Funkcje wielu zmiennych — ciągłość, różniczkowalność

Podajemy tu kilka definicji i twierdzeń (z dowodami, które w większości zostaną pominięte na wykładzie), które pozwolą mówić o ciągłości i różniczkowalności funkcji wielu zmiennych. Z konieczności jest to tylko przegląd najważniejszych spośród najbardziej podstawowych zagadnień. Definicji kuli wielowymiarowej nie podam na wykładzie, ale jest ono wygodne i powszechnie stosowane, więc je tu umieszczam.

Definicja 16.1 (kuli k–wymiarowej) *

Kulą otwartą o środku $\mathbf{p}$ i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór
$$B(\mathbf{p}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathrm{I\!R}^k\colon \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| < r\},$$
kulą domkniętą o środku $\mathbf{p}$ i promieniu $r > 0$ — zbiór
$$\overline{B}(\mathbf{p}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathrm{I\!R}^k\colon \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| \le r\}. \blacksquare$$

Jasne jest, że jednowymiarową kulą otwartą o środku w punkcie $\mathbf{p} \in \mathrm{I\!R}$ i promieniu $r > 0$ jest przedział o środku w punkcie $\mathbf{p}$ i długości $2r$. Jednowymiarowa kula domknięta ośrodku w punkcie $\mathbf{p}$ i promieniu $r > 0$ to po prostu przedział domknięty o środku w punkcie $\mathbf{p}$ i długości $2r$. W tym wymiarze kula domknięta różni się od otwartej (o tym samym środku i promieniu) jedynie dwoma punktami. Jasne jest, że dwuwymiarową kulą otwartą o środku $\mathbf{p} \in \mathrm{I\!R}^2$ i promieniu $r > 0$ jest koło o środku $\mathbf{p}$ i promieniu r jednak bez punktów „brzegowych”, tj. bez punktów, których odległość od $\mathbf{p}$ równa jest dokładnie r. Kula domknięta o środku $\mathbf{p}$ i promieniu $r > 0$ to koło z „brzegiem” o środku $\mathbf{p}$ i promieniu r. Trójwymiarowa kula otwarta to po prostu kula bez punktów brzegowych, a kula domknięta to kula z punktami brzegowymi. Widać więc, że te nazwy motywowane są terminologią stosowaną do przestrzeni trójwymiarowej. Mimo, że może się komuś wydawać śmiesznym nazywanie przedziału kulą, to jednak warto zapłacić taką cenę za jednolitą terminologię stosowaną w odniesieniu do przestrzeni różnych wymiarów, to ułatwia formułowanie zarówno twierdzeń jak i ich dowodów.

Definicja 16.2 (zbioru otwartego w $\mathrm{I\!R}^k$)

Zbiór G nazywamy otwartym wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu $\mathbf{p} \in G$ istnieje liczba dodatnia r taka, że $B(\mathbf{p}, r) \subset G$, czyli gdy z tego, że $\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| < r$ wynika, że $\mathbf{x} \in G$. $\blacksquare$

Jasne jest, że cała przestrzeń k–wymiarowa jest zbiorem otwartym, w tym konkretnym przypadku można przyjąć np. $r = 13$. Również zbiór pusty jest otwarty.

---

* angielskie słowo: ball

Wynika to stąd, że jeśli poprzednik implikacji jest fałszywy (czyli $\mathbf{p} \in \emptyset$), to z tej nieprawdy już wszystko wynika w szczególności istnienie liczby $r > 0$. Oczywiście znów to rozumienie słowa *wynika* nie zawsze jest zgodne z potocznym, ale przyjęto wynikanie w ten właśnie sposób interpretować. Również otwarta kula k–wymiarowa w przestrzeni k–wymiarowej jest zbiorem otwartym: jeśli $\mathbf{q} \in B(\mathbf{p}, r)$, to przyjmując $\varrho = r - \|\mathbf{q} - \mathbf{p}\|$, otrzymujemy $B(\mathbf{q}, \varrho) \subset B(\mathbf{p}, r)$, bo jeśli $\|\mathbf{x} - \mathbf{q}\| < \varrho$, to $\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{q}\| + \|\mathbf{q} - \mathbf{p}\| < \varrho + \|\mathbf{q} - \mathbf{p}\| = r$. Z tego ostatniego zdania wynika, że przedział otwarty jest otwartym podzbiorem prostej. Natomiast odcinek bez końców otwartym podzbiorem płaszczyzny **nie** jest, bo przecież żaden jego punkt nie jest środkiem dwuwymiarowej kuli, czyli koła zawartego w tym odcinku, bo odcinek w ogóle żadnego koła nie zawiera. Widzimy więc, że to czy zbiór jest otwarty, czy też nie, zależy nie tylko od samego zbioru, lecz również od tego z jakiego punktu widzenia jest on rozpatrywany! Czytelnik sprawdzi bez trudu, że płaszczyzna bez jednego punktu, płaszczyzna bez skończenie wielu punktów, płaszczyzna bez skończenie wielu prostych są otwartymi podzbiorami płaszczyzny. Trójkąt otwartym podzbiorem płaszczyzny nie jest, bo żadne koło o środku w punkcie leżącym na boku trójkąta zawarte w trójkącie nie jest. Natomiast trójkąt bez boków i wierzchołków jest zbiorem otwartym, bo każdy punkt nie leżący na boku trójkąta jest środkiem koła zawartego w trójkącie bez boków. Podobnie kwadrat nie jest otwartym podzbiorem płaszczyzny, ale staje się otwarty po usunięciu boków wraz z wierzchołkami. Obszar nad parabolą $y = x^2$, czyli zbiór takich punktów (x, y), że $y > x^2$ jest otwartym podzbiorem płaszczyzny. Również obszar złożony z takich punktów (x, y), że $y < x^2$ jest otwarty. Analogiczne przykłady można rozważyć w przestrzeni trójwymiarowej, co pozostawiamy czytelnikom w charakterze prostego ćwiczenia.

Definicja 16.3 (zbioru domkniętego w przestrzeni $\mathbb{R}^k$)
Zbiór $F \subset \mathbb{R}^k$ jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $R^k \setminus F$ jest otwarty. ∎

Podane poprzednio przykłady zbiorów otwartych dają od razu przykłady zbiorów domkniętych: z tego, że cała przestrzeń $\mathbb{R}^k$ jest zbiorem otwartym wnioskujemy natychmiast, że zbiór pusty jest domknięty. Z tego, że zbiór pusty jest otwarty wynika, że cała przestrzeń jest zbiorem domkniętym. Ponieważ kula otwarta jest zbiorem otwartym, więc dopełnienie kuli otwartej jest zbiorem domkniętym. Zbiory skończone są domknięte, prosta jest podzbiorem domkniętym płaszczyzny, przestrzeni trójwymiarowej. Jasne jest też, że k–wymiarowa kula domknięta jest podzbiorem domkniętym przestrzeni $\mathbb{R}^k$. To stwierdzenie uzasadnimy. Niech $\mathbf{q} \notin \overline{B}(\mathbf{p}, r)$, tzn.

$\|\mathbf{q}-\mathbf{p}\| > r$. Niech $\varrho = \|\mathbf{q}-\mathbf{p}\| - r$. Oczywiście $\varrho > 0$. Niech $\mathbf{x} \in B(\mathbf{q},\varrho)$, tzn. $\|\mathbf{x}-\mathbf{q}\| < \varrho = \|\mathbf{q}-\mathbf{p}\| - r$. Stąd wynika, że $r < \|\mathbf{q}-\mathbf{p}\| - \|\mathbf{x}-\mathbf{q}\| \le \|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|$, co oznacza, że $\mathbf{x} \notin \overline{B}(\mathbf{p},r)$, a więc $B(\mathbf{q},\varrho) \cap \overline{B}(\mathbf{p},r) = \emptyset$. Wykazaliśmy więc, że kula $B(\mathbf{q},\varrho)$ jest zawarta w dopełnieniu kuli $\overline{B}(\mathbf{p},r)$, a ponieważ $\mathbf{q}$ oznacza tu dowolny punkt dopełnienia kuli $\overline{B}(\mathbf{p},r)$, więc dopełnienie to jest otwarte, zatem sama kula $\overline{B}(\mathbf{p},r)$ jest zbiorem domkniętym w $\mathbb{R}^k$.

Zbiory otwarte mają swoją charakteryzację „wewnętrzną” – nie ma konieczności badania dopełnienia zbioru. W podobny sposób można scharakteryzować zbioru domknięte. Przyda się nam do tego pojęcie granicy ciągu punktów.

Definicja 16.4 (granicy ciągu punktów przestrzeni euklidesowej)
Ciąg $(\mathbf{p}_n)$ jest zbieżny do granicy $\mathbf{p}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{n\to\infty} \|\mathbf{p}_n - \mathbf{p}\| = 0$. ■

Widać, że definicja ta różni się od definicji ciągu liczbowego bardzo nieznacznie: w przypadku ciągu wystąpiła wartość bezwzględna różnicy wyrazu ciągu i granicy, w przypadku ciągu punktów przestrzeni mówimy o odległości wyrazu ciągu od granicy. Widać wyraźnie, że różnica obu definicji jest raczej kosmetyczna niż merytoryczna — wartość bezwzględna różnicy dwu liczb to przecież odległość między nimi, jeśli o liczbach myślimy jak o punktach prostej.

Twierdzenie 16.5 (charakteryzujące zbiory domknięte)
Zbiór F jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy z tego że punkty $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, ... należą do zbioru F oraz $\mathbf{p} = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{p}_n$ wynika, że również $\mathbf{p} \in F$.

Dowód. Załóżmy najpierw, że zbiór F jest domknięty, czyli że zbiór $\mathbb{R}^k \setminus F$ jest otwarty. Niech $\mathbf{p} = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{p}_n$ i niech punkty ciągu $(\mathbf{p}_n)$ należą do zbioru F. Jeśli $\mathbf{p} \notin F$, to ponieważ zbiór $\mathbb{R}^k \setminus F$ jest otwarty, więc istnieje taka liczba $r > 0$, że $B(\mathbf{p},r) \subset \mathbb{R}^k \setminus F$. Wobec tego w kuli $B(\mathbf{p},r)$ nie ma punktów ciągu $(\mathbf{p}_n)$, bo one leżą w zbiorze F, a to oznacza, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $\|\mathbf{p}_n - \mathbf{p}\| \ge r$, wbrew temu, że $\lim\limits_{n\to\infty} \|\mathbf{p}_n - \mathbf{p}\| = 0$. Załóżmy teraz, że zbiór F spełnia warunek opisany w treści zadania i nie jest domknięty, tzn. jego dopełnienie nie jest otwarte. Istnieje więc punkt $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^k \setminus F$ taki, że żadna kula o środku $\mathbf{p}$ nie jest zawarta w zbiorze $\mathbb{R}^k \setminus F$. Niech $\mathbf{p}_n \in B(\mathbf{p},\frac{1}{n}) \cap F$. Mamy więc $\|\mathbf{p}_n - \mathbf{p}\| < \dfrac{1}{n}$, zatem $\lim\limits_{n\to\infty} \|\mathbf{p}_n - \mathbf{p}\| = 0$, czyli $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{p}_n = \mathbf{p}$ i wobec tego musi też być $\mathbf{p} \in F$, wbrew uczynionemu założeniu. Dowód został zakończony. ■

Z twierdzenia tego wynika natychmiast, że np. zbiór $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ nie jest zbiorem domkniętym. Mamy bowiem $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n},0)=(0,0)\notin \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, chociaż oczywiście $(\frac{1}{n},0)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. W taki sam sposób można wykazać, że zbiór Q złożony ze wszystkich liczb wymiernych nie jest domkniętym podzbiorem prostej: każda liczba niewymierna jest granicą ciągu liczb wymiernych. Zauważmy, że zbiór ten nie jest również otwarty, bo również każda liczba wymierna może przedstawiona jako granica ciągu liczb niewymiernych. Widzieliśmy więc, że istnieją zbiory, które są jednocześnie otwarte i domknięte ($\mathbb{R}^k$ i $\emptyset$), istnieją też zbiory, które nie są ani otwarte ani domknięte!

Twierdzenie 16.6 (charakteryzujące zbieżność ciągów w $\mathbb{R}^k$)
Ciąg $(\mathbf{p}_n)$ punktów przestrzeni k–wymiarowej jest zbieżny do punktu $\mathbf{p}\in\mathbb{R}^k$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{n\to\infty} p_{i,n}=p_i$ dla $i=1,2,\ldots,k$, tu $\mathbf{p}_n=(p_{1,n},p_{2,n},\ldots,p_{k,n})$ dla $n=1,2,\ldots$ i $\mathbf{p}=(p_1,p_2,\ldots,p_k)$.

Dowód. Dla każdego $i\in\{1,2,\ldots,k\}$ zachodzi nierówność:

$$|p_{i,n}-p_i|\le\sqrt{|p_{1,n}-p_1|^2+|p_{2,n}-p_2|^2+\cdots+|p_{k,n}-p_k|^2}=\|\mathbf{p}_n-\mathbf{p}\|,$$

z której wynika od razu, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{p}_n=\mathbf{p}$, to $\lim\limits_{n\to\infty}p_{i,n}=p_i$ dla każdego $i\in\{1,2,\ldots,k\}$. W drugą stronę twierdzenie wynika natychmiast z definicji odległości: pod pierwiastkiem jest k składników i każdy z nich dąży do 0, co jest treścią założenia. Dowód został zakończony. $\blacksquare$

Twierdzenie to pozwala w istocie rzeczy sprowadzać badanie zbieżności ciągu punktów przestrzeni k–wymiarowej do badania zbieżności k ciągów liczbowych. Istotną rolę w przypadku ciągów liczbowych grało twierdzenie Bolzano–Weierstrassa. Gwarantowało ono możliwość wybierania podciągów zbieżnych z ciągów ograniczonych. Twierdzenie to pozostaje w mocy w przypadku wielowymiarowym. Przed sformułowaniem tego twierdzenia wypada powiedzieć, że ciąg (zbiór) nazywamy ograniczonym, jeśli wszystkie jego wyrazy (elementy) znajdują się w pewnej kuli. Przypomnijmy, że w jednowymiarowym przypadku kulami są przedziały, więc ta definicja to po prostu uogólnienie definicji stosowanej w przypadku jednowymiarowym. Warto od razu zauważyć, że jeśli ciąg punktów przestrzeni $\mathbb{R}^k$ jest ograniczony, to również ciągi liczbowe: utworzony z jego pierwszych współrzędnych, utworzony z drugich współrzędnych itd. są zbieżne. Czytelnik bez trudu stwierdzi, że jeśli wszystkie ciągi utworzone ze współrzędnych o ustalonym numerze są ograniczone, to również ciąg punktów przestrzeni k–wymiarowej jest ograniczony. Twierdzenie to nie było omówione w czasie wykładu, tu jednak je zamieszczam w przekonaniu, że niektórym studentom zapoznanie się z nim ułatwi naukę matematyki.

Twierdzenie 16.7 (Bolzano–Weiertrassa, przypadek wielowymiarowy)
Z każdego ograniczonego ciągu $(\mathbf{p}_n)$ punktów przestrzeni $\mathbb{R}^k$ można wybrać podciąg zbieżny do pewnego punktu $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^k$, tzn. istnieje ściśle rosnący ciąg (n_j) liczb naturalnych taki, że zachodzi równość $\lim\limits_{j\to\infty} \mathbf{p}_{n_j} = \mathbf{p}$.

Dowód. Z poprzedniego twierdzenia wynika, że trzeba wybrać ciąg (n_j) w taki sposób, by wszystkie ciągi $\big(p_{1,n_j}\big)$, $\big(p_{2,n_j}\big),\ldots,\big(p_{k,n_j}\big)$ były zbieżne. Twierdzenie Bolzano–Weierstrassa jest prawdziwe dla ciągów liczbowych, zatem istnieje ciąg (n_j) taki, że ciąg (p_{1,n_j}) jest zbieżny, ale nie wiemy nic o następnych $k-1$ ciągach: (p_{2,n_j}), (p_{3,n_j}), itd. Możemy jednak skorzystać z tego, że wszystkie podciągi ciągu zbieżnego też są zbieżne i to do tej samej granicy. Zastąpimy więc ciąg wyjściowy $(\mathbf{p}_n)$ ciągiem $(\mathbf{p}_{n_j})$ (więc pierwsze współrzędne tworzą ciąg zbieżny) i z tego ciągu wybierzemy podciąg $(\mathbf{p}_{n'_j})$ w taki sposób, by ciąg (p_{2,n'_j}) był zbieżny. Jest to możliwe, bo ciąg (p_{2,n_j}) jest ograniczony, więc możemy zastosować jednowymiarowe twierdzenie Bolzano–Weiertrassa. Uzyskamy więc w ten sposób ciąg $(\mathbf{p}_{n'_j})$, którego pierwsze i drugie współrzędne tworzą ciągi zbieżne.* Wystarczy tę procedurę zastosować jeszcze kolejno $k-2$ razy, by uzyskać podciąg, którego wszystkie współrzędne: pierwsze, drugie, itd. tworzą ciągi zbieżne, dzięki czemu również sam podciąg jest zbieżny. Dowód został zakończony. ■

Podamy teraz jedną z najważniejszych definicji tej części wykładu.

Definicja 16.8 (zbioru zwartego)
Zbiór C nazywamy zwartym wtedy i tylko wtedy, gdy z każdego ciągu punktów zbioru C można wybrać podciąg zbieżny do punktu leżącego w zbiorze C. ■

Zbiory zwarte mogą być definiowane w taki sposób w nieco ogólniejszej sytuacji niż rozpatrywana przez nas, mogą to być mianowicie podzbiory tzw. przestrzeni metrycznych. Podamy teraz twierdzenie, które w ogólnej sytuacji nie jest prawdziwe, ale jest prawdziwe i bardzo użyteczne w przypadku tych zbiorów, którymi zajmować się będziemy w tej przyszłości.

Twierdzenie 16.9 (charakteryzujące zbiory zwarte w przestrzeni $\mathbb{R}^k$)
Zbiór $C \subset \mathbb{R}^k$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty i ograniczony.

