Wielomiany

Definicja 17.1 (wielomianu)
Wielomianem w nazywamy taką funkcję określoną na $\mathbb{R}$ lub na pewnym przedziale, że istnieją takie liczby $a_0, a_1, \ldots, a_n$, że dla każdej liczby x z dziedziny funkcji w zachodzi równość

$$w(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \,. \ \blacksquare$$

Przypominamy, że zachodzą następujące wzory:
$x^2 - c^2 = (x-c)(x+c)$,
$x^3 - c^3 = (x-c)(x^2 + xc + c^2)$,
$x^4 - c^4 = (x-c)(x^3 + x^2c + xc^2 + c^3)$,
$x^5 - c^5 = (x-c)(x^4 + x^3c + x^2c^2 + xc^3 + c^4)$,
$x^6 - c^6 = (x-c)(x^5 + x^4c + x^3c^2 + x^2c^3 + xc^4 + c^5)$,
....
$x^n - c^n = (x-c)(x^{n-1} + x^{n-2}c + x^{n-3}c^2 + \ldots + xc^{n-2} + c^{n-1})$,
których prawdziwość można sprawdzić wymnażając wyrażenia znajdujące się po prawych stronach równości.

Wynika stąd, że jeśli dla pewnego wielomianu w i pewnej liczby c zachodzi równość $w(c) = 0$, to $w(x) = w(x) - w(c) =$

$$= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n - (a_0 + a_1c + a_2c^2 + \cdots + a_{n-1}c^{n-1} + a_nc^n) =$$
$$= a_1(x-c) + a_2(x^2 - c^2) + \ldots + a_{n-1}(x^{n-1} - x^{n-1}) + a_n(x^n - c^n) =$$
$$= (x-c)\big(a_1 + a_2(x+c) + \ldots + a_{n-1}(x^{n-2} + x^{n-3}c + \ldots + c^{n-2}) +$$
$$+ a_n(x^{n-1} + x^{n-2}c + \ldots + c^{n-1})\big) =$$
$$= (x-c)\big((a_1 + a_2c + \ldots + a_{n-1}c^{n-2} + a_nc^{n-1}) + (a_2 + \ldots + a_{n-1}c^{n-3} + a_nc^{n-2})x + \ldots +$$
$$+ (a_{n-1} + a_nc)x^{n-2} + a_nx^{n-1}\big) =$$
$$= (x-c)(\alpha_0 + \alpha_1x + \ldots + \alpha_{n-2}x^{n-1} + \alpha_{n-1}x^{n-1}),$$

gdzie $\alpha_0 = a_1 + a_2c + \ldots + a_{n-1}c^{n-2} + a_nc^{n-1}$, $\alpha_1 = a_2 + \ldots + a_{n-1}c^{n-3} + a_nc^{n-2}$, $\alpha_{n-2} = a_{n-1} + a_nc$, $\alpha_{n-1} = a_n$.

Udowodniliśmy zatem

Twierdzenie 17.2
Jeśli dla pewnego wielomianu w, $w(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ i pewnej liczby c zachodzi równość $w(c) = 0$, to istnieje taki wielomian v postaci $\alpha_0 + \alpha_1x + \ldots + \alpha_{n-2}x^{n-1} + \alpha_{n-1}x^{n-1}$, że dla każdego x zachodzi równość

$$w(x) = (x-c)v(x) \,. \ \blacksquare$$

Z tego twierdzenia wynika natychmiast

Twierdzenie 17.3
Jeśli dla pewnego wielomianu w, $w(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ istnieje n różnych liczb $c_1, c_2, \ldots, c_n$, dla których

$$w(c_1) = 0\,,\ w(c_2) = 0, \ldots, w(c_n) = 0\,,$$

to $w(x) = a_n \cdot (x - c_1) \cdot (x - c_2) \cdot \ldots \cdot (x - c_n)$.

Z tego twierdzenia z kolei wynika łatwo następujące

Twierdzenie 17.4
Jeśli dla pewnego wielomianu w, $w(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$, istnieje $n+1$ różnych liczb $c_1, c_2, \ldots, c_n, c_{n+1}$, dla których

$$w(c_1) = 0\,,\ w(c_2) = 0, \ldots, w(c_n) = 0\,,\ w(c_{n+1}) = 0\,,$$

to $0 = a_n = a_{n-1} = a_{n-2} = \ldots = a_0$.

