistych x . Pozostaje znaleźć stałą C . Mamy $1 = f(0) = Ce^0 = C$. ■

Przykład 18.10 Pokażemy jeszcze jedno uzasadnienie wzorów (jednoczesne)

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \text{oraz} \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}\,.$$

Jeśli $x \neq 0$, to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{2n+3}/(2n+3)!}{|x|^{2n+1}/(2n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)} = 0 < 1\,,$$

więc szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ jest zbieżny dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 0$. Drugi szereg również jest zbieżny bezwzględnie, co można uzasadnić w taki sam sposób lub zauważyć, że zachodzi wzór $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}\right)' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$, ten szereg ostatni jest zbieżny jako pochodna szeregu potęgowego! Mamy też

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} x^{2n-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}\,, \quad (\cos x)' = -\sin x\,.$$

Niech

$$f(x) = \sin x - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \ \text{ i } \ g(x) = \cos x - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}\,,$$

więc $f'(x) = g(x)$ oraz $g'(x) = -f(x)$ dla każdej liczby rzeczywistej x . Stąd wynika, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$\big(f(x)^2 + g(x)^2\big)' = 2f(x)f'(x) + 2g(x)g'(x) = 2f(x)g(x) + 2g(x)(-f(x)) = 0\,,$$

zatem funkcja $f(x)^2 + g(x)^2$ jest stała, więc dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość

$$f(x)^2+g(x)^2=f(0)^2+g(0)^2=0\,,$$

a to oznacza, że wzory $f(x)=0$ i $g(x)=0$ zachodzą dla każdej liczby rzeczywistej x. Właśnie to chcieliśmy wykazać. ■

Metoda, którą przedstawiliśmy polegała na znalezieniu związku między funkcją i jej pochodną, następnie wykazaniu, że funkcji, dla których ma miejsce uzyskana zależność jest niewiele (tu korzystaliśmy z tego, że funkcja o zerowej pochodnej jest stała na przedziale). Więcej opowiemy o takich zagadnieniach w drugim semestrze, gdy zajmiemy się tzw. *równaniami różniczkowymi.*

Zadania

18.01 Znaleźć taki szereg postaci $\sum a_nx^n$, że $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ w pewnym otoczeniu punktu 0, jeśli $f(x)=$

1. $(1+x)\ln(1+x)$;
2. $\frac14\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac12\operatorname{arctg}x$;
3. $\operatorname{arctg}\frac{2-2x}{1+4x}$;
4. $\operatorname{arctg}\frac{2x}{2-x^2}$;
5. $\frac{12-5x}{6-5x-x^2}$;
6. $\arccos(1-2x^2)$;
7. $x\operatorname{arctg}x-\ln\sqrt{1+x^2}$;
8. $x\arcsin x-\sqrt{1-x^2}$;
9. $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$;
10. $(1+x)e^{-x}$;
11. $e^x\sin x$;
12. $e^x\cos x$;
13. $\big(\ln(1-x)\big)^2$;
14. $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$;
15. $(1-x)^2\cosh\sqrt{|x|}$;
16. $(1+x)^{-1}\ln(1+x)$;
17. $(\operatorname{arctg}x)^2$;
18. $x^{-2}(\arcsin x)^2$;
19. $\cos^2 x$;
20. $\sin^3 x$;
21. $\frac{x}{\sqrt{1-2x}}$;
22. $\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$;
23. $(1+x+x^2+x^3+x^4)^{-1}$;
24. $(1+x+x^2)^{-1}$;
25. $\sin(3x)\sin(5x)$;
26. $\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

18.02 Przedstawić funkcję $\ln(2+2x+x^2)$ w postaci $\sum a_n(x+1)^n$.

18.03 Przedstawić funkcję $(1-x)^{-1}$ w postaci $\sum a_n\frac{1}{x^n}$.

18.04 Przedstawić funkcję $\ln x$ w postaci $\sum a_n\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^n$.

18.05 Przedstawić funkcję $\frac{x}{\sqrt{1+x}}$ w postaci $\sum a_n\left(\frac{x}{1+x}\right)^n$.

18.06 Zsumować szereg

a. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$;

b. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$;

c. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$;

d. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^n$;

e. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)}x^n$;

f. $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$;

g. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nn^2x^n$;

h. $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$.

18.07 Znaleźć n–tą pochodną w punkcie 0 funkcji

a. e^{x^2} ; b. $\operatorname{arctg}(2x)$.

18.08 Niech $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dla $x\in\mathbb{R}$ i $F(x)=\frac{f(x)}{1-x}$ dla $x<1$. Znaleźć $F^{(n)}(0)$.

18.09 Niech $a_0=a_1=1$ i $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ dla $n=0,1,2,\ldots$. Definiujemy funkcję:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1+x+2x^2+3x^3+5x^4+8x^5+13x^6+\ldots$$

Udowodnić, że $f(x)=\frac{1}{1-x-x^2}$.

Przedstawić funkcję f w postaci sumy szeregu potęgowego o środku w punkcie 0 .

Napisać jawny wzór na a_n .