Dowód. Załóżmy, że zbiór $C \subset \mathbb{R}^k$ jest zwarty. Jeśli C nie jest ograniczony, to dla każdej liczby naturalnej n istnieje taki punkt $\mathbf{p}_n \in C$, że $\mathbf{p}_n \notin B(\mathbf{0}, n)$. Oznacza to, że $\|\mathbf{p}_n\| \geq n$. Ponieważ C jest zbiorem zwartym, więc z ciągu $(\mathbf{p}_n)$ wybrać można

*Pierwsze – bo podciąg ciągu zbieżnego jest zbieżny, drugie – bo tak wybieramy.

podciąg zbieżny $(\mathbf{p}_{n_j})$ do pewnego punktu $\mathbf{p} \in C$. Stąd wynika, że ciąg $\big(\|\mathbf{p}_{n_j} - \mathbf{p}\|\big)$ jest zbieżny do 0, więc jest ograniczony. Zachodzi nierówność $\|p_{n_j}\| \le \|p\| + \|\mathbf{p}_{n_j} - \mathbf{p}\|$, a z niej i ze zdania poprzedniego wynika, że ciąg $\big(p_{n_j}\big)$ jest ograniczony, co oczywiście przeczy temu, że $\|p_{n_j}\| \ge n_j$. Wykazaliśmy więc, że podzbiór zwarty przestrzeni $\mathbb{R}^k$ musi być ograniczony. Teraz wykażemy, że musi być również domknięty. Załóżmy, że nie jest domknięty. Wtedy istnieje ciąg $(\mathbf{p}_n)$ punktów zbioru C zbieżny do punktu $\mathbf{p} \notin C$. Wszystkie podciągi ciągu $(\mathbf{p}_n)$ są oczywiście zbieżne do punktu $\mathbf{p}$, więc nie można wybrać z tego ciągu podciągu, którego granica należałaby do C. Wobec tego podzbiór zwarty przestrzeni $\mathbb{R}^k$ musi być też domknięty. Czas na dowód implikacji przeciwnej. Zakładamy teraz, że zbiór $C \subset \mathbb{R}^k$ jest domknięty i ograniczony. Niech $(\mathbf{p}_n)$ będzie ciągiem punktów zbioru C. Na mocy twierdzenia Bolzano–Weierstrassa można zeń wybrać podciąg $(\mathbf{p}_{n_j})$ zbieżny do pewnego punktu $\mathbf{p}$. Ponieważ zbiór C jest domknięty a wyrazy ciągu $(\mathbf{p}_{n_j})$ są elementami zbioru *domkniętego* C, więc również jego granica, czyli punkt $\mathbf{p}$ jest elementem zbioru C. Wykazaliśmy więc, że z ciągu punktów zbioru C można wybrać podciąg zbieżny do punktu leżącego w zbiorze C, a to oznacza, że C jest zbiorem zwartym. Dowód został zakończony. ■

Interesują nas nie tylko zbiory, ale również funkcje, w tym funkcje ciągłe. Definicja ciągowa (Heinego) ciągłości funkcji przenosi się na przypadek wielowymiarowy bez żadnych zmian. Jeśli $A \subset \mathbb{R}^k$ i $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}^l$ jest funkcją określoną na zbiorze A, to f jest ciągła w punkcie $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^k$ wtedy i tylko wtedy, gdy z tego, że $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \mathbf{p}$, $\mathbf{p}_n \in A$ wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} f(\mathbf{p}_n) = f(\mathbf{p})$. Można również przeformułować definicję otoczeniową (Cauchy'ego): funkcja $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}^l$ jest ciągła w punkcie $\mathbf{p} \in A$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że jeśli $\mathbf{q} \in A$ i $\|\mathbf{q} - \mathbf{p}\| < \delta$, to $\|f(\mathbf{q}) - f(\mathbf{p})\| < \varepsilon$. Ponieważ definicje te nie różnią się od podawanych w przypadku jednowymiarowym, więc dowód ich równoważności pomijamy, zresztą nie różni się on od dowodu w przypadku jednowymiarowym niczym istotnym. Warto też dodać, że jeśli funkcje f, g są ciągłe i odpowiednia operacja na nich jest zdefiniowana, to ciągłe są również funkcje $f \pm g$, $f \cdot g$ (iloczyn skalarny), $f \times g$ (iloczyn wektorowy), f^{-1} (np. jeśli wartościami funkcji są macierze odwracalne i $f(x)^{-1}$ oznacza macierz odwrotną do macierzy $f(x)$), $f \circ g$ (złożenie funkcji f z funkcją g). Natomiast funkcja odwrotna do funkcji ciągłej może nie być ciągła: jeśli

$$f(t) = \big((2+\cos t)\cos(t\sqrt{2}), (2+\cos t)\sin(t\sqrt{2}), \sin t\big),$$

to funkcja f jest różnowartościowa, więc ma funkcję odwrotną, ale ta funkcja odwrotna nie ma ani jednego punktu ciągłości.

Dzięki twierdzeniu Bolzano–Weierstrassa pozostaje też w mocy

Twierdzenie 16.10 (Weierstrassa o osiąganiu kresów przez funkcję ciągłą) Jeśli $f\colon C \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą w każdym punkcie zbioru zwartego $C \subset \mathbb{R}^k$, to istnieją punkty $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in C$ takie, że dla każdego punktu $\mathbf{x} \in C$ zachodzi nierówność podwójna $f(\mathbf{p}) \le f(\mathbf{x}) \le f(\mathbf{q})$, czyli $f(\mathbf{p})$ jest najmniejszą wartością funkcji f zaś $f(\mathbf{q})$ – największą. ■

Twierdzenie to ma kapitalne znaczenie. Pozwala ono stwierdzać, że np. poszukiwana przez nas największa wartość funkcji istnieje, co zwalnia nas z obowiązku przeprowadzania często kłopotliwych rozumowań w konkretnych sytuacjach. Już w przypadku funkcji jednej zmiennej były podane przykłady jego stosowania. Teraz mieć to będzie jeszcze większe znaczenie, bo trudniej w przypadku funkcji wielu zmiennych mówić o jej monotoniczności niż w jednowymiarowym przypadku, zresztą gdy zbiór jest skomplikowany, może to być w ogóle niewykonalne (w prostych sytuacjach można rozpatrywać daną funkcję wielu zmiennych kolejno jako funkcję zmiennej x_1, potem jako funkcję zmiennej x_2, ...). Przykłady pojawią się nieco później.

Zajmiemy się teraz różniczkowaniem funkcji wielu zmiennych. Zaczniemy od pojęcia pochodnej cząstkowej, bo jest ono najprostszym z tych, którymi przyjdzie nam się zająć. W tym rozdziale, jeśli nie napiszemy wyraźnie, że jest inaczej, funkcja $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}^l$ będzie określona na zbiorze otwartym $G \subset \mathbb{R}^k$. Będziemy starać się przenieść twierdzenia użyteczne dla optymalizacji funkcji o wartościach rzeczywistych, czyli dla znajdowania ich wartości najmniejszych oraz największych. W niektórych przypadkach pojęcie pochodnej cząstkowej nam wystarczy, a w niektórych zmuszeni zostaniemy do użycia pojęcia różniczki funkcji, które zdefiniujemy później.

Definicja 16.11 (pochodnej cząstkowej)
Pochodną cząstkową pierwszego rzędu odwzorowania $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}^l$ ze względu na zmienną x_i, $1 \le i \le k$, w punkcie $\mathbf{p} \in G$, nazywamy granicę $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{p}+h\mathbf{e}_i)-f(\mathbf{p})}{h}$, o ile istnieje; $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^k$ to wektor, którego wszystkie współrzędne z wyjątkiem i–tej są równe 0 a i–ta równa jest 1: $\mathbf{e}_i = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$. Tę pochodną cząstkową oznaczamy symbolem $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p})$. ■

Przykład 16.1 Niech $f(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2^3 + x_3 e^{x_4}$. Z definicji pochodnej cząstkowej wynika, że zachodzi następujący wzór:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{x}+h\mathbf{e}_1)-f(\mathbf{x})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1+h,x_2,x_3,x_4)-f(x_1,x_2,x_3,x_4)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x_1 + h + 2x_2^3 + x_3 e^{x_4} - (x_1 + 2x_2^3 + x_3 e^{x_4})}{h} = 1\,.$$

Pochodną $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ funkcji f obliczamy traktując x_1 jako argument funkcji f przy jednoczesnym traktowaniu zmiennych x_2, x_3, x_4 jako stałych (parametrów). Obliczając analogicznie otrzymujemy jeszcze trzy równości: $\frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}) = 6x_2^2$, $\frac{\partial f}{\partial x_3}(\mathbf{x}) = e^{x_4}$, $\frac{\partial f}{\partial x_4}(\mathbf{x}) = x_3 e^{x_4}$. ■

Przykład 16.2 Niech $f\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$ – tym razem współrzędne punktów piszemy pionowo, co — jak się okaże później — ma sens. Obliczymy pochodną tej funkcji względem zmiennej r:

$$\frac{\partial f}{\partial r}\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \lim_{h\to 0} \frac{f\begin{pmatrix} r+h \\ \varphi \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\begin{pmatrix} (r+h)\cos\varphi \\ (r+h)\sin\varphi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}.$$

Teraz kolej na pochodną względem zmiennej φ:

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi}\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \lim_{h\to 0} \frac{f\begin{pmatrix} r \\ \varphi+h \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\begin{pmatrix} r\cos(\varphi+h) \\ r\sin(\varphi+h) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}}{h} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lim\limits_{h\to 0} \frac{r\cos(\varphi+h) - r\cos\varphi}{h} \\ \lim\limits_{h\to 0} \frac{r\sin(\varphi+h) - r\sin\varphi}{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Widzimy więc, że w przypadku odwzorowania o wartościach w $\mathbb{R}^2$ otrzymaliśmy *wektor*, a nie liczbę! Rezultat ten jest dokładnie taki, jakiego należało się spodziewać. Jeśli funkcja o wartościach w przestrzeni $\mathbb{R}^l$ ma w punkcie pochodną względem jednej ze swych k zmiennych, to ta pochodna cząstkowa jest wektorem l–wymiarowym. Właściwie na tym można by skończyć, ale warto jeszcze otrzymany rezultat zinterpretować fizycznie.* Można myśleć, że wartością funkcji f jest punkt płaszczyzny oddalony o r od punktu $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ lub wektor zaczynający się w punkcie $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ i kończący się w punkcie $f\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$ — traktujemy więc liczby r i φ jako tzw. współrzędne biegunowe punktu płaszczyzny. Przy obliczaniu pochodnej względem

* Do przeczytania dalszej części tego przykładu wystarczy rozumieć pojęcie prędkości znane z lekcji fizyki w szkole.

r traktujemy zmienną φ jako stałą. Możemy interpretować zmienną r jako czas. Po zmianie czasu o h znajdujemy się w punkcie $f\begin{pmatrix} r+h \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r+h)\cos\varphi \\ (r+h)\sin\varphi \end{pmatrix}$. Znaleźliśmy się więc w punkcie leżącym na tej samej półprostej wychodzącej z punktu $(0,0)$, ale w innej odległości od początku układu współrzędnych. Zmiana odległości równa jest zmianie czasu. Wobec prędkość skalarna powinna być równa 1 a wektor prędkości powinien być równoległy do półprostej, po której porusza się punkt. Wektor $\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ jest równoległy do półprostej wychodzącej z punktu $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ i przechodzącej przez punkt $\begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$. Jego długość to 1. Jest to wektor równy *prędkości wektorowej* poruszającego się punktu. Podobnie można zinterpretować pochodną względem φ. Tym razem r się nie zmienia, natomiast zmienia się kąt jaki tworzy wektor o początku $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ i końcu $\begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$ z osią odciętych (poziomą osią układu współrzędnych). W tej sytuacji φ oznacza zarówno czas jak i ten kąt. Wobec tego ruch odbywa się po okręgu o środku $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ i promieniu r. Chwilowa prędkość wektorowa jest więc wektorem stycznym do tego okręgu. Długość tego wektora to oczywiście r, bo prędkość kątowa równa jest 1. Wektorowi $\frac{\partial f}{\partial\varphi}\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \end{pmatrix}$ przysługują obie te własności. Jest on wektorem prędkości chwilowej w tym ruchu w momencie φ. ■

Przykład 16.3 Niech $f\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\psi \\ r\cos\varphi\sin\psi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$. Tym razem należy myśleć o tzw. współrzędnych sferycznych: liczba r jest odległością od początku układu współrzędnych, φ — szerokością geograficzną na sferze o środku $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ i promieniu r, zaś ψ – długością geograficzną na tej sferze. Obliczamy pochodne cząstkowe względem kolejnych zmiennych:

$$\frac{\partial f}{\partial r}\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi \\ \cos\varphi\sin\psi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial\varphi}\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi\cos\psi \\ -r\sin\varphi\sin\psi \\ r\cos\varphi \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial f}{\partial\psi}\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\cos\varphi\sin\psi \\ r\cos\varphi\cos\psi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pierwsza z nich, $\frac{\partial f}{\partial r}\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$, to wektorowa prędkość w ruchu jednostajnym po promieniu wychodzącym z punktu $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ i przechodzącym przez punkt $\begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\psi \\ r\cos\varphi\sin\psi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$; druga z nich, $\frac{\partial f}{\partial \varphi}\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$, to prędkość wektorowa w ruchu po południku z prędkością kątową 1 (zachowujemy promień sfery i długość geograficzną, jedynie szerokość geograficzna zmienia się); trzecia to $\frac{\partial f}{\partial \psi}\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$, to prędkość w ruchu po równoleżniku z prędkością kątową 1 (zachowujemy promień sfery i szerokość geograficzną, jedynie długość geograficzna zmienia się). W pierwszym przypadku prędkość skalarna równa jest 1, bo czas równy jest odległości od punktu $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, w drugim prędkość skalarna równa jest promieniowi południka (bo prędkość kątowa jest równa 1) czyli r, w trzecim natomiast prędkość skalarna równa jest promieniowi równoleżnika (bo prędkość kątowa również w tym przypadku równa jest 1) czyli $r\cos\varphi$. Oczywiście te prędkości skalarne równe są odpowiednio długościom wektorów $\frac{\partial f}{\partial r}\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$, $\frac{\partial f}{\partial \varphi}\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$ i $\frac{\partial f}{\partial \psi}\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$. ■

Przykład 16.4 Niech $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } x = 0 = y; \\ \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{jeśli } x \neq 0 \text{ lub } y \neq 0. \end{cases}$ Funkcja ta nie jest ciągła w punkcie $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, bowiem dla $x \neq 0$ mamy $f\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = \frac{1}{2}$ i jednocześnie $f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \neq \frac{1}{2}$. Oznacza to, że jeśli zbliżamy się do punktu $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ wędrując wzdłuż prostej o równaniu $y = x$, to wartości badanej funkcji nie dążą do $0 = f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Oczywiście jest to jedyny punkt nieciągłości tej funkcji. Zbadamy teraz kwestię istnienia pochodnych cząstkowych funkcji f. We wszystkich punktach z wyjątkiem punktu $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pochodne cząstkowe istnieją, co wynika od razu z twierdzeń pozwalających na obliczanie pochodnej funkcji jednej zmiennej rzeczywistej. Również w punkcie $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ funkcja f ma pochodne cząstkowe. Wykażemy to. Mamy

$$\lim_{h\to 0} \frac{f\begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0\,.$$

Wykazaliśmy, że $\frac{\partial f}{\partial x}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$. W taki sam sposób wykazujemy, że $\frac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$. Zauważmy jeszcze, że jeśli $x \neq 0$ lub $y \neq 0$, to $\frac{\partial f}{\partial x}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{y^3 - x^2 y}{(x^2+y^2)^2}$ — wynika to natychmiast z twierdzenia o pochodnej ilorazu dwu funkcji jednej zmiennej. Analogicznie $\frac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2}$. Zachęcamy czytelnika do samodzielnego sprawdzenia tych wzorów oraz do sprawdzenia, że pochodne cząstkowe, które właśnie znaleźliśmy, są nieciągłe w punkcie $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. ■

Przykład czwarty pokazuje, że stwierdzenie istnienia pochodnych cząstkowych w jakimś punkcie, a nawet w całej dziedzinie funkcji nie pozwala jeszcze zbyt wiele na temat tej funkcji wywnioskować – z istnienia pochodnych cząstkowych nie wynika nawet ciągłość funkcji! Jasne jest, że potrzebne nam są własności pozwalające na stwierdzanie ciągłości funkcji i co więcej na stwierdzanie, że jej zachowanie w małym otoczeniu punktu *różniczkowalności* jest w przybliżeniu takie jak funkcji liniowej. To jest podstawowa idea w rachunku różniczkowym. Stosowaliśmy rozumowania oparte na tej właśnie idei wielokrotnie w przypadku funkcji jednej zmiennej. To one doprowadziły nas do sformułowania twierdzeń pozwalających na ustalanie w jakich przedziałach funkcja różniczkowalna jest monotoniczna, w jakich punktach może mieć lokalne ekstrema itd. Podamy teraz definicję różniczkowalności funkcji wielu zmiennych i warunek wystarczający dla różniczkowalności.

Definicja 16.12 (funkcji różniczkowalnej w punkcie)
Funkcja $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}^l$ określona na zbiorze G otwartym w $\mathbb{R}^k$ jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{p} \in G$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka macierz L, że

$$\lim_{h\to 0} \tfrac{f(\mathbf{p}+\mathbf{h})-f(\mathbf{p})-L\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = \mathbf{0}\,.$$

Wtedy macierz L nazywamy różniczką funkcji f w punkcie $\mathbf{p}$ i oznaczamy symbolem $Df(p)$ lub $df(p)$ lub $f'(p)$. ■

Pochodna cząstkowa obliczana jest po to, by uzyskać informacje o tym jak zmienia się funkcja w kierunku jednej z osi układu współrzędnych. Różniczkę, o ile istnieje, obliczamy po to, by dowiedzieć się jak zachowuje się funkcja w całym otoczeniu punktu. Pojęciem pośrednim jest pochodna kierunkowa.

Definicja 16.13 (pochodnej kierunkowej)
Pochodną funkcji $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}^l$ w punkcie $\mathbf{p}$, w kierunku wektora $\mathbf{v}$ nazywamy granicę

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(\mathbf{p}+t\mathbf{v})-f(\mathbf{p})}{t},$$

jeśli ta granica istnieje. Tę pochodną oznaczamy symbolem $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{p})$. ■

Jasne jest, że właśnie uogólniliśmy pojęcie pochodnej cząstkowej:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p}) = f'_{\mathbf{e}_i}(\mathbf{p}).$$

Pochodna kierunkowa w kierunku wektora $\mathbf{v}$ obliczana jest po to, by ocenić tempo zmian funkcji w otoczeniu punktu $\mathbf{p}$ na prostej przechodzącej przez punkt $\mathbf{p}$ równoległej do wektora $\mathbf{v}$. W punktach różniczkowalności funkcji pochodną kierunkową można łatwo znaleźć po obliczeniu różniczki funkcji.

Twierdzenie 16.14 (Fermata)
Jeśli $\mathbf{p}$ jest punktem wewnętrznym dziedziny G funkcji $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(\mathbf{p})$ jest największą lub najmniejsza wartością funkcji f i istnieje $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{p})$, to $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{p}) = 0$.