Dowód. Z poprzedniego twierdzenia wynika natychmiast, że

$$0 = w(c_{n+1}) = a_n \cdot (c_{n+1} - c_1) \cdot (c_{n+1} - c_2) \cdot \ldots \cdot (c_{n+1} - c_n)\,,$$

zatem $a_n = 0$. Wobec tego

$$w(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} = a_{n-1}(x - c_1) \cdot (x - c_2) \cdot \ldots \cdot (x - c_{n-1})\,,$$

więc $0 = w(c_n) = a_{n-1}(c_n - c_1) \cdot (c_n - c_2) \cdot \ldots \cdot (c_n - c_{n-1})$, zatem $a_{n-1} = 0$. Kontynuując otrzymujemy tezę. ■

Twierdzenie 17.5 (o jednoznaczności współczynników wielomianu)
Jeśli równość $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$ zachodzi dla nieskończenie wielu liczb x, to $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $\ldots$ (przyjmujemy tu, że $0 = a_{m+1} = a_{m+2} = \ldots$, $0 = b_{n+1} = b_{n+2} = \ldots$).

Dowód. Przenosimy wszystko na jedną stronę równości i z poprzedniego twierdzenia otrzymujemy $a_0 - b_0 = 0$, $a_1 - b_1 = 0$, $\ldots$ ■

Uwaga 17.6 W rzeczywistości wystarczy założyć, że równość

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$$

zachodzi dla k różnych liczb x przy czym $k > m$ i $k > n$. ■

Uwaga 17.7 Jeśli założymy, że równość

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$$

zachodzi dla wszystkich x z pewnego przedziału, to można twierdzenie o jednoznaczności współczynnków wielomianu wywnioskować z równości

$$(a_0 + a_1x + \ldots + a_mx^m)^{(m)} = m!a_m\,. \ ■$$

Teraz możemy przypomnieć definicję stopnia wielomianu.

Definicja 17.8 (stopnia wielomianu)
Jeśli $n \geq 0$ i $w(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ i $a_n \neq 0$, to mówimy, że w jest wielomianem stopnia n. Stopnia wielomianu zerowego (wszystkie współczynniki są zerami) nie definiujemy, ale przyjmujemy, że ten niezdefiniowany stopień jest mniejszy od każdej liczby całkowitej nieujemnej (często matematycy przyjmują, że stopniem wielomianu zerowego jest $-\infty$). Stopień wielomianu w oznaczamy symbolem $\mathrm{st}(w)$ (albo $\deg(w)$). ■

Definicja 17.9 (pierwiastka wielomianu)
Liczba x_0 nazywana jest pierwiastkiem wielomianu w wtedy i tylko wtedy, gdy $w(x_0) = 0$. ■

Twierdzenie 17.10 (o dzieleniu z resztą)
Dla dowolnych wielomianów w, v, $v \neq 0$ istnieje dokładnie jedna para wielomianów q, r takich, że dla każdego x zachodzi równość

$$w(x) = q(x)v(x) + r(x) \text{ i } \mathrm{st}(r) < \mathrm{st}(v).^*$$

Dowód. Zaczniemy od dowodu istnienia wielomianów q, r. Jeśli $\mathrm{st}(w) < \mathrm{st}(v)$, to przyjmujemy $q = 0$ i $r = w$, równość $w = qv + r$ jest oczywiście spełniona oraz $\mathrm{st}(r) = \mathrm{st}(w) < \mathrm{st}(v)$.

Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich wielomianów w stopnia mniejszego od n i że $\mathrm{st}(w) = n \geq k = \mathrm{st}(v)$. Niech $w(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, $a_n \neq 0$ i niech $v(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_kx^k$, $b_k \neq 0$. Przyjmijmy, że $w_1(x) = w(x) - \frac{a_n}{b_k}x^{n-k}v(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n - \frac{a_n}{b_k}x^{n-k}[b_0 + b_1x + \cdots + b_kx^k] = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} - \frac{a_n}{b_k}x^{n-k}[b_0 + b_1x + \cdots + b_{k-1}x^{k-1}]$. Wtedy $\mathrm{st}(w_1) \leq n-1$. Istnieją więc wielomiany q_1 i r takie, że $w_1(x) = q_1(x)v(x) + r(x)$, przy czym $\mathrm{st}(r) < \mathrm{st}(v)$. Przyjmujemy $q(x) = \frac{a_n}{b_k}x^{n-k} + q_1(x)$. Bez trudu stwierdzamy, że $w(x) = q(x)v(x) + r(x)$, co kończy dowód istnienia wielomianów q i r.