Dowód. Ponieważ $\mathbf{p}$ leży wewnątrz zbioru G, więc istnieje taka liczba $\delta > 0$, że jeśli $|t| < \delta$, to $\mathbf{p}+t\mathbf{v} \in G$. Ponieważ $f(\mathbf{p})$ jest największą wartością funkcji f, więc dla każdej liczby t, dla której $0 < |t| < \delta$, zachodzi nierówność $f(\mathbf{p}+t\mathbf{h}) \le f(\mathbf{p})$. Z niej wynika, że jeśli $-\delta < t < 0$, to $\frac{f(\mathbf{p}+t\mathbf{v})-f(\mathbf{p})}{t} \ge 0$ oraz $\frac{f(\mathbf{p}+t\mathbf{v})-f(\mathbf{p})}{t} \le 0$, gdy $0 < t < \delta$. Pierwsza nierówność powoduje, że $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{p}) \ge 0$. Z drugiej wynika, że $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{p}) \le 0$. Łącząc obie otrzymujemy $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{p}) = 0$. ■

Twierdzenie 16.15 (o istnieniu pochodnej kierunkowej w punktach różniczkowalności funkcji)
Jeśli funkcja $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}^l$ jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{p} \in G$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^k$, to funkcja f ma w punkcie $\mathbf{p}$ pochodna kierunkową w kierunku wektora $\mathbf{v}$ i zachodzi równość: $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{p}) = Df(\mathbf{p})\mathbf{v}$.

Dowód. Mamy

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(\mathbf{p}+t\mathbf{v})-f(\mathbf{p})}{t} = \lim_{t\to 0}\left(\frac{f(\mathbf{p}+t\mathbf{v})-f(\mathbf{p})-Df(\mathbf{p})(t\mathbf{v})}{\|t\mathbf{v}\|}\cdot\frac{\|t\mathbf{v}\|}{t} + Df(\mathbf{p})\mathbf{v}\right) = Df(\mathbf{p})\mathbf{v}$$

— skorzystaliśmy tu z tego, że iloczyn wyrażenia $\frac{\|t\mathbf{v}\|}{t}$, ograniczonego, i wyrażenia dążącego do $\mathbf{0}$ ma granicę $\mathbf{0}$ oraz z tego, że $Df(\mathbf{p})(t\mathbf{v}) = tDf(\mathbf{p})\mathbf{v}$ i oczywiście z tego, że f jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{p}$, z czego wynika od razu, że

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{f(\mathbf{p}+t\mathbf{v})-f(\mathbf{p})-Df(\mathbf{p})(t\mathbf{v})}{\|t\mathbf{v}\|}\right)=\mathbf{0}\,.$$

W ten sposób zakończyliśmy dowód tego twierdzenia. ■

Z tego twierdzenia wynika w szczególności, że przy ustalonym punkcie $\mathbf{p}$ pochodna $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{p})$ jest liniową funkcją wektora $\mathbf{v}$ oczywiście pod warunkiem różniczkowalności funkcji f w tym punkcie. Oznacza to, że $f'_{\alpha\mathbf{v}+\beta\mathbf{w}}(\mathbf{p})=\alpha f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{p})+\beta f'_{\mathbf{w}}(\mathbf{p})$ dla dowolnych liczb rzeczywistych α,β i dowolnych wektorów $\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{R}^k$.

Czytelnik zechce sprawdzić, że jeśli $f\binom{0}{0}=0$ i $f\binom{x}{y}=\frac{x^2y}{x^2+y^2}$, gdy przynajmniej jedna z liczb x, y jest różna od 0, to $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{0})=f(\mathbf{v})$ dla każdego wektora $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^k$. W tym przypadku pochodna w kierunku wektora $\mathbf{v}$ w punkcie $\mathbf{0}$ nie jest więc liniową funkcją wektora $\mathbf{v}$, a co za tym idzie funkcja f nie jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{0}$. Zachęcamy do sprawdzenia, że f jest w tym punkcie ciągła.

Powtórzmy: z różniczkowalności funkcji w punkcie wynika istnienie pochodnych kierunkowych w tym punkcie we wszystkich kierunkach, w szczególności istnienie pochodnych cząstkowych. Z istnienia pochodnych cząstkowych nie wynika nawet ciągłość funkcji — widzieliśmy to na przykładzie funkcji $\frac{xy}{x^2+y^2}$. Można podać przykład funkcji która w pewnym punkcie ma pochodne kierunkowe we wszystkich kierunkach i to równe 0 i jednocześnie nie jest ciągła w tym punkcie. Oznacza to, że zbadanie zachowania się funkcji na prostych przechodzących przez dany punkt to jedynie wstęp do zbadania zachowania się tej funkcji w **otoczeniu** tego punktu. Tych kwestii nie będziemy jednak dokładnie analizować, bo to wykracza znacznie poza potrzeby większości chemików.

Definicja 16.16 (gradientu funkcji)
Wektor $\operatorname{grad} f(\mathbf{p})$ nazywamy gradientem funkcji f różniczkowalnej w punkcie $\mathbf{p}$, jeśli $Df(\mathbf{p})\mathbf{v}=\operatorname{grad} f(\mathbf{p})\cdot\mathbf{v}$ dla każdego wektora $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^k$. ■

Z definicji wynika od razu, że $\operatorname{grad} f(\mathbf{p})=\overrightarrow{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{p}),\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{p}),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{p})\right)}$ — różnica między gradientem i różniczką jest na tym etapie czysto formalna. Różniczka to macierz (ewentualnie przekształcenie liniowe), a gradient to wektor.

Rozważmy teraz funkcję $f\colon G\longrightarrow\mathbb{R}$ różniczkowalną w punkcie $\mathbf{p}\in G$. Niech $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$ oznaczają takie wektory, że $\|\mathbf{v}\|=\|\operatorname{grad} f(\mathbf{p})\|$ i $\mathbf{w}=\operatorname{grad} f(\mathbf{p})$. Mamy wtedy

$$f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{p})=Df(\mathbf{p})\mathbf{v}=\mathbf{v}\cdot\operatorname{grad} f(\mathbf{p})=\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}\le\|\mathbf{v}\|\cdot\|\mathbf{w}\|=\|\mathbf{w}\|^2=f'_{\mathbf{w}}(p)\,.$$

Wykazaliśmy więc

Twierdzenie 16.17 (o kierunku najszybszego wzrostu funkcji)
Pochodna funkcji f w kierunku gradientu funkcji w danym punkcie $\mathbf{p}$ jest największą spośród wszystkich pochodnych w tym punkcie w kierunku wektorów o długości $\|\operatorname{grad} f(\mathbf{p})\|$. ■

Zwykle mówimy, że gradient wskazuje kierunek najszybszego wzrostu funkcji, bo pochodna mierzy tempo zmian funkcji, jeśli pochodna jest dodatnia to funkcja rośnie. Rozważanie jedynie wektorów o danej długości jest konieczne, bo $f'_{\alpha\mathbf{v}}(\mathbf{p}) = \alpha f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{p})$ dla dowolnego punktu $\mathbf{p}$, dowolnego wektora $\mathbf{v}$ i dowolnej liczby rzeczywistej α, a my chcemy porównywać tempo wzrostu funkcji wzdłuż prostych przechodzących przez punkt $\mathbf{p}$ oczywiście przy założeniu, że po każdej prostej poruszamy się z tą samą prędkością — podany w tym zdaniu wzór stwierdza po prostu, że zmiana prędkości poruszania się po prostej przechodzącej przez $\mathbf{p}$ powoduje wzrost prędkości zmian funkcji w takim samym stosunku. W istocie rzeczy słowo gradient nie jest niezbędne w tym wykładzie, ale ponieważ jest ono używane powszechnie we wszystkich językach, więc my też go unikać nie będziemy.

Twierdzenie 16.18 (o różniczce złożenia dwu funkcji)
Załóżmy, że funkcja g jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{p}$ a funkcja f w punkcie $g(\mathbf{p})$ oraz że złożenie $f \circ g$ jest zdefiniowane, tj. dziedzina funkcji f zawiera zbiór wartości funkcji g. Wtedy złożenie $f \circ g$ jest różniczkowalne w punkcie $\mathbf{p}$ i zachodzi równość: $D(f \circ g)(\mathbf{p}) = Df(g(\mathbf{p})) \cdot Dg(\mathbf{p})$, tu kropka oznacza mnożenie macierzy.

Dowód. Niech $r(\mathbf{h}) = \frac{g(\mathbf{p}+\mathbf{h})-g(\mathbf{p})-Dg(\mathbf{p})\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}$ dla $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ i $r(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Wobec tego $g(\mathbf{p}+\mathbf{h}) = g(\mathbf{p}) + Dg(\mathbf{p})\mathbf{h} + r(\mathbf{h}) \cdot \|\mathbf{h}\|$. Różniczkowalność funkcji g w punkcie $\mathbf{p}$ to po prostu ciągłość funkcji r w punkcie $\mathbf{0}$.

Analogicznie różniczkowalność funkcji f w punkcie $g(\mathbf{p})$ to ciągłość funkcji ϱ, zdefiniowanej za pomocą równości $\varrho(\mathbf{H}) = \frac{f(g(\mathbf{p})+\mathbf{H})-g(\mathbf{p})-Df((\mathbf{p}))\mathbf{H}}{\|\mathbf{H}\|}$ i $\varrho(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, w punkcie $\mathbf{0}$.

Mamy teraz

$$f(g(\mathbf{p}+h)) = f(g(\mathbf{p})) + Df(g(\mathbf{p}))\big(g(\mathbf{p}+\mathbf{h}) - g(\mathbf{p})\big) + \\ + \varrho\big(g(\mathbf{p}+\mathbf{h}) - g(\mathbf{p})\big) \cdot \big\|g(\mathbf{p}+\mathbf{h}) - g(\mathbf{p})\big\| = \\ = f(g(\mathbf{p})) + Df(g(\mathbf{p}))\big(Dg(\mathbf{p})\mathbf{h} + r(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|\big) + \\ + \varrho\big(Dg(\mathbf{p})\mathbf{h} + r(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|\big) \cdot \big\|Dg(\mathbf{p})\mathbf{h} + r(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|\big\| = \\ = f(g(\mathbf{p})) + Df(g(\mathbf{p}))Dg(\mathbf{p})\mathbf{h} + \\ + \|\mathbf{h}\| \cdot \Big(Df(g(\mathbf{p}))r(\mathbf{h}) + \varrho\big(Dg(\mathbf{p})\mathbf{h} + r(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|\big) \cdot \big\|Dg(\mathbf{p})\tfrac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} + r(\mathbf{h})\big\|\Big).$$

Jasne jest, że wyrażenie $\big\|Dg(\mathbf{p})\frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} + r(\mathbf{h})\big\|$ jest ograniczone oraz że zachodzi równość $\lim\limits_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}}\big(Df(g(\mathbf{p}))r(\mathbf{h})+\varrho\big(Dg(\mathbf{p})\mathbf{h}+r(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|\big)=\mathbf{0}$, a stąd już łatwo wynika, że $\lim\limits_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}}\big(Df(g(\mathbf{p}))r(\mathbf{h})+\varrho\big(Dg(\mathbf{p})\mathbf{h}+r(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|\big)\cdot\big\|Dg(\mathbf{p})\frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}+r(\mathbf{h})\big\|\big)=\mathbf{0}$, czyli że $\lim\limits_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}}\frac{f(g(\mathbf{p}+h))-f(g(\mathbf{p}))-Df(g(\mathbf{p}))Dg(\mathbf{p})\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}=\mathbf{0}$, a to oznacza, że

$$D(f\circ g)(\mathbf{p})=Df(\mathbf{p})\cdot Dg(\mathbf{p})\,.$$

Dowód został zakończony. ■

Jeśli studenci zechcą, to mogą zauważyć, że ten dowód w istocie rzeczy sugeruje, że można (i w rzeczywistości należy) myśleć o wydzielaniu części stałej ($f(g(\mathbf{p}))$), a następnie liniowej ($Df(g(\mathbf{p}))Dg(\mathbf{p})\mathbf{h}$) przekształcenia, gdy usiłujemy znaleźć jego różniczkę w danym punkcie. Można to prześledzić na jakimś przykładzie, czego w tym miejscu nie zrobimy, ale zachęcamy czytelników do samodzielnego znalezienia co najmniej jednej pochodnej w ten sposób.

Następne twierdzenie podamy bez dowodu.

Twierdzenie 16.19 (o różniczce funkcji odwrotnej)
Załóżmy, że funkcja $f\colon G\longrightarrow\mathbb{R}^l$ jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{p}$ zbioru otwartego $G\subset\mathbb{R}^k$, że jej zbiór wartości jest otwarty w $\mathbb{R}^l$, że różniczka $Df(\mathbf{p})$ jest macierzą odwracalną oraz że funkcja f jest różnowartościowa i funkcja odwrotna f^{-1} jest ciągła w punkcie $f(\mathbf{p})$. Wtedy funkcja f^{-1} jest różniczkowalna w punkcie $f(\mathbf{p})$ i zachodzi równość $D(f^{-1})(\mathbf{p})=(Df(\mathbf{p}))^{-1}$. ■

Warto jedynie zaznaczyć, że głównym problemem w tym twierdzeniu jest istnienie różniczki przekształcenia odwrotnego. Sam wzór jest konsekwencją twierdzenia o pochodnej złożenia dwu funkcji (f i f^{-1}).

Dwa ostatnie twierdzenia pokazują, że należy myśleć o pochodnej (różniczce) funkcji wielu zmiennych jako o macierzy. Dodać należy, że twierdzenie o różniczce złożenia dwu funkcji to jedna z głównych przyczyn, dla których mnożenie macierzy jest zdefiniowane właśnie w taki sposób.

Pokażemy jedno z licznych zastosowań tego twierdzenia. Niech $\gamma\colon(-1,1)\longrightarrow\mathbb{R}^k$ będzie funkcją różniczkowalną. Wtedy wektor $\gamma'(t_0)$ jest styczny w punkcie $\gamma(t_0)$ do obrazu funkcji γ, czyli do krzywej złożonej ze wszystkich punktów postaci $\gamma(t)$, gdzie $t\in(-1,1)$. Należy myśleć, że w chwili t poruszający się punkt materialny znajduje się w miejscu $\gamma(t)$. W takiej sytuacji naturalnym pomysłem jest przyjęcie, że wektor $\gamma'(t)$ to wektor prędkości chwilowej w momencie t. Oczywiście prędkość jest styczna do drogi. Te kilka zdań to oczywiście agitacja, ale jedna z definicji wektora stycznego do krzywej to właśnie one (po opuszczeniu treści fizycznej, która jest przyczyną przyjęcia właśnie takiej definicji wektora stycznego) . W szczegóły wchodzić nie będziemy z braku czasu.

Załóżmy, że $f\colon \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ i $\gamma\colon(-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}^k$ są funkcjami różniczkowalnymi oraz że istnieje taka liczba c, że $f\big(\gamma(t)\big) = c$ dla $t \in (-1,1)$. Wtedy

$$0 = (f\circ\gamma)'(0) = Df\big(\gamma(0)\big)\cdot\gamma'(0) = \mathrm{grad}\ f\big(\gamma(0)\big)\cdot\gamma'(0)\,.$$

Wykazaliśmy, że wektory grad $f\big(\gamma(0)\big)$ i $\gamma'(0)$ są prostopadłe. Jeśli poprowadzimy przez punkt $\mathbf{p} := \gamma(0)$ wszystkie możliwe krzywe różniczkowalne, to otrzymamy wszystkie wektory styczne do „powierzchni” $f(\mathbf{x}) = c$ w punkcie $\mathbf{p}$. Każdy z nich jest prostopadły do gradientu funkcji f w punkcie $\mathbf{p}$. Oznacza to, że gradient jest prostopadły do „płaszczyzny”* Jeśli ten gradient jest niezerowy, to możemy znaleźć równanie „płaszczyzny stycznej”.

Przykład 16.5 Niech $f(x,y) = y - \sin x$ i niech $c = 0$. Zbiór M zdefiniowany równaniem $0 = f(x,y)$ to wykres funkcji sinus. Niech $\mathbf{p} = (\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$. Mamy więc $f(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \sin\frac{\pi}{6} = 0$, czyli $\mathbf{p} \in M$. Wektory styczne do zbioru M (czyli do sinusoidy) w punkcie $\mathbf{p}$ są prostopadłe do wektora

$$\mathrm{grad}\ f(\tfrac{\pi}{6}, \tfrac{1}{2}) = (-\cos\tfrac{\pi}{6}, 1) = (-\tfrac{\sqrt{3}}{2}, 1)\,.$$

Jeśli punkt (x,y) leży na stycznej do M w punkcie $\mathbf{p}$, to

$$0 = (-\tfrac{\sqrt{3}}{2}, 1)\cdot(x - \tfrac{\pi}{6}, y - \tfrac{1}{2}) = -\tfrac{\sqrt{3}}{2}(x - \tfrac{\pi}{6}) + (y - \tfrac{1}{2})\,.$$

Czytelnik bez trudu rozpozna równanie prostej stycznej do sinusoidy w punkcie $\mathbf{p} = (\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$, które poprzednio otrzymywaliśmy nieco inaczej. Zauważy też, że w przypadku wykresu dowolnej funkcji różniczkowalnej otrzymany na opisanej teraz drodze rezultat będzie identyczny z uzyskiwanym przez skorzystanie z definicji prostej stycznej do wykresu funkcji podanej w pierwszym semestrze. ■

Przykład 16.6 Niech $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ i niech $c = 14$. Niech M będzie zbiorem złożonym z tych punktów (x,y,z), dla których zachodzi równość

$$14 = c = f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2\,.$$

Oczywiście $\mathbf{p} := (1,-2,3) \in M$. Zbiór M jest sferą, której środkiem jest punkt $(0,0,0)$ i której promień jest równy $\sqrt{14}$. Znajdziemy płaszczyznę Π styczną do tej sfery w punkcie $\mathbf{p} = (1,-2,3)$. Mamy grad $f(1,-2,3) = (2,-4,6)$.

Jeśli $(x,y,z) \in \Pi$, to

* To nie zawsze jest płaszczyzna, np. zwykle wymiar równy jest $k-1$, więc dla $k>3$ mówimy na ogół o przestrzeni stycznej do powierzchni $f(\mathbf{x})=c$.

$$0=(x-1,y+2,z-3)\cdot(2,-4,6)=2(x-1)-4(y+2)+6(z-3)\,.$$

Otrzymaliśmy równanie płaszczyzny stycznej do sfery M w punkcie $(1,-2,3)$. ■

Przykład 16.7 Układ równań $y=0$ i $(x-7)^2+z^2=25$ opisuje okrąg o środku w punkcie $(7,0,0)$ i promieniu 5 leżący w płaszczyźnie wyznaczonej przez osie OX i OZ. Równanie $(x-7)^2+z^2=25$ możemy przepisać w postaci $14x=x^2+z^2+24$. Z tego równania wynika, że $196x^2=(x^2+z^2+24)^2$ przy czym to ostatnie równanie równoważne jest poprzedniemu przy założeniu, że $x\geq 0$. Zastępując x^2 w równaniu $196x^2=(x^2+z^2+24)^2$ przez x^2+y^2 otrzymujemy równanie powierzchni powstałej w wyniku obrotu okręgu $(x-7)^2+z^2=25$ leżącego w płaszczyźnie $y=0$ wokół osi OZ — ta powierzchnia wygląda jak napompowana dętka, np. rowerowa; matematycy zwą ją torusem. Tak otrzymane równanie tej powierzchni ma postać

$$196(x^2+y^2)=\big(x^2+y^2+z^2+24\big)^2\,.$$

Łatwo można przekonać się, że jednym z punktów tej powierzchni jest $\mathbf{p}:=(6,8,4)$. Niech $f(x,y,z)=\big(x^2+y^2+z^2+24\big)^2-196(x^2+y^2)$. Jasne jest, że równanie torusa można zapisać jako $f(x,y,z)=0$. Zachodzi równość

grad $f(x,y,z)=\big(2x(x^2+y^2+z^2)-392x,2y(x^2+y^2+z^2)-392y,2z(x^2+y^2+z^2)\big)$. Z niej wynika, że grad $f(6,8,4)=(-960,-1080,928)$. Równanie płaszczyzny stycznej ma więc postać:

$$0=(x-6,y-8,z-4)\cdot(-960,-1280,928)=-960(x-6)-1280(y-8)+928(z-4)\,.$$

Po podzieleniu przez 32 otrzymujemy $-30(x-6)-40(y-8)+29(z-4)$, czyli

$$30x+40y-29z-384=0\,.$$ ■

Uwaga 16.20 (na deser) Najprostsze funkcje to liniowe.

Jeśli $f(x,y)=Ax+By+C$, to grad $f(x,y)=[]A,B]$. Wynika stąd, że wektor (A,B) jest prostopadły do prostej stycznej zbioru opisanego równaniem $0=f(x,y)=Ax+By+C$, czyli do prostej $Ax+By+C=0$.

Jeśli $f(x,y,z)=Ax+By+Cz+D$, to grad $f(x,y,z)=(A,B,C)$, więc wektor (A,B,C) jest prostopadły do płaszczyzny stycznej do zbioru opisanego równaniem $0=f(x,y,z)=Ax+By+Cz+D$, więc do płaszczyzny $Ax+By+Cz+D=0$.

To akurat wiemy od dawna. Okazało się jednak, że jest to szczególny przypadek ogólniejszego twierdzenia. ■

Znajdowanie kresów funkcji — przykłady

Przykład 16.8 Niech $f\binom{x}{y}=\frac{xy}{x^2+y^2}$. Znajdziemy kresy tej funkcji w zbiorze $\mathbb{R}^2\setminus\{\mathbf{0}\}$. Zauważmy najpierw, że jeśli $t\neq 0$, to $f(t\mathbf{x})=f(\mathbf{x})$ dla dowolnego $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$, własność ta nazywana jest jednorodnością stopnia 0 funkcji. Wynika stąd, że w celu znalezienia kresów funkcji f wystarczy rozpatrywać jej wartości w punktach dowolnie ustalonego okręgu o środku w punkcie $\mathbf{0}$, np. okręgu o promieniu 1. Okrąg ten jest oczywiście zbiorem domkniętym i ograniczonym, czyli zwartym. Wobec tego nasza funkcja przyjmuje w jakimś punkcie tego okręgu swą największą wartość i w jakimś innym punkcie tego okręgu swą wartość najmniejszą. Wobec tego, że funkcja ta jest jednorodna stopnia 0, ta najmniejsza wartość jest **najmniejszą wartością w całej dziedzinie funkcji** i przyjmowana jest nie tylko w jednym punkcie, ale we wszystkich punktach prostej przechodzącej przez ten punkt i $\mathbf{0}$, z wyjątkiem oczywiście punktu $\mathbf{0}$, w którym funkcja nie jest zdefiniowana. To samo można powiedzieć o wartości największej.

Mamy $\frac{\partial f}{\partial x}\binom{x}{y} = \frac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2}$ oraz $\frac{\partial f}{\partial y}\binom{x}{y} = \frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2}$. Widać, że gradient jest wektorem zerowym wtedy i tylko wtedy, gdy $x^2 = y^2$, czyli gdy $x = \pm y$. Podstawiając $x = \pm y$ otrzymujemy $f\binom{x}{x} = \frac{1}{2}$ oraz $f\binom{x}{-x} = -\frac{1}{2}$. Wynika stąd, że największą wartością tej funkcji jest $\frac{1}{2}$ zaś najmniejszą $-\frac{1}{2}$. Szukanie kresów zostało zakończone.

Nadmienić wypada, że rozwiązane przed chwilą zadanie można rozwiązać nic o pochodnych nie wiedząc. Znajdziemy kres górny wartości funkcji. Mamy znaleźć najmniejszą liczbę k, taką że jeśli $\binom{x}{y} \neq \binom{0}{0}$ zachodzi nierówność $\frac{xy}{x^2+y^2} \leq k$, tzn. $kx^2 - xy + ky^2 \geq 0$. Oczywiście $k \geq \frac{1}{2} = \frac{1\cdot 1}{1^2+1^2}$. Dla $k = \frac{1}{2}$ nierówność przybiera postać: $0 \leq \frac{1}{2}x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}(x-y)^2$, więc jest prawdziwa. Stąd od razu wynika, że liczba $\frac{1}{2}$ jest kresem górnym funkcji $\frac{xy}{x^2+y^2}$. Z równości $f\binom{-x}{y} = -f\binom{x}{y}$ wynika natychmiast, że kresem dolnym funkcji f jest $-\frac{1}{2}$.

Uwaga: okazało się, że grad $f\binom{x}{y} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\binom{-y}{x}$, *więc ten wektor jest prostopadły do wektora* $\binom{x}{y}$, *wobec tego pochodna kierunkowa w kierunku wektora* $\binom{x}{y}$ *i każdego do niego równoległego równa jest 0, zatem funkcja* f *jest stała na półprostej wychodzącej z* $\mathbf{0}$ *i przechodzącej przez* $\binom{x}{y}$ *— korzystaliśmy z tego w rozwiązaniu, a teraz pokazaliśmy inne, bardziej „uczone" uzasadnienie tego stwierdzenia.* ■

Przykład 16.9 Niech $f\binom{x}{y} = \frac{xy}{x^2-2xy+9y^2}$. Funkcja ta jest poprawnie określona w zbiorze $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, bo $x^2 - 2xy + 9y^2 = (x-y)^2 + 5y^2 = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $y = 0 = x - y$, czyli gdy $\binom{x}{y} = \binom{0}{0}$. Znajdziemy kresy tej funkcji w zbiorze $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Podobnie jak w poprzednim przykładzie $f(t\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ dla dowolnych $t \neq 0$ i $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, więc w celu znalezienia kresów funkcji f wystarczy rozpatrywać jej wartości w punktach dowolnie ustalonego okręgu o środku w punkcie $\mathbf{0}$, np. okręgu o promieniu 1. Okrąg ten jest oczywiście zbiorem domkniętym i ograniczonym, czyli zwartym. Wobec tego nasza funkcja przyjmuje w jakimś punkcie tego okręgu swą największą wartość i w jakimś innym punkcie tego okręgu swą wartość najmniejszą. Ta najmniejsza wartość jest najmniejszą wartością w całej dziedzinie funkcji i przyjmowana jest nie tylko w jednym punkcie, ale we wszystkich punktach prostej przechodzącej przez ten punkt i $\mathbf{0}$, z wyjątkiem oczywiście punktu $\mathbf{0}$, w którym funkcja nie jest zdefiniowana. To samo dotyczy wartości największej.

Mamy $\frac{\partial f}{\partial x}\binom{x}{y} = \frac{9y^3-x^2y}{(x^2-2xy+9y^2)^2}$ oraz $\frac{\partial f}{\partial y}\binom{x}{y} = \frac{x^3-9xy^2}{(x^2-2xy+9y^2)^2}$. Widać, że gradient jest wektorem zerowym wtedy i tylko wtedy, gdy $x^2 = 9y^2$, czyli gdy $x = \pm 3y$. Podstawiając $x = \pm 3y$ otrzymujemy $f\binom{3y}{y} = \frac{1}{4}$ oraz $f\binom{3y}{-y} = -\frac{1}{4}$. Wynika stąd, że największą wartością tej funkcji jest $\frac{1}{4}$ zaś najmniejszą $-\frac{1}{8}$. Szukanie kresów zostało zakończone.

Nadmienić wypada, że rozwiązane przed chwilą zadanie może rozwiązać licealista, który nic o pochodnych nie wie.

Znajdziemy kres górny wartości funkcji, czyli taką najmniejszą liczbę $k \in \mathbb{R}$, że jeśli $\binom{x}{y} \neq \binom{0}{0}$, to $\frac{xy}{x^2-2xy+9y^2} \leq k$, tzn. $kx^2 - (2k+1)xy + 9ky^2 \geq 0$. Oczywiście $k \geq \frac{1}{8} = \frac{1\cdot 1}{1^2-2\cdot 1\cdot 1+9\cdot 1^2} > 0$. Aby nierówność $kx^2-(2k+1)xy+9ky^2 \geq 0$ była spełniona dla wszystkich liczb x przy ustalonych k i y, wyróżnik trójmianu kwadratowego nie może być dodatni:
$0 \geq \Delta = (2k+1)^2y^2 - 36k^2y^2 = y^2(2k+1-6k)(2k+1+6k) = y^2(1-4k)(1+8k)$, co oznacza, że $1-4k \leq 0$, czyli $k \geq \frac{1}{4}$. Dla $k = \frac{1}{4}$ nierówność przybiera postać: $\frac{1}{4} \geq \frac{xy}{x^2-2xy+9y^2}$, czyli♠ $x^2 - 2xy + 9y^2 \geq 4xy$, tzn. $0 \leq x^2 - 6xy + 9y^2 = (x-3y)^2$, więc jest prawdziwa. Liczba $\frac{1}{4}$ jest zatem kresem górnym funkcji $\frac{xy}{x^2-2xy+9y^2}$.

Jeśli nierówność $\frac{xy}{x^2-2xy+9y^2} \geq k$ zachodzi dla wszystkich $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\binom{0}{0}\}$, to $k \leq \frac{(-1)\cdot 1}{(-1)^2-2(-1)\cdot 1+9\cdot 1^2} = -\frac{1}{12} < 0$, więc k musi być liczbą ujemną. Nierówność $\frac{xy}{x^2-2xy+9y^2} \geq k$ jest równoważna nierówności $kx^2 - (2k+1)xy + 9ky^2 \leq 0$,a ta zachodzi dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ przy ustalonym y i $k < 0$, gdy
$0 \geq \Delta = (2k+1)^2y^2 - 36k^2y^2 = y^2(2k+1-6k)(2k+1+6k) = y^2(1-4k)(1+8k)$, więc gdy $1+8k \leq 0$, czyli gdy $k \leq -\frac{1}{8}$. Nierówność $\frac{xy}{x^2-2xy+9y^2} \geq -\frac{1}{8}$ jest równoważna nierówności $0 \leq x^2 + 6xy + 9y^2 = (x+3y)^2$, więc jest prawdziwa. Oznacza to, że kresem dolnym funkcji $\frac{xy}{x^2-2xy+9y^2}$ jest liczba $-\frac{1}{8}$. ■

♠ Mianownik jest dodatni: $x^2-2xy+9y^2>0$, gdy $x \neq 0$ lub $y \neq 0$

Przykład 16.10 Znajdziemy najmniejszą i największą wartość wyrażenia xy^2z^3 założywszy, że $x, y, z \geq 0$ i $x + y + z = 6$.

Niech $C = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) : \quad x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x + y + z = 6 \right\}$ i $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = xy^2z^3$. Funkcja f jest ciągła na $\mathbb{R}^3$, więc również na zbiorze C. Zbiór C jest ograniczony, bo jeśli punkt $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ znajduje się zbiorze C, to $0 \leq x \leq 6$, $0 \leq y \leq 6$, $0 \leq z \leq 6$. Jest też domknięty, to jeśli $\left(\begin{smallmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{smallmatrix}\right) \in C$, czyli $x_n \geq 0$, $y_n \geq 0$, $z_n \geq 0$, $x_n + y_n + z_n = 6$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$, to również $0 \leq x$, $0 \leq y$, $0 \leq z$ i $x+y+z = 6$, czyli $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in C$. Ograniczony i domknięty podzbiór $\mathbb{R}^3$ jest zwarty, więc funkcją ciągła określona na tym zbiorze przyjmuje w jakimś jego punkcie wartość najmniejszą i w jakimś punkcie wartość największą. C oczywiście nie zawiera żadnej kuli, więc nie można tu stosować twierdzenia o zerowaniu się gradientu w punktach lokalnego ekstremum. Można natomiast wyznaczyć jedną z trzech zmiennych za pomocą dwu pozostałych, np. $x = 6-y-z$ i rozważyć funkcję dwu zmiennych: $g\binom{y}{z} = (6-y-z)y^2z^3$ na zbiorze $D = \left\{ \binom{y}{z} : \quad 0 \leq y,\ 0 \leq z,\ y + z \leq 6 \right\}$. Zbiór D, podobnie jak C, jest zwarty. Funkcja g jest ciągła w każdym punkcie płaszczyzny, więc również w punktach zbioru D i wobec tego przyjmuje w jakimś punkcie tego zbioru wartość najmniejszą i w jakimś punkcie — wartość największą. Łatwo zauważyć, że zbiór D jest trójkątem prostokątnym równoramiennym którego wierzchołkami są punkty $\binom{0}{0}$, $\binom{6}{0}$ i $\binom{0}{6}$.

Na brzegu tego trójkąta, czyli w punktach prostej $y = 0$, w punktach prostej $z = 0$ oraz w punktach prostej $y + z = 6$ funkcja g przyjmuje wartość 0.

Wewnątrz trójkąta przyjmuje wartości dodatnie. Wobec tego jej najmniejszą wartością jest liczba 0, a wartość największa jest przyjęta w pewnym punkcie wewnętrznym. W tym punkcie wewnętrznym gradient funkcji g jest równy $\mathbf{0}$.

Mamy $\operatorname{grad} g\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y^2z^3 + 2yz^3(6-y-z) \\ -y^2z^3 + 3y^2z^2(6-y-z) \end{pmatrix}$. Obie współrzędne mają być równe 0, a ponieważ szukamy punktów wewnątrz trójkąta D, więc $y > 0$ i $z > 0$, zatem muszą być spełnione równości $\begin{cases} -y + 2(6-y-z) = 0, \\ -z + 3(6-y-z) = 0, \end{cases}$ czyli $\begin{cases} 3y + 2z = 12, \\ 3y + 4z = 18. \end{cases}$ Wynika stąd, że $z = 3$ i $y = 2$. Ponieważ wartość największa jest przyjmowana w pewnym punkcie, a jedynym kandydatem jest punkt $\binom{2}{3}$, więc największą wartością funkcji g na zbiorze D jest liczba $g\binom{2}{3} = (6-2-3)2^2 3^3 = 108$. ■

Przykład 16.11 Niech $f\binom{x}{y} = xy^2e^{-x-2y}$. Znajdziemy kresy tej funkcji w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych, tj. w zbiorze $C = \left\{ \binom{x}{y} : \quad x \geq 0, y \geq 0 \right\}$. We wszystkich punktach brzegu zbioru funkcja przyjmuje wartość 0, wewnątrz wartości są dodatnie. Kresem dolnym jest więc 0. Zajmiemy się kresem górnym. Zachodzi równość $\operatorname{grad} f\binom{x}{y} = \binom{y^2(1-x)}{xy(2-2y)}e^{-x-2y}$. Jedynym punktem zerowania się gradientu funkcji f wewnątrz dziedziny jest punkt $\binom{1}{1}$. Wartość funkcji w tym punkcie równa jest e^{-3}. Z wzoru $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \cdots$ wynika, że w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych zachodzi $e^{x+2y} \geq \frac{(x+2y)^4}{4!}$. Stąd wynika, że

$$f\binom{x}{y} = xy^2e^{-x-2y} = \frac{xy^2}{e^{x+2y}} \leq \frac{4!xy^2}{(x+2y)^4} \leq \frac{4!}{x+2y} < e^{-3},$$

gdy $x + 2y > 4!e^3$. Wobec tego kres górny funkcji w pierwszej ćwiartce jest taki sam jak w zbiorze $\left\{\binom{x}{y}\colon \quad x \geq 0,\, y \geq 0,\, x + 2y \leq 4!e^3\right\}$. Ten ostatni zbiór jest zwarty, więc funkcja f, jako ciągła, przyjmuje w jakimś jego punkcie wartość największą, która jest oczywiście większa lub równa e^{-3}. Wobec tego, że na brzegu tego zbioru zachodzi co najmniej jedna z równości: $x = 0$, $y = 0$, $x + 2y = 4!e^3$, wartość największa przyjmowana jest w punkcie wewnętrznym. W tym punkcie gradient musi być wektorem zerowym. Wobec tego jest to punkt $\binom{1}{1}$. Wobec tego kresem górnym tej funkcji jest liczba $f\binom{1}{1} = e^{-3}$. Zadanie zostało rozwiązane.

Drugi sposób znalezienia kresu górnego.

Do momentu znalezienia gradientu rozumujemy tak, jak poprzednio. Mamy więc $\frac{\partial f}{\partial x}\binom{x}{y} = y^2(1-x)e^{-x-2y}$. Jeśli więc potraktujemy y jako stałą, to wraz ze wzrostem x funkcja f rośnie na przedziale $[0,1]$ i maleje na półprostej $[1,+\infty)$. Wobec tego jej największą wartością jest $f\binom{1}{y} = y^2e^{-1-2y}$.

Teraz znajdujemy największą wartość funkcji y^2e^{-1-2y} na półprostej $[0,\infty)$. Pochodną jest funkcja $\frac{\partial f}{\partial y}\binom{1}{y} = 2y(1-y)e^{-1-2y}$, której wartości są dodatnie na przedziale $(0,1)$, a ujemne na półprostej $(1,\infty)$. Wobec tego funkcja y^2e^{-1-2y} rośnie na przedziale $[0,1]$, a na półprostej $[1,\infty)$ — maleje. Jej największą wartością jest więc liczba $f\binom{1}{1} = e^{-3}$.