Kolej na jednoznaczność. Załóżmy, że $q(x)v(x) + r(x) = \tilde{q}(x)v(x) + \tilde{r}(x)$. Wtedy $r(x) - \tilde{r}(x) = \tilde{q}(x)v(x) - q(x)v(x) = v(x)[\tilde{q}(x) - q(x)]$. Widzimy więc, że $\mathrm{st}(r - \tilde{r}) = \mathrm{st}(v) + \mathrm{st}(\tilde{q} - q)$, co jest niemożliwe, gdy $\mathrm{st}(\tilde{q} - q) \geq 0$, bo wtedy prawa strona jest większa niż lewa. Wobec tego $\mathrm{st}(\tilde{q} - q) < 0$, więc musi być spełniona równość $\tilde{q} = q$. Wtedy zachodzi równość

* Wielomian q nazywany jest ilorazem, a wielomian r — resztą z dzielenia wielomianu w przez wielomian v.

$$r(x) - \tilde{r}(x) = \tilde{q}(x)v(x) - q(x)v(x) = v(x)[\tilde{q}(x) - q(x)] = v(x) \cdot 0 = 0\,,$$

czyli $r(x) = \tilde{r}(x)$, co kończy dowód jednoznaczności. ■

Twierdzenie 17.11 (Bézout)
Reszta z dzielenia wielomianu w, przez wielomian $x - c$ jest równa $w(c)$.

Dowód. Reszta z dzielenia jakiegokolwiek wielomianu przez wielomian $x - c$ jest wielomianem stopnia mniejszego niż 1, więc albo jest wielomianem zerowym, albo wielomianem stopnia 0. W obu przypadkach jest to liczba (raczej funkcja stała). Niech r oznacza resztę z dzielenia wielomianu w przez wielomian $x - c$. Mamy $w(x) = q(x)(x - c) + r$, w szczególności $w(c) = q(c)(c - c) + r = r$, co kończy dowód. ■

Następne twierdzenie pozwala niejako zgadywać, jakie liczby wymierne są pierwiastkami wielomianów, które mają całkowite współczynniki. Ma ono spore znaczenie praktyczne.

Twierdzenie 17.12 (o wymiernych pierwiastkach niektórych wielomianów)
Jeśli liczby $a_0, a_1, \ldots, a_n, p, q$ są całkowite, $n \geq 1$, p, q są względnie pierwsze (nie mają wspólnego dzielnika większego od 1), liczba $\frac{p}{q}$ jest pierwiastkiem wielomianu $w(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, to liczba p jest dzielnikiem liczby a_0 (wyrazu wolnego wielomianu w) a liczba q jest dzielnikiem liczby a_n (współczynnika kierującego wielomianu w).

Dowód. Ponieważ $0 = w\big(\frac{p}{q}\big) = a_0 + a_1\frac{p}{q} + a_2\big(\frac{p}{q}\big)^2 + \cdots + a_n\big(\frac{p}{q}\big)^n$, więc

$$0 = 0 \cdot q^n = \Big[a_0 + a_1\tfrac{p}{q} + a_2\big(\tfrac{p}{q}\big)^2 + \cdots + a_n\big(\tfrac{p}{q}\big)^n\Big] \cdot q^n =$$
$$= a_0q^n + a_1q^{n-1}p + a_2q^{n-2}p^2 + \cdots + a_{n-2}q^2p^{n-2} + a_{n-1}qp^{n-1} + a_np^n\,.$$

Liczba $a_0q^n + a_1q^{n-1}p + a_2q^{n-2}p^2 + \cdots + a_{n-2}q^2p^{n-2} + a_{n-1}qp^{n-1} = -a_np^n$ jest podzielna przez q. Liczby p, q nie mają wspólnego dzielnika większego niż 1, więc również liczby p i q^n są względnie pierwsze, zatem q jest dzielnikiem a_n.
Liczba $a_1q^{n-1}p + a_2q^{n-2}p^2 + \cdots + a_{n-2}q^2p^{n-2} + a_{n-1}qp^{n-1} + a_np^n = -a_0q^n$ jest podzielna przez p. Ponieważ liczby p, q nie mają wspólnego dzielnika większego od 1, więc liczba p jest dzielnikiem liczby a_0. Dowód został zakończony. ■

Wniosek 17.13
Jeżeli liczby $a_0, a_1, \ldots, a_n$ są całkowite, $n \geq 1$, a liczba całkowita p jest pierwiastkiem wielomianu $w(x) = =a_0 + a_1x + \cdots a_nx^n$, czyli $w(p) = 0$, to jest ona dzielnikiem liczby a_0 (wyrazu wolnego wielomianu w). ■

Z A D A N I A

17.01 Udowodnić, że funkcja w jest wielomianem stopnia nie większego od n wtedy i tylko wtedy, gdy $w^{(n+1)}(x) = 0$ dla każdego x.

17.02 Udowodnić, że wielomian w dzieli się przez wielomian $(x-c)^2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $w(c) = w'(c) = 0$.

17.03 Udowodnić, że wielomian w dzieli się przez wielomian $(x-c)^3$ wtedy i tylko wtedy, gdy $w(c) = w'(c) = w''(c) = 0$.

17.04 Udowodnić, że funkcja $\frac{1}{x^2+1}$ nie jest wielomianem.

17.05 Udowodnić, że funkcja $\frac{1}{x}$ nie jest wielomianem.

17.06 Udowodnić, że funkcja $\sqrt[3]{x}$ nie jest wielomianem.

17.07 Udowodnić, że funkcja $|x|$ nie jest wielomianem.

17.08 Załóżmy, że wielomian $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+x^n$ ma dokładnie n pierwiastków $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Udowodnić, że zachodzą następujące wzory Viète'a:

$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -a_{n-1}$,

$x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_n + x_2x_3 + x_2x_4 + \cdots + x_2x_n + x_{n-1}x_n = a_{n-2}$,

$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_1x_2x_n + x_1x_3x_4 + x_1x_3x_5 + \cdots + x_1x_3x_n + \cdots +$
$+ x_{n-2}x_{n-1}x_n = -a_{n-3}$,

....

$x_1x_2 \ldots x_n = (-1)^n a_{n-1}$.

17.09 Wykazać, że dla każdych trzech punktów (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), które nie leżą na jednej prostej i dla których $x_0 < x_1 < x_2$ istnieje dokładnie jedna trójka liczb a, b, c taka, że $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$, $y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c$, $y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c$. Udowodnić, że wtedy $a \neq 0$.

Oznacza to, że jeśli trzy punkty nie leżą na jednej prostej, przy czym żadne dwa z nich nie leżą na jednej prostej pionowej, to wszystkie trzy leżą na wykresie pewnego wielomianu stopnia drugiego.

17.10 Wykazać, że dla każdych czterech punktów (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), które nie leżą na wykresie wielomianu stopnia mniejszego niż 3 i dla których $x_0 < x_1 < x_2 < x_3$ istnieje dokładnie jedna czwórka liczb a, b, c, d taka, że $y_0 = ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d$, $y_1 = ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d$, $y_2 = ax_2^3 + bx_2^2 + cx_2 + d$, $y_3 = ax_3^3 + bx_3^2 + cx_3 + d$. Udowodnić, że wtedy $a \neq 0$.

Oznacza to, że jeśli cztery punkty nie leżą na wykresie wielomianu stopnia ≤ 2, przy czym żadne dwa z nich nie leżą na jednej prostej pionowej, to wszystkie cztery leżą na wykresie pewnego wielomianu stopnia trzeciego.

17.11 Znaleźć wszystkie takie trójki liczb a, b, c, że liczby $1, 2$ są pierwiastkami wielomianu ax^2+bx+c.

17. 12 Znaleźć wszystkie takie trójki liczb a,b,c, że liczby $-2,2$ są pierwiastkami wielomianu ax^2+bx+c.

17. 13 Znaleźć wszystkie takie pary liczb b,c, że liczby 1 i 2 są wśród pierwiastków wielomianu $2x^4-3x^3+x^2+bx+c$.

17. 14 Rozłożyć na czynniki $(x+13)^7-x^7-13^7$.

17. 15 Rozłożyć na czynniki $x^4(y-z)+y^4(z-x)+z^4(x-y)$.

17. 16 Rozłożyć na czynniki $x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)$.

17. 17 Rozłożyć na czynniki $x(y-z)^3+y(z-x)^3+z(x-y)^3$.

17. 18 Czy liczba 123456789 dzieli: się przez 3, przez 5, przez 7, przez 11, przez 13, przez 17, przez 19?

17. 19 Czy liczba 987654321 dzieli: się przez 3, przez 5, przez 7, przez 11, przez 13, przez 17, przez 19?

17. 20 Czy wielomian $x^{44}+x^{33}+x^{22}+x^{11}+1$ dzieli się: przez wielomian x^5-1, przez wielomian $x^4+x^3+x^2+x+1$?

17. 21 Wyznaczyć liczby $p,q\in\mathbb{R}$ tak, by wielomian x^4+px^2+q był podzielny przez: (i) x^2+5x+6, (ii) x^2+5x+7, (iii) x^2+6x+9.

17. 22 Znaleźć największą wartość wielomianu $x(1-x)$. Wykazać, że istnieje taki wielomian $w(x)$ o współczynnikach całkowitych, że jeśli $0<x<1$, to zachodzi nierówność $0<|w(x)|<\frac{1}{2007}$.