To zadanie można od razu sprowadzić do poszukiwania wartości największych i najmniejszych funkcji jednej zmiennej, bo interesująca nas funkcja jest iloczynem dwu funkcji nieujemnych: funkcji xe^{-x} zmiennej x oraz funkcji y^2e^{-2y} zmiennej y, ta obserwacja oczywiście upraszcza rozwiązanie! ■

Przykład 16.12 Niech $f\binom{x}{y} = (x+3y)e^{-x^2-3y}$. Znajdziemy kresy tej funkcji w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych, tj. w zbiorze $C = \left\{\left(\binom{x}{y}\right)\colon\ x \geq 0, y \geq 0\right\}$. Zauważmy, że we wszystkich punktach zbioru C wartości funkcji są liczbami nieujemnymi przy czym tylko w punkcie $\binom{0}{0}$ wartością jest 0, w pozostałych punktach wartości są dodatnie. Wynika stąd od razu, że kresem dolnym funkcji jest liczba 0. Znajdziemy kres górny funkcji f. Rozpoczniemy od znalezienia gradientu funkcji: $\operatorname{grad} f\binom{x}{y} = \binom{1-2x(x+3y)}{1-x-3y} \cdot e^{-x^2-3y}$. Gradient ten równy jest $\mathbf{0}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = \frac{1}{2}$ i jednocześnie $y = \frac{1}{6}$. Wartością funkcji w tym punkcie jest $e^{-3/4}$. Z wzoru $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \cdots$ wynika, że jeśli $x, y \geq 0$, to $e^{x^2+3y} \geq \frac{(x^2+3y)^2}{2!}$. Stąd

$$f\binom{x}{y} = (x+3y)e^{-x^2-3y} \leq \frac{2!(x+3y)}{(x^2+3y)^2} = \frac{2x+6y}{x^4+6x^2y+9y^2} \leq \frac{\sqrt{2^2+6^2}\sqrt{x^2+y^2}}{x^4+6x^2y+9y^2} = \frac{\sqrt{40}\sqrt{x^2+y^2}}{x^4+6x^2y+9y^2}.$$

Mianownik jest sumą składników stopnia 2 lub większego, wobec tego dla „dużych" argumentów powinien być dużo większy od licznika. Załóżmy, że $x + y > 10$, $x \geq 0$ oraz $y \geq 0$. Wykażemy, że wtedy zachodzi nierówność $x^4 + 6x^2y + 9y^2 \geq x^2 + y^2$:

$$x^4 + 6x^2y + 9y^2 - (x^2 + y^2) = x^4 + (6y-1)x^2 + 8y^2 \geq$$
$$\geq x^4 + \big(6(10-x) - 1\big)x^2 = x^2(x^2 - 6x + 59) = x^2\left((x-3)^2 + 50\right) \geq 0.$$

Wobec tego $f\binom{x}{y} \leq \frac{\sqrt{40}\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = \frac{\sqrt{40}}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Jeśli $x + y > 100$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, to

$$x^2 + y^2 \geq \tfrac{1}{2}(x+y)^2 > 5000, \qquad \text{więc } f\binom{x}{y} \leq \frac{\sqrt{40}}{\sqrt{5000}} < \frac{1}{10} < \frac{1}{4} = 1 - \frac{3}{4} \leq e^{-3/4}.$$

Wobec tego kres górny funkcji f w zbiorze C jest równy kresowi górnemu tej funkcji w zbiorze $D = \left\{\binom{x}{y}\colon \quad x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 100\right\}$. D jest zbiorem zwartym, więc kres górny funkcji f jest jej wartością w pewnym punkcie tego zbioru. Może to być punkt wewnętrzny, w którym gradient jest równy $\mathbf{0}$ lub też punkt z brzegu tego zbioru. W punktach brzegu musi zachodzić jedna z trzech równości $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 100$. Ostatni przypadek nie jest interesujący, bo już wykazaliśmy, że w takich punktach wartości funkcji są mniejsze niż $f\binom{1/2}{1/6} = e^{-3/4}$. Załóżmy więc, że $y = 0$. Mamy teraz do czynienia z wyrażeniem xe^{-x^2}, którego pochodna równa jest $(1-2x^2)e^{-x^2}$, więc jest dodatnia w przedziale $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ natomiast w każdym punkcie półprostej $(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$ pochodna ta jest ujemna. Wynika stąd, że wyrażenie xe^{-x^2} przyjmuje swą największa wartość w punkcie $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Tą największą wartością jest $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}$. Liczba ta jest mniejsza niż $e^{-3/4}$, można to sprawdzić bez użycia sprzętu elektronicznego podnosząc obie liczby do potęgi 4 i korzystając z nierówności $e < 4$. Musimy jeszcze zbadać wyrażenie ye^{-3y}. Jego pochodna to $(1-3y)e^{-3y}$, jest ona dodatnia na przedziale $(0, \frac{1}{3})$, ujemna – na półprostej $(\frac{1}{3}, +\infty)$, zatem wyrażenie to przyjmuje swą wartość największą w punkcie $y = \frac{1}{3}$ i wartość ta jest równa $\frac{1}{3}e^{-1}$ i jest ona mniejsza niż $e^{-3/4}$. Wykazaliśmy w ten sposób, że kresem górnym funkcji f w zbiorze C jest liczba $e^{-3/4} = f\binom{1/2}{1/6}$.

Drugi sposób znalezienia kresu górnego.

Podobnie jak w poprzednim przykładzie możemy znaleźć kres górny funkcji f badając kolejno dwie funkcje jednej zmiennej. Potraktujemy wyrażenie $(x+3y)e^{-x^2-3y}$ jako funkcję zmiennej y, a $x \geq 0$ — jako parametr. Pochodna tego wyrażenia to $\frac{\partial f}{\partial y}\binom{x}{y} = 3(1-x-3y)e^{-x^2-3y}$. Jeśli $x \geq 1$, to pochodna ta jest ujemna dla $y > 0$, więc wyrażenie $(x+3y)e^{-x^2-3y}$ maleje ze wzrostem zmiennej y, więc jego największą wartością jest xe^{-x^2}. Jeśli $0 \leq x < 1$, to w przedziale $(0, \frac{1-x}{3})$ pochodna jest dodatnia a na półprostej $(\frac{1-x}{3}, +\infty)$ – ujemna, wobec tego w tym przypadku największą jego wartością jest $\left(x + 3\frac{1-x}{3}\right)e^{-x^2-3(1-x)/3} = e^{-x^2+x-1}$. Trzeba teraz znaleźć kres górny funkcji zmiennej x określonej w przedziale $[0,1)$ wzorem e^{-x^2+x-1} a na półprostej $[1,+\infty)$ – wzorem xe^{-x^2}. W pierwszym przypadku możemy skorzystać z równości $-x^2+x-1 = -(x-\frac{1}{2})^2 - \frac{3}{4}$, a w drugim stwierdzamy po obliczeniu pochodnej, że na interesującej nas półprostej $[1,+\infty)$ funkcja maleje. Stąd wynika, że największą wartością tej funkcji zmiennej x jest wartość w punkcie $x = \frac{1}{2}$ i jest ona równa $e^{-3/4}$. ■

Przykład 16.13 Niech $f\binom{x}{y} = (x+y)e^{-x^2-3y}$. Znajdziemy kresy tej funkcji w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych, tj. w zbiorze $C = \left\{\binom{x}{y}:\quad x \geq 0, y \geq 0\right\}$. Będziemy postępować tak, jak w przykładzie poprzednim, bo funkcja jest podobna. Mamy grad $f\binom{x}{y} = \left(\binom{1-2x(x+y)}{1-3x-3y}\right)\cdot e^{-x^2-3y}$. Ten gradient zeruje się jedynie w punkcie $\binom{3/2}{-7/6}$, który to punkt leży *poza* pierwszą ćwiartką. Wewnątrz pierwszej ćwiartki funkcja jest dodatnia, na brzegu też, z wyjątkiem punktu $\mathbf{0}$, w którym wartością f jest liczba 0. Wobec tego kresem dolnym jest 0. Należy znaleźć kres górny. Mamy $e^{x^2+3y} \geq \frac{(x^2+3y)^2}{2!} = \frac{1}{2}(x^4+6x^2y+9y^2)$ w każdym punkcie zbioru C. Jeśli założymy dodatkowo, że $x+y \geq 10$, to $\frac{1}{2}(x^4+6x^2y+9y^2) \geq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$, co wykazaliśmy w poprzednim przykładzie. Wobec tego

$$f\binom{x}{y} = (x+y)e^{-x^2-3y} \leq \frac{2(x+y)}{x^2+y^2} \leq \frac{2\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Mamy $f\binom{1}{1} = 2e^{-4} > \frac{2}{3^4} > \frac{2}{100} = \frac{1}{50}$. Jeśli więc $\sqrt{x^2+y^2} \geq 2\sqrt{2}\cdot 50$ $\left(x, y \geq 0 \Rightarrow x+y \geq \sqrt{x^2+y^2}\right)$, to $f\binom{x}{y} < f\binom{1}{1}$, zatem kres górny funkcji f w zbiorze C równy jest kresowi górnemu funkcji f w zbiorze

$$D = \left\{\binom{x}{y}:\quad \sqrt{x^2+y^2} \leq 2\sqrt{2}\cdot 50,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}.$$

Ten zbiór jest zwarty, więc kres górny funkcji ciągłej f w tym zbiorze jest jej wartością w pewnym punkcie tego zbioru. Nie może to być jego punkt wewnętrzny, bo gradient się nie zeruje. Musi więc to być punkt brzegowy. W grę wchodzą teoretycznie trzy możliwości: $\sqrt{x^2+y^2} = 2\sqrt{2}\cdot 50$, $x=0$ i $y=0$. Pierwsza została już wykluczona, bo w punktach dla których $\sqrt{x^2+y^2} = 2\sqrt{2}\cdot 50$, wartość funkcji f jest mniejsza niż jej wartość w punkcie $\binom{1}{1}$. Jeśli $x=0$, to mamy do czynienia z wyrażeniem ye^{-3y}, którego największą wartością jest $\frac{1}{3}e^{-1}$, co można łatwo sprawdzić (zob. przykład poprzedni). Jeśli $y=0$, to mamy do czynienia z wyrażeniem xe^{-x^2}, które przyjmuje swą największą wartość w punkcie $\frac{1}{\sqrt{2}}$, wartość ta równa jest $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}$. Ta ostatnia liczba, większa niż $\frac{1}{3}e^{-1}$, jest kresem górnym funkcji f w zbiorze D, więc również w zbiorze C. Podobnie jak w poprzednich przykładach można rzecz całą sprowadzić do kolejnego badania dwu funkcji jednej zmiennej rzeczywistej, najpierw np. zmiennej y, potem zmiennej x. Zachęcamy czytelnika do samodzielnego rozwiązania tego zadania drugim sposobem.

Zadanie rozpatrywane w tym przykładzie jest pozornie prawie tożsame z poprzednim. Jednak czasem pozory mylą! ■

Przykład 16.14 Wykażemy, że gradient funkcji f zdefiniowanej wzorem

$$f\binom{x}{y} = 2(1-e^{2y}+x^2)^3 - 3(1-e^{2y}+x^2)^2 - 24x^2e^{2y}$$

zeruje się w dokładnie jednym punkcie, że w tym punkcie funkcja ma lokalne maksimum właściwe, chociaż jest nieograniczona z góry (i z dołu).

Zaczniemy od kresów. Mamy $f\binom{x}{0} = 2x^6 - 3x^4 - 24x^2 \xrightarrow[x\to\infty]{} +\infty$, zatem $\sup f = +\infty$. Mamy też

$$f\binom{0}{y} = 2(1-e^{2y})^3 - 3(1-e^{2y})^2 = (1-e^{2y})^2\big(2(1-e^{2y})-3\big) \xrightarrow[y\to\infty]{} -\infty,$$

bo $1-e^{2y} \xrightarrow[y\to\infty]{} -\infty$, zatem $\inf f = -\infty$. Kresy znaleźliśmy bez trudu.

Przejdziemy do ekstremów lokalnych. Znajdziemy najpierw pochodne cząstkowe, bo w punkcie, w którym funkcja ma lokalnie najmniejszą bądź lokalnie największą wartość pochodne cząstkowe zerują się. Mają więc zachodzić równości

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}\binom{x}{y} = \Big(6(1-e^{2y}+x^2)^2 - 6(1-e^{2y}+x^2) - 24e^{2y}\Big)\cdot 2x \qquad \text{oraz}$$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial y}\binom{x}{y} = \Big(6(1-e^{2y}+x^2)^2 - 6(1-e^{2y}+x^2) + 24x^2\Big)\cdot(-2e^{2y}).$$

Ponieważ dla każdego $y\in\mathbb{R}$ zachodzi $e^{2y}>0$, więc musi zachodzić równość

$$0 = 6(1-e^{2y}+x^2)^2 - 6(1-e^{2y}+x^2) + 24x^2$$

Stąd wynika, że

$$0 \geq 6(1-e^{2y}+x^2)^2 - 6(1-e^{2y}+x^2) > 6(1-e^{2y}+x^2)^2 - 6(1-e^{2y}+x^2) - 24e^{2y},$$

a wobec tego z równości $0 = \frac{\partial f}{\partial x}\binom{x}{y} = \ldots$ wynika, że $x=0$. Stąd i z równości $\frac{\partial f}{\partial y}\binom{x}{y} = 0$ wnioskujemy, że $6(1-e^{2y})^2 - 6(1-e^{2y}) = 0$, zatem $1-e^{2y} = 1$ lub

$1-e^{2y}=0$. Pierwsza równość nigdy nie zachodzi, więc $1-e^{2y}=0$, czyli $y=0$. Jest więc tylko jeden punkt, w którym gradient badanej funkcji jest wektorem zerowym. Funkcja może mieć ekstremum lokalne jedynie w tym punkcie. Jeśli $x^2+y^2<\frac{1}{100}$, to $|1-e^{2y}+x^2|<1$, zatem $|1-e^{2y}+x^2|^3\leq|1-e^{2y}+x^2|^2$, przy czym równość ma miejsce jedynie wtedy, gdy $1-e^{2y}+x^2=0$. Jeśli dodatkowo $\binom{x}{y}\neq\binom{0}{0}$, to $f\binom{x}{y}=2(1-e^{2y}+x^2)^3-3(1-e^{2y}+x^2)^2-24x^2e^{2y}\leq-(1-e^{2y}+x^2)^2-24x^2e^{2y}<0$. Oznacza to, że liczba $f\binom{0}{0}$ jest największą spośród wartości przyjmowanych w kole zdefiniowanym nierównością $x^2+y^2<\frac{1}{100}$, więc w punkcie $\binom{0}{0}$ funkcja f ma lokalne maksimum właściwe.

Zagadka: jak wygląda wykres tej funkcji ?! — to drobne ćwiczenie na wyobraźnię, wykres to powierzchnia dwuwymiarowa w trójwymiarowej przestrzeni, ma on jeden „szczyt” — lokalne maksimum, żadnych „przełęczy”, „dolin”, bo gradient jest niezerowy, a jednak pnie się dowolnie wysoko w górę i opada dowolnie nisko w dół. ■

W teorii różniczkowania funkcji jednej zmiennej rzeczywistej kluczową rolę odgrywało twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej. Nie jest ono niestety prawdziwe nawet dla funkcji jednej zmiennej rzeczywistej, której wartościami są punkty płaszczyzny.

Przykład 16.15 Niech $f(t)=\binom{\cos t}{\sin t}$. Wtedy $Df(t)=\binom{-\sin t}{\cos t}$. Mamy również $f(2\pi)=\binom{1}{0}=f(0)$. Gdyby twierdzenie Lagrange'a było prawdziwe w takiej wersji, jak dla funkcji o wartościach rzeczywistych, to istniałaby taka liczba $c\in(0,2\pi)$, że $\binom{0}{0}=f(2\pi)-f(0)=f'(c)\cdot(2\pi-0)=2\pi\binom{-\sin c}{\cos c}$, a to jest niemożliwe, bo $\sin^2 c+\cos^2 c=1$, więc liczby $\cos c$ i $\sin c$ nie zerują się dla jednego c. ■

Twierdzenie 16.21 (Lagrange'a o wartości średniej)
Niech $f\colon G\longrightarrow\mathbb{R}^l$ będzie funkcją określoną na zbiorze otwartym $G\subseteq\mathbb{R}^k$ i niech $\mathbf{p},\mathbf{q}\in G$. Załóżmy, że cały odcinek o końcach $\mathbf{p},\mathbf{q}$ jest zawarty w zbiorze G. Dla pewnej liczby $t\in(0,1)$ zachodzi wtedy nierówność

$$\|f(\mathbf{p})-f(\mathbf{q})\|\leq\|\mathbf{p}-\mathbf{q}\|\cdot\|Df\big(\mathbf{p}+t(\mathbf{q}-\mathbf{p})\big)\|;$$

jeśli M jest macierzą, która ma l wierszy i k kolumn, to $\|M\|$ oznacza najmniejszą taką liczbę nieujemną, że nierówność $\|M\cdot\mathbf{v}\|\leq\|M\|\cdot\|\mathbf{v}\|$ zachodzi dla każdego wektora $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^k$. Zachodzi nierówność $\|M\|\leq\sqrt{\sum_{i=1}^{l}\big(\sum_{j=1}^{k}m_{i,j}^2\big)}$, gdzie przez $m_{i,j}$ oznaczyliśmy ten wyraz macierzy M, który stoi na przecięciu i–tego wiersza z j–tą kolumną.

Dowód. Niech $v_1,v_2,\ldots,v_k$ będą kolejnymi współrzędnymi wektora $\vec{\mathbf{v}}\in\mathbb{R}^k$. Wtedy z nierówności Schwarza wynika, że

$\|M\vec{\mathbf{v}}\|^2 = \sum_{i=1}^{l}\big(\sum_{j=1}^{k} m_{i,j}v_j\big)^2 \le \sum_{i=1}^{l}\big(\sum_{j=1}^{k} m_{i,j}^2\cdot\sum_{j=1}^{k} v_j^2\big) =$

$$= \big(\sum_{j=1}^{k} v_j^2\big)\cdot\big(\sum_{i=1}^{l}\big(\sum_{j=1}^{k} m_{i,j}^2\big)\big) = \|\vec{\mathbf{v}}\|^2\cdot\big(\sum_{i=1}^{l}\big(\sum_{j=1}^{k} m_{i,j}^2\big)\big),$$

zatem $\|M\vec{\mathbf{v}}\| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{l}\big(\sum_{j=1}^{k} m_{i,j}^2\big)}\cdot\|\vec{\mathbf{v}}\|$.

Niech $\varphi(t) = \big(f(\mathbf{q})-f(\mathbf{p})\big)\cdot\big(f(\mathbf{p}+t(\mathbf{q}-\mathbf{p}))-f(\mathbf{p})\big)$. φ jest funkcją różniczkowalną określoną na $[0,1]$, bo f jest funkcją różniczkowalną określoną na zbiorze zawierającym odcinek o końcach $\mathbf{p},\mathbf{q}$. Mamy też

$$\varphi'(t) = \big(f(\mathbf{q})-f(\mathbf{p})\big)\cdot\big(Df(\mathbf{p}+t(\mathbf{q}-\mathbf{p}))\cdot(\mathbf{q}-\mathbf{p})\big).$$

Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika, że istnieje liczba $t\in(0,1)$, dla której zachodzi równość

$$\varphi(1)-\varphi(0) = \varphi'(t)\cdot(1-0) = \big(f(\mathbf{q})-f(\mathbf{p})\big)\cdot\big(Df(\mathbf{p}+t(\mathbf{q}-\mathbf{p}))\cdot(\mathbf{q}-\mathbf{p})\big).$$

Ponieważ $\varphi(0)=0$ i $\varphi(1) = \big(f(\mathbf{q})-f(\mathbf{p})\big)\cdot\big(f(\mathbf{p}+(\mathbf{q}-\mathbf{p}))-f(\mathbf{p})\big) = \|f(\mathbf{q})-f(\mathbf{p})\|^2$, więc

$\|f(\mathbf{q})-f(\mathbf{p})\|^2 = \big(f(\mathbf{q})-f(\mathbf{p})\big)\cdot\big(Df(\mathbf{p}+t(\mathbf{q}-\mathbf{p}))\cdot(\mathbf{q}-\mathbf{p})\big) \le$

$$\le \|f(\mathbf{q})-f(\mathbf{p})\|\cdot\|Df(\mathbf{p}+t(\mathbf{q}-\mathbf{p}))\|\cdot\|\mathbf{q}-\mathbf{p}\|,$$

zatem

$$\|f(\mathbf{q})-f(\mathbf{p})\| \le \|Df(\mathbf{p}+t(\mathbf{q}-\mathbf{p}))\|\cdot\|\mathbf{q}-\mathbf{p}\|.$$

Z otrzymanej nierówności teza wynika natychmiast. ■

Udowodnione twierdzenie nie daje dokładnego wzoru na $f(\mathbf{q})-f(\mathbf{p})$, ale pozwala oszacować tę różnicę za pomocą pochodnych cząstkowych, więc spełnią tę rolę, którą spełnia twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej w przypadku funkcji jednej zmiennej rzeczywistej.

Zajmiemy się teraz pochodnymi wyższego rzędu, konkretnie drugiego. Niech $f\colon G\longrightarrow\mathbb{R}$ będzie funkcją, która ma pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w całym zbiorze otwartym G.

Ograniczymy się w istocie rzeczy do pochodnych funkcji o wartościach rzeczywistych. Nie ma najmniejszego kłopotu ze zdefiniowaniem pochodnych cząstkowych drugiego rzędu. Jeśli funkcja $f\colon G\longrightarrow\mathbb{R}$ ma w zbiorze otwartym G pochodne cząstkowe pierwszego rzędu, to możemy pytać o to, czy mają one pochodne cząstkowe.

Definicja 16.22 (pochodnych cząstkowych wyższego rzędu)
Jeśli pochodna cząstkowa $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ma w punkcie $\mathbf{p}\in G$ pochodną cząstkową względem zmiennej x_j, to tę pochodną nazywamy pochodną cząstkową drugiego rzędu funkcji f w punkcie $\mathbf{p}$ względem zmiennych x_i, x_j i oznaczamy symbolem $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(\mathbf{p})$.

Jeśli $i \neq j$, to mówimy o pochodnej mieszanej. Jeśli $i = j$, to piszemy $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\mathbf{p})$. Analogicznie definiowane są pochodne cząstkowe wyższych rzędów. ■

Jeśli $f\binom{x}{y} = x^2 + 11xy + 37y^2$, to $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{p}) = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{p}) = 74$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{p}) = 11$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{p}) = 11$, bo $\frac{\partial f}{\partial x}\binom{x}{y} = 2x + 11y$ i $\frac{\partial f}{\partial y}\binom{x}{y} = 11x + 74y$. Przykładów na razie nie będziemy mnożyć, bo w istocie rzeczy nie ma w nich nic istotnie nowego, po prostu obliczamy następne pochodne.

Definicja 16.23 (macierzy drugiej różniczki)

Macierzą drugiej różniczki funkcji $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ w punkcie $\mathbf{p}$ nazywamy macierz $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{p})\right)$, jeśli pochodne $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{p})$ istnieją dla $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. ■

Z definicji wynika, że macierz drugiej różniczki jest macierzą kwadratową. „Na ogół” jest ona symetryczna, tzn. w różnych sytuacjach symetrii może nie być, ale jest tak w przypadku funkcji „zdefiniowanych wzorami” o czym mówi następujące

Twierdzenie 16.24 (Schwarza o symetrii drugiej różniczki)

Jeśli funkcja $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ ma pochodne mieszane $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{p})$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{p})$ w każdym punkcie $\mathbf{p}$ zbioru G i obie te pochodne są ciągłe w punkcie $\mathbf{q} \in G$, to są w tym punkcie równe:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{q}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{q}).$$

Dowód. Ponieważ mowa jest o pochodnych względem x_i oraz względem x_j, więc można myśleć o funkcji dwu zmiennych, pozostałe zmienne i tak traktowane są jako parametry. Dalej zakładamy więc, że $G \subset \mathbb{R}^2$, piszemy x zamiast x_i oraz y zamiast x_j. Niech $\mathbf{q} = \binom{a}{b}$ i $\mathbf{h} = \binom{u}{v}$. Ponieważ zakładamy, że zbiór G jest otwarty, więc dla dostatecznie małych $\|\mathbf{h}\|$ określić możemy liczbę

$$g\binom{u}{v} = f\binom{a+u}{b+v} - f\binom{a+u}{v} - f\binom{a}{b+v} + f\binom{a}{b}.$$

Traktując $f\binom{a+u}{b+v} - f\binom{a+u}{v}$ jako funkcję zmiennej u przy ustalonym v możemy zastosować jednowymiarowe twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej: istnieje więc liczba $t \in (0,1)$, taka że $g\binom{u}{v} = u\left(\frac{\partial g}{\partial x}\binom{a+tu}{b+v} - \frac{\partial g}{\partial x}\binom{a+tu}{b}\right)$. Traktując teraz u i t jako stałe a v jako zmienną możemy znów skorzystać z twierdzenia o wartości średniej: istnieje więc liczba $s \in (0,1)$, taka że $g\binom{u}{v} = vu\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\binom{a+tu}{b+sv}$. Ustalając najpierw v a potem u stwierdzimy w taki sam sposób, że istnieją liczby $\tau, \sigma \in (0,1)$, takie że $g\binom{u}{v} = uv\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\binom{a+\tau u}{b+\sigma v}$. Przyjmując teraz $u = v$ w obu równościach otrzymujemy:

$$\lim_{u\to 0}\frac{1}{u^2}g\binom{u}{u} = \lim_{u\to 0}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\binom{a+tu}{b+su} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\binom{a}{b}, \quad \lim_{u\to 0}\frac{1}{u^2}g\binom{u}{u} = \lim_{u\to 0}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\binom{a+\tau u}{b+\sigma v} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\binom{a}{b}.$$

Ponieważ lewe strony są równe, więc prawe też. Dowód został zakończony. ■

Od tej pory nie musimy więc pamiętać na czym dokładnie polega różnica między symbolami $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$. Ostrzegamy jednak, że to twierdzenie, jak każde inne, ma założenia. Na wszelki wypadek podamy standardowy przykład wskazujący na konieczność pamiętania o tych założeniach.

Przykład 16.16 Niech

$$f\binom{x}{y} = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } x = 0 = y; \\ xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{jeśli } x^2 + y^2 > 0. \end{cases}$$

Korzystając z definicji pochodnej stwierdzamy, że $\frac{\partial f}{\partial y}\binom{x}{0} = x$ oraz $\frac{\partial f}{\partial x}\binom{0}{y} = -y$. Stąd już łatwo wynika, że $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{0}) = 1 \neq -1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{0})$. Widzimy więc, że może się zdarzyć, że pochodne mieszane są różne, ale w przypadkach, którymi będziemy się zajmować, będą spełnione założenia twierdzenia o symetrii drugiej różniczki! ■

Uwaga 16.25 W dowodzie twierdzenia o symetrii drugiej różniczki pochodna mieszana została wyrażona jako granica „podwójnego ilorazu różnicowego”, w którym nie występuje żadna pochodna pierwszego rzędu. W liczniku występuje „różnica drugiego rzędu”:

$$f\binom{a+u}{b+v} - f\binom{a+u}{v} - f\binom{a}{b+v} + f\binom{a}{b} = \left\{f\binom{a+u}{b+v} - f\binom{a+u}{v}\right\} - \left\{f\binom{a}{b+v} - f\binom{a}{b}\right\} =$$
$$= \left\{f\binom{a+u}{b+v} - f\binom{a}{b+v}\right\} - \left\{f\binom{a+u}{v} - f\binom{a}{b}\right\}$$

Przypomina to o tym, że druga pochodna mierzy tempo zmian tempa zmian funkcji. W jednym wymiarze związane to było wypukłością funkcji, tu sytuacja jest nieco bardziej skomplikowana, bo mówimy jedynie o pochodnych cząstkowych. Widać jednak, że rozważamy najpierw zmiany wartości funkcji odpowiadające zmianie jednego argumentu (np. y) odpowiadające różnych wartościom innego argumentu (w tym przypadku x), a potem ich różnicę. To ważna interpretacja. ■

W rachunku różniczkowym najważniejsza idea to przybliżanie funkcji funkcją liniową, występuje ona już w definicji pochodnej. Następny krok to przybliżanie wielomianami odpowiedniego stopnia, gdy przybliżenia liniowe są niewystarczające. Odpowiednie twierdzenia zawierają wzór Taylora z różnymi postaciami reszty. Zajmiemy się teraz tym wzorem w przypadku funkcji wielu zmiennych i wielomianów drugiego stopnia. Warto od razu stwierdzić, że można używać wielomianów wyższego stopnia, ale nie chcemy komplikować wzorów, zresztą, wg. wiedzy autora, wielomiany Taylora stopnia wyższego niż 2 nie są zbyt często używane. Drugą przyczyną tego ograniczenia jest wiara autora w to, że ktoś kto zrozumiał jak można stosować wielomiany Taylora wyższych stopni w jednym wymiarze i wielomiany stopnia drugiego w wielu wymiarach, nie będzie mieć trudności z użyciem wielomianów Taylora stopnia wyższego niż 2 w przypadku funkcji wielu zmiennych.

Definicja 16.26 (drugiego wielomianu Taylora i drugiej reszty)
Załóżmy, że funkcja $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ ma pochodne cząstkowe drugiego rzędu w punkcie $\mathbf{p} \in G$. Drugim wielomianem Taylora funkcji f w punkcie $\mathbf{p}$ nazywamy wielomian zmiennych h_1, $h_2, \ldots, h_k$:

$$f(\mathbf{p}) + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p})h_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{p})h_i h_j\,.$$

Drugą resztą nazywamy różnicę

$$r_2(\mathbf{h}) = f(\mathbf{p}+\mathbf{h}) - \left(f(\mathbf{p}) + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p})h_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{p})h_i h_j\right). \ \blacksquare$$

Zauważmy, że jeśli choć jedna z pochodnych $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{p})$ jest różna od 0, to stopień drugiego wielomianu Taylora jest równy 2.

Przykład 16.17 Niech $f\binom{x}{y} = e^{x+3y}$. Wtedy $\frac{\partial f}{\partial x}\binom{x}{y} = e^{x+3y}$, $\frac{\partial f}{\partial y}\binom{x}{y} = 3e^{x+3y}$, zatem $\frac{\partial f^2}{\partial x^2}\binom{x}{y} = e^{x+3y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\binom{x}{y} = 3e^{x+3y}$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{x}{y} = 9e^{x+3y}$. Wobec tego drugi wielomian Taylora funkcji f w punkcie $\mathbf{0}$ wygląda tak:
$1 + 1\cdot h_1 + 3\cdot h_2 + \frac{1}{2}\left(1\cdot h_1^2 + 3\cdot h_1h_2 + 3\cdot h_2h_1 + 9\cdot h_2^2\right) =$
$= 1 + h_1 + 3h_2 + \frac{1}{2}h_1^2 + 3h_1h_2 + \frac{9}{2}h_2^2\,.$ $\blacksquare$

Najważniejsze, choć bardzo proste, twierdzenie brzmi prawie tak samo jak w jednowymiarowym przypadku, ale my wzmocnimy nieco założenia, bo konsekwentnie unikamy pojęcia różniczki drugiego rzędu.

Twierdzenie 16.27 (G.Peano)
Jeśli funkcja $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ ma pochodne drugiego rzędu w zbiorze G i są one ciągłe w każdym punkcie zbioru G, to dla każdego $\mathbf{p} \in G$ zachodzi równość:

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \tfrac{r_2(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|^2} = 0\,.$$

Dowód. Potraktujemy r_2 jako funkcję zmiennej $\mathbf{h}$. Zachodzą wtedy następujące równości $r_2(\mathbf{0}) = 0$, $\frac{\partial r_2}{\partial h_i}(\mathbf{h}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p}+\mathbf{h}) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p}) - \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{p})h_j$, a stąd wynika już łatwo, że $\frac{\partial^2 r_2}{\partial h_i \partial h_j}(\mathbf{h}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{p}+\mathbf{h}) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{p})$. Z ciągłości pochodnych cząstkowych drugiego rzędu wynika, że $\lim\limits_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\partial^2 r_2}{\partial h_i \partial h_j}(\mathbf{h}) = 0$, oczywiście r_2 zależy od

$\mathbf{p}$, ale ten punkt jest w całym rozumowaniu ustalony. Teraz twierdzenie o wartości średniej: $\|r_2(\mathbf{h})\| = \|r_2(\mathbf{h}) - r_2(\mathbf{0})\| \le \|\mathbf{h}\| \sup\limits_{0\le\tau\le1} \|Dr_2(\tau\mathbf{h})\|$. Zastosujemy to samo twierdzenie raz jeszcze tym razem do funkcji $\frac{\partial r_2}{\partial h_i}$. Mamy $\frac{\partial r_2}{\partial h_i}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ – wynika to natychmiast z wzoru na pochodne cząstkowe funkcji r_2, zatem

$$\left|\frac{\partial r_2}{\partial h_i}(\tau\mathbf{h})\right| = \left|\frac{\partial r_2}{\partial h_i}(\tau\mathbf{h}) - \frac{\partial r_2}{\partial h_i}(\mathbf{0})\right| \le \|\tau\mathbf{h}\| \sup_{0\le\sigma\le1} \left\|D\left(\frac{\partial r_2}{\partial h_i}\right)(\sigma\tau\mathbf{h})\right\| \le$$
$$\le \|\mathbf{h}\| \sup_{0\le\sigma\le1} \left\|D\left(\frac{\partial r_2}{\partial h_i}\right)(\sigma\tau\mathbf{h})\right\|$$

Ponieważ norma macierzy można oszacować przez pierwiastek kwadratowy z sumy kwadratów współczynników macierzy i $\lim\limits_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\partial^2 r_2}{\partial h_i \partial h_j}(\mathbf{h}) = 0$, więc zachodzi równość $\lim\limits_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \left\|D\left(\frac{\partial r_2}{\partial h_i}\right)(\sigma\tau\mathbf{h})\right\| = 0$ oraz

$$\frac{\|r_2(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|^2} \le \frac{1}{\|\mathbf{h}\|} \sup_{0\le\tau\le1} \|Dr_2(\tau\mathbf{h})\| \le \frac{1}{\|\mathbf{h}\|} \sup_{0\le\tau\le1} \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial r_2}{\partial h_i}(\tau\mathbf{h})\right)^2} \le$$
$$\le \sup_{0\le\tau\le1} \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \left(\sup_{0\le\sigma\le1} \left\|D\left(\frac{\partial r_2}{\partial h_i}\right)(\sigma\tau\mathbf{h})\right\|\right)^2} \xrightarrow[\mathbf{h}\to\mathbf{0}]{} 0$$

Te szacowania kończą dowód. ■

Dowód twierdzenia Peano podaliśmy głównie po to, by raz jeszcze uświadomić czytelnikom, że pochodna służy do oszacowania tempa zmian funkcji.

Przejdziemy teraz do twierdzenia, które pozwala w wielu przypadkach ustalić czy w punkcie zerowania się gradientu funkcja ma lokalne ekstremum czy też nie.

Twierdzenie 16.28 (o lokalnych ekstremach funkcji dwukrotnie różniczkowalnej)
Załóżmy, że funkcja $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ ma w zbiorze G pochodne cząstkowe drugiego rzędu oraz że są one ciągłe. Niech $\operatorname{grad} f(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$. Niech $D^2 f(\mathbf{p}) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{p})\right)$ będzie macierzą drugiej różniczki funkcji f w punkcie $\mathbf{p}$. W tej sytuacji

a. jeśli forma kwadratowa zdefiniowana macierzą $D^2 f(\mathbf{p})$ jest dodatnio określona, czyli gdy dla każdego wektora $\vec{\mathbf{v}} \ne \vec{\mathbf{0}}$ zachodzi nierówność
$$\vec{\mathbf{v}} \cdot \left(D^2 f(\mathbf{p}) \cdot \vec{\mathbf{v}}\right) = \textstyle\sum_{i=1}^k \left(v_i \cdot \sum_{j=1}^k \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{p}) v_j\right) = \sum_{i,j=1}^k \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{p}) v_i v_j > 0$$
to funkcja f ma w punkcie $\mathbf{p}$ lokalne minimum właściwe;

b. jeśli forma kwadratowa zdefiniowana macierzą $D^2 f(\mathbf{p})$ jest ujemnie określona*, to funkcja f ma w punkcie $\mathbf{p}$ lokalne maksimum właściwe;

c. jeśli istnieją takie wektory $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^k$ oraz $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^k$, że

* tzn. forma kwadratowa zdefiniowana macierzą przeciwną, $-D^2 f(\mathbf{p})$, jest dodatnio określona

$$\mathbf{v}\cdot D^2f(\mathbf{p})\mathbf{v}<0<\mathbf{w}\cdot D^2f(\mathbf{p})\mathbf{w}\,,$$

to w punkcie $\mathbf{p}$ funkcja f nie ma lokalnego ekstremum: w dowolnym otoczeniu tego punktu znajdują się punkty $\mathbf{x}$, takie że $f(\mathbf{p})>f(\mathbf{x})$ oraz punkty $\mathbf{y}$, takie że $f(\mathbf{y})>f(\mathbf{p})$.