17. 23 Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x,y,z zachodzi nierówność

$$x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz\geq 0$$

i że staje się ona równością wtedy i tylko wtedy, gdy $x=y=z=0$.

17. 24 Rozwiązać równanie $(x^2-16x)^2-2(x^2-16x)-63=0$.

17. 25 Rozwiązać równanie $(x^2+x+1)(x^2+x+2)=12$.

17. 26 Rozwiązać równanie $\frac{x^2+2x+7}{x^2+2x+3}=x^2+2x+4$.

17. 27 Rozwiązać równanie $x(x+1)(x+2)(x+3)=\frac{9}{16}$.

17. 28 Rozwiązać równanie $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)=1680$.

17. 29 Rozwiązać równanie $(8x+7)^2(4x+3)(x+1)=\frac{9}{2}$.

17. 30 Rozwiązać równanie $(x^2-5x+7)^2-(x-2)(x-3)=1$.

17. 31 Rozwiązać równanie $x^4+(x-1)^4=97$.

17. 32 Rozwiązać równanie $(5-x)^4+(2-x)^4=17$.

17. 33 Rozwiązać równanie $2x^3-3x^2+3x-2=0$.

17. 34 Rozwiązać równanie $x^3+4=3x^2$.

17. 35 Rozwiązać równanie $x^4-4x^3-19x^2+106x-120=0$.

17. 36 Rozwiązać równanie $\frac{2+x^3}{x^4-2x} = \frac{x^2}{3}$.

17. 37 Rozwiązać równanie $x^6 - 9x^2 + 8 = 0$.

17. 38 Rozwiązać równanie $2x^5 + 5x^4 + 11x^3 + 14x^2 + 11x + 5 = 0$.

17. 39 Rozwiązać równanie $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2 = 0$.

17. 40 Rozłożyć na czynniki wyrażenie $(ab + bc + ca)(a + b + c) - abc$.

17. 41 Rozłożyć na czynniki wyrażenie $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$.

17. 42 Rozłożyć na czynniki wyrażenie $x^3 + 5x^2 + 3x - 9$.

17. 43 Rozłożyć na czynniki wyrażenie $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

17. 44 Rozłożyć na czynniki wyrażenie $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

17. 45 Rozłożyć na czynniki wyrażenie $y^3(666 - x) - x^3(666 - y) + 666^3(x - y)$.

17. 46 Rozłożyć na czynniki wyrażenie $(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{100})^2 - x^{100}$.

17. 47 Rozłożyć na czynniki wyrażenie $x^{10} + x^5 + 1$.

17. 48 Rozwiązać równanie $x^4 + x^3 - 10x^2 + x + 1 = 0$.

17. 49 Rozwiązać równanie $(x + 1)^4 = 2(1 + x^4)$.

17. 50 Rozwiązać równanie $(3 - x)^4 + (2 - x)^4 = (5 - 2x)^4$.

17. 51 Rozwiązać równanie $\frac{1}{x^2-2x+2} + \frac{2}{x^2-2x+3} = \frac{6}{x^2-2x+4}$.

17. 52 Rozwiązać równanie $(6x + 5)^2(3x + 2)(x + 1) = 35$.

17. 53 Rozwiązać równanie $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 = \frac{17}{4}$.

17. 54 Rozwiązać równanie $\frac{x+1}{x^3+x-1} + \frac{x^3+x-1}{x+1} = 2$.

17. 55 Rozwiązać równanie $x^3 + 1 + (x^3 + 1)^{-1} = 2{,}5$.

17. 56 Rozwiązać równanie $(x + 1)^6 + 20 = 9(x + 1)^3$.

17. 57 Rozwiązać równanie $x^4 - 2x^3 + x - 132 = 0$.

17. 58 Rozwiązać równanie $x^6 = \frac{257x^2-68}{68x^2-257}$.

17. 59 Rozwiązać równanie $(x - 2)^6 - 19(x - 2)^3 = 216$.

17. 60 Rozwiązać równanie $x^2 + \frac{1}{x^2} + 1(x - \frac{1}{x}) = 5$.

17. 61 Rozwiązać równanie $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$.

17. 62 Rozwiązać równanie $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$.

17. 63 Rozwiązać równanie $2x^5 + 5x^4 + 11x^3 + 14x^2 + 11x + 5 = 0$.

17. 64 Rozwiązać równanie $x^5 + 25x^3 - 8x^2 - 200 = 0$.

17. 65 Rozłożyć na czynniki wyrażenie $x^4 + x^2 + \sqrt{2}x + 2$.