Dowód. **a.** Zbiór złożony z wektorów o długości 1 jest ograniczony (to sfera!) i domknięty, więc funkcja (ciągła) przypisująca wektorowi $\vec{\mathbf{v}}$ liczbę $\vec{\mathbf{v}}\cdot\big(D^2f(\mathbf{p})\mathbf{v}\big)$ przyjmuje w jakimś jego punkcie swą najmniejszą wartość. Niech ε będzie tą najmniejszą wartością. Jeśli $\vec{\mathbf{x}}\neq\vec{\mathbf{0}}$ i $\vec{\mathbf{v}}=\frac{\vec{\mathbf{x}}}{\|\vec{\mathbf{x}}\|}$, to $\|\vec{\mathbf{v}}\|=1$, zatem

$$\varepsilon\leq\vec{\mathbf{v}}\cdot\big(D^2f(\mathbf{p})\mathbf{v}\big)=\tfrac{\vec{\mathbf{x}}}{\|\vec{\mathbf{x}}\|}\cdot\big(D^2f(\mathbf{p})\tfrac{\vec{\mathbf{x}}}{\|\vec{\mathbf{x}}\|}\big)=\tfrac{1}{\|\vec{\mathbf{x}}\|^2}\vec{\mathbf{x}}\cdot\big(D^2f(\mathbf{p})\vec{\mathbf{x}}\big)\,,$$

a stąd wynika, że $\varepsilon\cdot\|\vec{\mathbf{x}}\|^2\leq\vec{\mathbf{x}}\cdot\big(D^2f(\mathbf{p})\vec{\mathbf{x}}\big)$ dla każdego wektora $\vec{\mathbf{x}}\in\mathbb{R}^k$. Oczywiście $\varepsilon>0$. Z twierdzenia Peano wynika, że istnieje liczba $\delta>0$, taka że jeśli $\|\vec{\mathbf{h}}\|<\delta$, to $|r_2(\vec{\mathbf{h}})|<\frac{\varepsilon}{2}\|\vec{\mathbf{h}}\|^2$. Wobec tego

$$f(\mathbf{p}+\vec{\mathbf{h}})=f(\mathbf{p})+\sum_{i=1}^{k}\tfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p})h_i+\tfrac12\sum_{i,j=1}^{k}\tfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\mathbf{p})h_ih_j+r_2(\vec{\mathbf{h}})=$$

$$=f(\mathbf{p})+\tfrac12\sum_{i,j=1}^{k}\tfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\mathbf{p})h_ih_j+r_2(\vec{\mathbf{h}})=f(\mathbf{p})+D^2f(\mathbf{p})\vec{\mathbf{h}}\cdot\vec{\mathbf{h}}+r_2(\vec{\mathbf{h}})\,.$$

Jeśli $0<\|\vec{\mathbf{h}}\|<\delta$, to wartość bezwzględna trzeciego składnika jest mniejsza niż składnik drugi, więc ich suma jest dodatnia niezależnie od znaku $r_2(\vec{\mathbf{h}})$. To kończy dowód tego, że w kuli $B(\mathbf{p},\delta)$ najmniejszą wartość funkcja f przyjmuje w punkcie $\mathbf{p}$ i w żadnym innym, więc ma ona w punkcie $\mathbf{p}$ lokalne minimum właściwe.

b. Stosujemy udowodnioną już część twierdzenia do funkcji $-f$.

c. Niech $g(t)=f(\mathbf{p}+t\mathbf{v})$. Ponieważ G jest zbiorem otwartym, więc tym wzorem funkcję g możemy zdefiniować na pewnym przedziale otwartym zawierającym liczbę 0. Funkcja g jest dwukrotnie różniczkowalna, bo f ma pochodne drugiego rzędu. Z twierdzenia o pochodnej złożenia wynika łatwo, że $g'(t)=\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p}+t\vec{\mathbf{v}})v_i$, wobec tego że $\operatorname{grad} f(\mathbf{p})=\mathbf{0}$, zachodzi równość $g'(0)=0$. Mamy też

$$g''(t)=\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial f^2}{\partial x_j\partial x_i}(\mathbf{p}+t\vec{\mathbf{v}})v_j\right)v_i=\sum_{i,j=1}^{k}\frac{\partial f^2}{\partial x_j\partial x_i}(\mathbf{p}+t\vec{\mathbf{v}})v_iv_j\,,$$

zatem $g''(0)=D^2f(\mathbf{p})\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{v}}<0$. Ponieważ $g'(0)=0>g''(0)$, więc funkcja g ma w punkcie 0 lokalne maksimum właściwe, zatem w dowolnym otoczeniu punktu $\mathbf{p}$ znajdują się punkty, w których wartości funkcji f są mniejsze niż $f(\mathbf{p})$. Wynika stąd, że funkcja f nie ma w punkcie $(\mathbf{p})$ lokalnego minimum. Możemy rozważyć teraz funkcję $\tilde{g}$ zdefiniowaną wzorem $\tilde{g}(t)=f(\mathbf{p}+t\vec{\mathbf{w}})$. Rozumując dokładnie tak, jak przed chwilą przekonujemy się, że ma ona w punkcie 0 lokalne minimum właściwe, więc w dowolnym otoczeniu punktu $\mathbf{p}$ znajdują się punkty, w których wartości są większe niż $f(\mathbf{p})$, zatem funkcja f nie ma w punkcie $\mathbf{p}$ maksimum lokalnego. Mamy więc do czynienia z siodłem a nie z lokalnym ekstremum. ■

Wniosek 16.29 (z dowodu twierdzenia o lokalnych ekstremach.)
Jeśli $g(t) = f(\mathbf{p}+t\vec{\mathbf{v}})$ i funkcja f ma pochodne cząstkowe drugiego rzędu w otoczeniu punktu $\mathbf{p}$ i są one ciągłe w punkcie $\mathbf{p}$, to $g''(0) = \sum\limits_{i,j=1}^{k} \frac{\partial f^2}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{p}) v_i v_j$. ■

Wniosek ten mówi, że wartość drugiej różniczki w punkcie $\mathbf{p}$ na wektorze $\mathbf{v}$ jest drugą pochodną badanej funkcji ograniczonej do prostej przechodzącej przez punkt $\mathbf{p}$, równoległej do wektora $\mathbf{v}$.

Czytelnik zwróci uwagę na to, że dowód części **a.** twierdzenia w istocie rzeczy polega na tym, że sprawdzamy iż zachodzi ono dla wielomianów stopnia 2 lub mniejszego, a następnie stwierdzeniu, że przy dostatecznie dobrych założeniach o wielomianie kwadratowym reszta nie ma wpływu na tezę, bo po prostu jest za mała. Oczywiście twierdzenie ma charakter lokalny, o czym doskonale świadczy przykład, który zresztą za chwilę przypomnimy — funkcja tam występująca ma dwa lokalne minima, ale żadne z nich nie jest minimum globalnym, którego zresztą nie ma, bo funkcja nie jest ograniczona z dołu. W części **c.** okazało się, że z założeń wynika istnienie prostej przechodzącej przez $\mathbf{p}$, po ograniczeniu do której funkcja ma lokalne minimum właściwe i drugiej prostej przechodzącej przez $\mathbf{p}$, po ograniczeniu do której funkcja ma maksimum właściwe. Takie zjawisko nie mogło oczywiście wystąpić w przypadku funkcji jednej zmiennej. Może się też zdarzyć, że forma drugiej różniczki jest półokreślona, np. dodatnio. Oznacza to, że $D^2 f(\mathbf{p})\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}} \geq 0$ — zamiast ostrej nierówności mamy tylko nieostrą Wtedy nic się nie da wywnioskować bez dalszego badania funkcji: funkcja $x^4 + y^4$ ma w punkcie $\mathbf{0}$ minimum właściwe, zresztą globalne, funkcja $-x^4 - y^4$ ma w punkcie $\mathbf{0}$ maksimum właściwe, globalne, funkcja $x^4 - y^4$ ma w punkcie $\mathbf{0}$ „siodło" - w dowolnym otoczeniu punktu $\mathbf{0}$ przyjmuje zarówno wartości mniejsze niż $f(\mathbf{0})$ jak i wartości większe niż $f(\mathbf{0})$. W każdym z tych trzech przypadków zachodzą równości

$$0 = f(\mathbf{0}) = \tfrac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{0}) = \tfrac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{0}) = \tfrac{\partial f^2}{\partial x^2}(\mathbf{0}) = \tfrac{\partial f^2}{\partial x \partial y}(\mathbf{0}) = \tfrac{\partial f^2}{\partial y^2}(\mathbf{0}),$$

więc *z punktu widzenia twierdzenia o lokalnych ekstremach te funkcje są nierozróżnialne.* Autor spotykał się wielokrotnie ze studentami, którzy chcieli bez głębszego zastanowienia się rozszerzać zakres twierdzenia o lokalnych ekstremach, ale wypisywane tezy były nieprawdziwe. Oczywiście twierdzenie to można uogólnić, ale nie jest to zbyt proste i co gorsza efekty uogólnienia nie są warte zachodu, bo otrzymywane warunki są zbyt skomplikowane, by je pamiętać. Ważniejsze jest zrozumienie podanej wersji i jej dowodu, bo wtedy w konkretnych sytuacjach, nawet nie objętych twierdzeniem, można zastosować jego dowód!

Przykład 16.18 Niech $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x^2+2y^2+3z^2-4x+8y-12z$. Jasne jest, że funkcja nie jest ograniczona z góry: $\lim\limits_{x\to+\infty} f\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = +\infty$. Nie jest jasne czemu równy jest kres dolny funkcji i czy jest on jej wartością. Jeśli kres jest wartością funkcji określonej na całej przestrzeni, to gradient tej funkcji w punkcie, w którym jest on przyjmowany jest wektorem zerowym. Mamy grad $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-4 \\ 4y+8 \\ 6z-12 \end{pmatrix}$. Jasne jest, że ten wektor równy jest $\mathbf{0}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x=2$, $y=-2$ i $z=2$. Mamy $f\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = -24$. Jeśli więc kres dolny jest wartością funkcji, to musi być równy -24 . Wykażemy, że tak jest w rzeczywistości. $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 24 = (x-2)^2 + 2(y+2)^2 + 3(z-2)^2 \geq 0$, co kończy dowód. W istocie rzeczy do znalezienia kresów rachunek różniczkowy w tym zadaniu nie był potrzebny, w rzeczywistości funkcja f w ostatnim kroku została potraktowana jako suma 3 wielomianów kwadratowych, każdy innej zmiennej, które zostały sprowadzone do postaci kanonicznych! Rachunek różniczkowy pomaga tu jedynie ustalić, jaki punkt jest podejrzany o to, że w nim kres jest osiągany, ale oczywiście te hipotezę można sformułować nie licząc żadnych pochodnych. ■

Przykład 16.19 Niech $f\binom{x}{y} = 2x^2 - 4xy + 10y^2 - 20x + 68y$. Podobnie jak w przykładzie poprzednim widać, że $\lim\limits_{x\to+\infty} \binom{x}{0} = +\infty$, zatem funkcja nie jest ograniczona z góry, czyli jej kresem górnym jest $+\infty$. Jeśli kres dolny tej funkcji jest jej wartością, to w punkcie, w którym jest przyjmowany, gradient funkcji f jest wektorem zerowym. Mamy grad $f\binom{x}{y} = \binom{4x-\ 4y-20}{-4x+20y+68}$. Ma więc być

$$4x-4y-20 = 0 = -4x+20y+68 \,.$$

Rozwiązując ten układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi otrzymujemy $x=2$, $y=-3$. Jedynym kandydatem na punkt, w którym mógłby być osiągnięty kres dolny tej funkcji, jest więc punkt $\binom{2}{-3}$. Niech $u=x-2$, $v=y+3$. Mamy więc

$$f\binom{x}{y} = f\binom{u+2}{v-3} = 2(u+2)^2 - 4(u+2)(v-3) + 10(v-3)^2 - 20(u+2) + 68(v-3) =$$
$$= 2u^2 - 4uv + 10v^2 - 122 = 2(u-v)^2 + 8v^2 - 122$$

— ostatnie przekształcenie to po prostu sprowadzenie wielomianu kwadratowego zmiennej u, którego współczynniki zależą od parametru v, do postaci kanonicznej. Jasne jest, że najmniejszą wartością otrzymanego wyrażenia jest liczba -122 oraz że wartość ta jest przyjmowana jedynie wtedy, gdy $u = v$ i $v = 0$, tzn. $u = 0 = v$. Podobnie jak w poprzednim przykładzie można było nie obliczać pochodnych, lecz potraktować od razu funkcję jako wielomian kwadratowy zmiennej u z parametrem v, sprowadzić go do postaci kanonicznej i rzecz całą zakończyć. ■

Przykład 16.20 Niech $f\binom{x}{y} = 2x^2 - 4xy + y^2 - 20x + 14y$.
Ponieważ $\lim\limits_{x\to+\infty} \binom{x}{0} = +\infty$, więc $\sup f = +\infty$. Postępując tak jak w poprzednim przykładzie znajdujemy $\operatorname{grad} f\binom{x}{y} = \binom{4x-4y-20}{-4x+2y+14}$. Ten wektor równy jest $\binom{0}{0}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 2$ i $y = -3$. Podstawmy $x = u+2$, $y = v-3$. Wtedy

$$f\binom{x}{y} = 2(u+2)^2-4(u+2)(v-3)+(v-3)^2-20(u+2)+14(v-3) = 2u^2-4uv+v^2-41 = \\ = 2(u-v)^2 - v^2 - 41\,.$$

W odróżnieniu od przykładów poprzednich wyrażenie $2(u-v)^2 - v^2$ bywa ujemne, więc liczba -41 nie jest kresem dolnym funkcji f. Mamy

$$f\binom{v}{v} = -v^2 - 41 \xrightarrow[v\to\infty]{} -\infty\,,$$

zatem kresem dolnym funkcji f jest $-\infty$, co oznacza, że funkcja f nie jest ograniczona również z dołu. Oczywiście również w tym przykładzie użycie pochodnych nie jest konieczne, można od razu potraktować funkcję jako wielomian zmiennej x zależny od parametru y. ■

Przykład 16.21 Teraz uogólnimy rezultaty trzech ostatnich przykładów. Mieliśmy w każdym z nich do czynienia z konkretnym wielomianem drugiego stopnia dwu zmiennych, czyli z funkcją f, którą można zdefiniować wzorem

$$f\binom{x}{y} = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F\,,$$

przy założeniu, że co najmniej jedna z liczb A, B, C jest różna od 0; dwójki we współczynnikach pojawiają się ze względu na wygodę oraz tradycję. Wyrażenia x^2, xy, y^2 nazywamy jednomianami drugiego stopnia zmiennych x i y (dla ustalenia stopnia iloczynu dodajemy stopnie czynników, nawet jeśli jeden wielomian zależy od x a drugi — od y).

Rozważymy kolejno trzy przypadki: $AC-B^2 > 0$, $AC-B^2 = 0$, $AC-B^2 < 0$. Pierwszy z nich nazywany jest eliptycznym, drugi – parabolicznym, a trzeci – hiperbolicznym. Mamy $\operatorname{grad} f\binom{x}{y} = 2\binom{Ax+By+D}{Bx+Cy+E}$. W przypadku eliptycznym i w przypadku hiperbolicznym istnieje dokładnie jeden punkt, w którym $\operatorname{grad} f$ jest wektorem zerowym, w przypadku parabolicznym takiego punktu może nie być albo jest ich nieskończenie wiele. Jeśli $\operatorname{grad} f\binom{\alpha}{\beta} = \binom{0}{0}$, to po zastosowaniu podstawienia $x = u+\alpha$, $y = v+\beta$ otrzymujemy wielomian kwadratowy zmiennych u, v, w którym część kwadratowa ma te same współczynniki A, B, C, natomiast część liniowa znika, o wyrazie wolnym nic powiedzieć nie można. Po podstawieniu otrzymujemy funkcję zmiennych u i v, której gradient jest wektorem zerowym w punkcie $\mathbf{0} = \binom{0}{0}$, a więc funkcję postaci $Au^2 + 2Buv + Cv^2 + \widetilde{F}$.

Przypadek eliptyczny.

Ponieważ $AC - B^2 > 0$, więc $AC > 0$, zatem $A \neq 0 \neq C$. Możemy wobec tego napisać:

$$Au^2 + 2Buv + Cv^2 + \widetilde{F} = A\left(u + \tfrac{B}{A}v\right)^2 - \tfrac{B^2}{A}v^2 + Cv^2 + \widetilde{F} = \\ = A\left(\left(u + \tfrac{B}{A}v\right)^2 + \tfrac{AC-B^2}{A^2}v^2\right) + \widetilde{F}.^*$$

Jeśli $A > 0$, to funkcja f przyjmuje w punkcie $\mathbf{0}$ wartość $\widetilde{F}$, a w pozostałych punktach wartości większe niż $\widetilde{F}$ – wynika to stąd, że kwadrat liczby rzeczywistej $\neq 0$ jest dodatni, zaś $0^2 = 0$. Najmniejszą wartością funkcji f w tym przypadku jest liczba $\widetilde{F}$, jest ona przyjmowana w jednym tylko punkcie (zerowania się gradientu), funkcja jest oczywiście nieograniczona z góry. Przypadek $A < 0$ jest w pełni analogiczny, nierówności zmieniają kierunki, więc w tym przypadku funkcja ma wartość największą, a z dołu nie jest ograniczona.

Przypadek hiperboliczny.

Teraz może zdarzyć się, że $A = 0 = C$. Jeśli tak jest, to wprowadzamy nowe zmienne $\widetilde{x} = x + y$ oraz $\widetilde{y} = x - y$, czyli $x = \frac{\widetilde{x}+\widetilde{y}}{2}$ oraz $y = \frac{\widetilde{x}-\widetilde{y}}{2}$. Po podstawieniu część kwadratowa wygląda tak: $\frac{B}{2}\widetilde{x}^2 - \frac{B}{2}\widetilde{y}^2$. Przyjmując $\widetilde{A} = \frac{B}{2}$, $\widetilde{B} = 0$ oraz $\widetilde{C} = \frac{B}{2}$ otrzymujemy znów wielomian kwadratowy, dla którego $\widetilde{A}\widetilde{C} - \widetilde{B}^2 < 0$, przy czym $\widetilde{A} \neq 0$. Możemy więc od razu założyć, że $A \neq 0$, co uchroni nas przed zmianą oznaczeń nie zmniejszając przy tym ogólności rozważań. Przyjmujemy więc dalej, że $A > 0$. Przekształcając tak jak w przypadku eliptycznym otrzymujemy

$$\widetilde{f}\binom{u}{v} = Au^2 + 2Buv + Cv^2 + \widetilde{F} = A\left(u + \tfrac{B}{A}v\right)^2 - \tfrac{B^2}{A}v^2 + Cv^2 + \widetilde{F} = \\ = A\left(\left(u + \tfrac{B}{A}v\right)^2 + \tfrac{AC-B^2}{A^2}v^2\right) + \widetilde{F}.$$

Oczywiście $\lim\limits_{u\to\infty} f\binom{u}{0} = +\infty$, zatem funkcja $\widetilde{f}$ nie jest ograniczona z góry. Mamy też $\lim\limits_{v\to\infty} f\binom{-vB/A}{v} = -\infty$, więc również z dołu ta funkcja nie jest ograniczona. Kresem

* Wyróżnik wielomianu $Au^2+2Buv+Cv^2$ zmiennej u równy jest $4v^2\left(B^2-AC\right)$, więc gdy $v\neq 0$, to wielomian ten nie ma pierwiastków!

dolnym tej funkcji jest więc $-\infty$, a górnym $+\infty$. Wykres tej funkcji jest dwuwymiarową powierzchnią w przestrzeni trójwymiarowej przypominającą wyglądem przełęcz w górach, co miłośnikom jazdy konnej kojarzyć może się z siodłem. Omówmy to nieco dokładniej. Jeśli $v=0$, to rozważamy funkcję $Au^2+\widetilde{F}$, której wykresem jest parabola skierowana ramionami ku górze. Jeśli ograniczymy naszą uwagę do prostej o równaniu $u+\frac{B}{A}v=0$, to otrzymamy funkcję $\frac{AC-B^2}{A}v^2+\widetilde{F}$, której wykresem jest parabola skierowana ramionami ku dołowi. Ta druga ma punkt wspólny z pierwszą, po prostu jest podwieszona na pierwszej, ale znajduje się w innej płaszczyźnie pionowej*, mianowicie zawierającej prostą $u+\frac{B}{A}v=0$. Zmiana wielkości $u+\frac{B}{A}v$ powoduje przesunięcie zwisającej paraboli do góry wzdłuż paraboli Au^2. Wykres naszej funkcji składa się więc z parabol zwisających z paraboli $Au^2+\widetilde{F}$ w dół, równoległych do prostej $u+\frac{B}{A}v=0$, umieszczonych w płaszczyznach pionowych.

Jasne jest, że w tym przypadku funkcja w punkcie zerowania się gradientu nie ma ani lokalnego maksimum ani lokalnego minimum: wędrując z punktu $\mathbf{0}$ w kierunku prostej $v=0$ zwiększamy wartość funkcji, zaś wędrując w kierunku prostej $u+\frac{B}{A}v=0$ zmniejszamy wartość funkcji.

Przypadek paraboliczny

Podobnie jak w przypadku eliptycznym co najmniej jedna z liczba A, C musi być różna od 0, bo gdyby obie były zerami, to z równości $AC-B^2=0$ wynikałoby, że również $B=0$, co nie jest możliwe w świetle naszego założenia. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $A\neq 0$, a nawet $A>0$. Przypadek $A<0$ pozostawiamy czytelnikowi. Mamy więc

$$\begin{aligned}
&Au^2+2Buv+Cv^2+2Du+2Ev+F=\\
&\qquad=A\left(u+\tfrac{B}{A}v+\tfrac{D}{A}\right)^2+\left(C-\tfrac{B^2}{A}\right)v^2+2\left(E-\tfrac{BD}{A}\right)v+F-\tfrac{D^2}{A}=\\
&\qquad\qquad=A\left(u+\tfrac{B}{A}v+\tfrac{D}{A}\right)^2+2\left(E-\tfrac{BD}{A}\right)v+F-\tfrac{D^2}{A}.
\end{aligned}$$

Mamy więc dwa przypadki $E-\frac{BD}{A}=0$ i $E-\frac{BD}{A}\neq 0$.

W pierwszym przypadku funkcja przyjmuje najmniejszą wartość $F-\frac{D^2}{A}$ w każdym punkcie prostej $Au+By+D=0$ i oczywiście jest nieograniczona z góry.

W drugim przypadku funkcja jest nieograniczona z góry: $\lim\limits_{u\to\infty}f\binom{u}{0}=+\infty$. Jest też nieograniczona z dołu, bowiem jedna z granic

$$\lim_{v\to\infty}f\binom{-(Bv+D)/A}{v},\qquad \lim_{v\to-\infty}f\binom{-(Bv+D)/A}{v}$$

równa jest $-\infty$, a drugą jest $+\infty$. W tych przypadkach wykres funkcji można wy-

* Jeśli $B=0$, to te pionowe płaszczyzny są prostopadłe, pierwsza ma równanie $v=0$, a druga – $u=0$

obrazić sobie jako dolinę: w przypadku $E - \frac{BD}{A} = 0$ dno doliny jest poziome, a w przypadku $E - \frac{BD}{A} \neq 0$ – nie. ■

Uwaga 16.30
W przypadku funkcji jednej zmiennej podaliśmy kryterium pozwalające na stwierdzenie, czy funkcja ma w punkcie zerowania się pochodnej lokalne ekstremu czy też nie. Podobne twierdzenia można formułować dla funkcji dwu i większej liczby zmiennych. Szczególnie ważny jest przypadek najprostszy, gdy problem można wyjaśnić badając pochodne drugiego rzędu. Zajmiemy się tym nieco później. Wypada jednak stwierdzić, że twierdzenia omówione w ostatnim przykładzie stanowią podstawę do sformułowania odpowiednich tez w przypadku funkcji dwu zmiennych.

Ostatni przykład zawiera dowód twierdzenia Sylvestera (zob. następne twierdzenie) w przypadku funkcji dwu zmiennych. Udowodnimy zresztą to twierdzenie za chwilę, by przekonać czytelnika, że nic tajemniczego w nim nie ma, choć oczywiście jego dowód nie jest konieczny do zdania egzaminu z matematyki przez studenta chemii. ■

Twierdzenie 16.31 (Sylvestera o formach kwadratowych dodatnio określonych)
Niech f będzie formą kwadratową określoną przez macierz symetryczną $A = (a_{i,j})$ wymiaru k, tzn. dla dowolnych $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ zachodzi równość $a_{i,j} = a_{j,i}$, zatem

$$f(\mathbf{x}) = (A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = \sum_{i,j=1}^{k} a_{i,j} x_i x_j ,$$

kropka oznacza tu iloczyn skalarny. Niech $M_l = \det(a_{i,j})_{i,j \leq l}$. Wtedy $f(\mathbf{x}) > 0$ dla $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $M_l > 0$ dla $l = 1, 2, \ldots, k$. Mówimy wtedy, że forma f jest dodatnio określona.

Dowód. (J.Musielak)*

Zastosujemy indukcję względem k. Dla $k = 1$ mamy $f(x) = a_{1,1}x^2$, zatem forma jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy $a_{1,1} > 0$.

Dla $k = 2$ mamy

$$f(\mathbf{x}) = a_{1,1}x_1^2 + a_{1,2}x_1x_2 + a_{2,1}x_2x_1 + a_{2,2}x_2^2 = a_{1,1}x_1^2 + 2a_{1,2}x_1x_2 + a_{2,2}x_2^2 .$$

Oczywiście musi być $a_{1,1} = f(\mathbf{e}_1) > 0$, czyli musi być $M_1 > 0$. Funkcję f możemy potraktować jako wielomian kwadratowy zmiennej x_1 zależny od parametru x_2.

* Wg. książki Mostowskiego i Starka, Elementy Algebry Wyższej, Warszawa, PWN 1963, wyd 5. Podajemy ten właśnie dowód, bo jest on chyba najbardziej elementarny z tych, które autor widział, wymaga jedynie podstawowych wiadomości o wielomianach kwadratowych jednej zmiennej i wyznacznikach.

Ma on przyjmować jedynie wartości dodatnie dla $x_2 \neq 0$. Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to jest, jak wiadomo z nauki w liceum, nierówność

$$0 < -\tfrac{\Delta}{4} = a_{1,1}a_{2,2}x_2^2 - a_{1,2}^2x_2^2 = (a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}^2)x_2^2,$$

czyli $M_2 > 0$.

Załóżmy teraz, że teza zachodzi dla wszystkich form kwadratowych określonych na przestrzeni wymiaru mniejszego niż $k+1$. Wykażemy, że zachodzi również dla form określonych na przestrzeni wymiaru k. Mamy

$$f(\mathbf{x}) = a_{1,1}x_1^2 + 2x_1\left(\sum_{j=2}^{k+1} a_{1,j}x_j\right) + \sum_{i,j=2}^{k+1} a_{i,j}x_ix_j.$$

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by $f(\mathbf{x}) > 0$ dla $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ jest $a_{1,1} > 0$ oraz

$$0 < -\frac{\Delta}{4} = a_{1,1}\left(\sum_{i,j=2}^{k+1} a_{i,j}x_ix_j\right) - \left(\sum_{j=2}^{k+1} a_{1,j}x_j\right)^2 =$$

$$= \sum_{i,j=2}^{k+1} a_{1,1}a_{i,j}x_ix_j - \sum_{j=2}^{k+1} a_{1,i}a_{1,j}x_ix_j = \sum_{i,j=2}^{k+1} b_{i,j}x_ix_j,$$

gdzie $b_{i,j} = a_{1,1}a_{i,j} - a_{1,i}a_{1,j}$. Ostatnie wyrażenie jest formą kwadratową k zmiennych, więc na mocy założenia indukcyjnego warunkiem koniecznym i dostatecznym jego dodatniej określoności jest

$$|\,b_{2,2}\,| > 0, \quad \begin{vmatrix} b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,2} & b_{3,3} \end{vmatrix} > 0, \ \ldots, \ \begin{vmatrix} b_{2,2} & b_{2,3} & \ldots & b_{2,k+1} \\ b_{3,2} & b_{3,3} & \ldots & b_{3,k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k+1,2} & b_{k+1,3} & \ldots & b_{k+1,k+1} \end{vmatrix} > 0.$$

Dla $l \in \{2, \ldots, k+1\}$ mamy

$$0 < \begin{vmatrix} b_{2,2} & b_{2,3} & \ldots & b_{2,l} \\ b_{3,2} & b_{3,3} & \ldots & b_{3,l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{l,2} & b_{l,3} & \ldots & b_{l,l} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}^2 & a_{1,1}a_{2,3} - a_{1,2}a_{1,3} & \ldots & a_{1,1}a_{2,l} - a_{1,2}a_{1,l} \\ a_{1,1}a_{3,2} - a_{1,2}a_{1,3} & a_{1,1}a_{3,3} - a_{1,3}^2 & \ldots & a_{1,1}a_{3,l} - a_{1,3}a_{1,l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,1}a_{l,2} - a_{1,2}a_{1,l} & a_{1,1}a_{3,l} - a_{1,3}a_{1,l} & \ldots & a_{1,1}a_{l,l} - a_{1,l}^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots & a_{1,l} \\ 0 & a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}^2 & a_{1,1}a_{2,3} - a_{1,2}a_{1,3} & \ldots & a_{1,1}a_{2,l} - a_{1,2}a_{1,l} \\ 0 & a_{1,1}a_{3,2} - a_{1,2}a_{1,3} & a_{1,1}a_{3,3} - a_{1,3}^2 & \ldots & a_{1,1}a_{3,l} - a_{1,3}a_{1,l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{1,1}a_{l,2} - a_{1,2}a_{1,l} & a_{1,1}a_{3,l} - a_{1,3}a_{1,l} & \ldots & a_{1,1}a_{l,l} - a_{1,l}^2 \end{vmatrix}.$$

Ostatnia równość wynika z tego, że wyznacznik można obliczać rozwijając go względem pierwszej kolumny. Teraz pomnożymy pierwszy wiersz przez $a_{1,2}$ i dodamy do drugiego, potem pierwszy wiersz przez $a_{1,3}$ i dodamy do trzeciego, itd. Ponieważ te operacje nie zmieniają wartości wyznacznika, więc otrzymamy

$$0 < \begin{vmatrix} 1 & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,l} \\ a_{1,2} & a_{1,1}a_{2,2} & a_{1,1}a_{2,3} & \dots & a_{1,1}a_{2,l} \\ a_{1,3} & a_{1,1}a_{3,2} & a_{1,1}a_{3,3} & \dots & a_{1,1}a_{3,l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,l} & a_{1,1}a_{l,2} & a_{1,1}a_{l,3} & \dots & a_{1,1}a_{l,l} \end{vmatrix}.$$

Pomnożymy teraz pierwszy wiersz przez liczbę $a_{1,1} > 0$, nie zmienia to znaku wyznacznika, bo mnożenie wiersza przez liczbę to to samo, co mnożenie wyznacznika przez tę liczbę. W otrzymanym wyznaczniku wszystkie wyrazy w kolumnach drugiej, trzeciej itd. zawierają czynnik $a_{1,1}$, więc z tych kolumn można go wyłączyć, co oznacza podzielenie wyznacznika przez liczbę $a_{1,1}^{l-1} > 0$. Znak pozostaje niezmieniony, a otrzymany wyznacznik to $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,l} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,l} \\ a_{1,3} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & a_{3,l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,l} & a_{l,2} & a_{l,3} & \dots & a_{l,l} \end{vmatrix}$. Tym samym zakończyliśmy dowód. ■

Przykład 16.22 Rozważymy trzy funkcje
$f(x,y) = 6y^5 + 15y^4 - 50y^3 - 90y^2 + \frac{1}{4}\big(-e^{2x} + (y+1)^2(y-2)^2\big)^2$,
$g(x,y) = 6y^5 + 15y^4 - 50y^3 - 90y^2 + \frac{1}{4}\big(-e^{2x} + y^2(y+3)^2\big)^2$,
$h(x,y) = 6y^5 + 15y^4 - 50y^3 - 90y^2 + \frac{1}{4}\big(-e^{2x} + (y+1)^2(y+3)^2\big)^2$.
Znajdziemy ich lokalne ekstrema oraz kresy.

Zachodzą równości
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -e^{2x}\left(-e^{2x} + (y+1)^2(y-2)^2\right)$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 30y(y+3)(y+1)(y-2) + (y+1)(y+2)(2y-1)\left(-e^{2x} + (y+1)^2(y-2)^2\right)$
$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -e^{2x}\left(-e^{2x} + y^2(y+3)^2\right)$,
$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 30y(y+3)(y+1)(y-2) + (y+1)(y+2)(2y+3)\left(-e^{2x} + y^2(y+3)^2\right)$,
$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = -e^{2x}\left(-e^{2x} + (y+1)^2(y+3)^2\right)$,
$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = 30y(y+3)(y+1)(y-2) + 2(y+1)(y+2)(y+3)\left(-e^{2x} + (y+1)^2(y+3)^2\right)$.

Znajdziemy punkty krytyczne funkcji f, g, h, czyli punkty, w których ich gradienty są wektorami zerowymi.

Z równości $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ wynika, że $-e^{2x} + (y+1)^2(y-2)^2 = 0$, a z niej i z równości

$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ wynika, że $y(y+3)(y+1)(y-2) = 0$. Musi więc być spełniona jedna z czterech równości $y = 2$, $y = 0$, $y = -1$, $y = -3$. Trzeba znaleźć odpowiadające tym wartościom zmiennej y wartości zmiennej x. Prowadzi to do równości $e^{2x} = 3^2 \cdot 0^2$, $e^{2x} = 1^2 \cdot (-2)^2$, $e^{2x} = 0^2 \cdot (-3)^2$ i $e^{2x} = (-2)^2 \cdot (-5)^2$. Ani pierwsze ani trzecie równanie nie ma rozwiązań. Z drugiego wynika, że $x = \ln 2$. Z czwartego z kolei wnioskujemy, że $x = \ln 10$. Znaleźliśmy więc wszystkie punkty krytyczne funkcji f. Są dwa takie punkty: $(\ln 2, 0)$ i $(\ln 10, -3)$. W żadnym innym punkcie funkcja f lokalnego ekstremum nie ma.

Znajdziemy pochodne cząstkowe drugiego rzędu, a raczej drugie wielomiany Taylora tych funkcji. Niech $x = \ln 2 + u$. Mamy

$$
\begin{aligned}
&f(x,y) = f(\ln 2 + u, y) = \\
&= 6y^5 + 15y^4 - 50y^3 - 90y^2 + \tfrac14\big(-e^{2(\ln 2+u)} + (y+1)^2(y-2)^2\big)^2 = \\
&= 6y^5 + 15y^4 - 50y^3 - 90y^2 + \tfrac14\big(-4e^{2u} + (y^2-y-2)^2\big)^2 = \\
&= 6y^5 + 15y^4 - 50y^3 - 90y^2 + \\
&\qquad + \tfrac14\Big(-4(1 + 2u + \tfrac{4u^2}{2!} + \tfrac{8u^3}{3!} + \cdots) + 4 + 4y - 3y^3 - 2y^3 + y^4\Big)^2 = \\
&= -90y^2 - 50y^3 + 15y^4 + 6y^5 + \tfrac14\left(-8u + 4y + \cdots\right)^2 = \\
&\qquad = -90y^2 + 16u^2 - 16uy + 4y^2 + \cdots = 16u^2 - 16uy - 86y^2 + \cdots .
\end{aligned}
$$

Opuściliśmy wszystkie człony, które nie mają wpływu na współczynniki przy jednomianach stopnia 2, tzn przy u^2, uy, y^2.

Twierdzenie o lokalnych ekstremach pozwala na stwierdzenie, że ponieważ wyrażenie (forma kwadratowa) $16u^2 - 16uy - 86y^2$ przyjmuje czasem wartości dodatnie, np. dla $u = 1$ i $y = 0$, a czasem ujemne, np. dla $u = 0$ i $y = 1$, więc funkcja w punkcie $(\ln 2, 0)$ nie ma ani lokalnego maksimum, ani lokalnego minimum. Mówimy w tym przypadku o siodle.

Teraz zajmiemy się okolicą punktu $(\ln 10, -3)$. Przyjmiemy, że $x = \ln 10 + u$ i $y = -3 + v$. Wtedy

$$
\begin{aligned}
&f(x,y) = f(\ln 10+u, -3+v) = 6(-3+v)^5 + 15(-3+v)^4 - 50(-3+v)^3 - 90(-3+v)^2 + \\
&\qquad + \tfrac14\big(-e^{2(\ln 10+u)} + (-3+v+1)^2(-3+v-2)^2\big)^2 = \\
&= 6(-3)^5 + 15(-3)^4 - 50(-3)^3 - 90(-3)^2 + \\
&\qquad + 6\cdot 5\cdot(-3)^4 v + 15\cdot 4\cdot(-3)^3 v - 50\cdot 3\cdot(-3)^2 v - 90\cdot 2\cdot(-3)v + \\
&\qquad + 6\cdot\tbinom52\cdot(-3)^3v^2 + 15\cdot\tbinom42\cdot(-3)^2v^2 - 50\cdot\tbinom32\cdot(-3)v^2 - 90v^2 + \cdots + \\
&+ \tfrac14\Big(-100(1 + 2u + \tfrac{4u^2}{2!} + \cdots) + (4 - 4v + v^2)(25 - 10v + v^2)\Big)^2 = \\
&= 297 - 450v^2 + \cdots \tfrac14\left(-200u + \cdots - 140v + \cdots\right)^2 =
\end{aligned}
$$

$$= 297 - 450v^2 + \tfrac{1}{4}\left(-200u - 140v\right)^2 + \cdots =$$
$$= 297 + 10000u^2 + 14000uv + 4450v^2 + \cdots .$$

Jasne jest, że wyrażenie $10000u^2 + 14000uv + 4450v^2$ bywa dodatnie, np. gdy przyjmiemy $u = 1, v = 0$. Bywa również ujemne np. dla $u = 14, v = -20$. Wobec w punkcie $(\ln 10, -3)$ funkcja f ma siodło.

Kres górny funkcji f równy jest $+\infty$, bo

$$\lim_{y\to\infty} f\left(\tfrac{1}{2}\ln\left[(y+1)(y-2)\right], y\right) = \lim_{y\to\infty}(6y^5 + 15y^4 - 50y^3 - 90y^2) = +\infty .$$

Kres górny funkcji f równy jest $-\infty$, bo

$$\lim_{y\to-\infty} f\left(\tfrac{1}{2}\ln\left[(y+1)(y-2)\right], y\right) = \lim_{y\to-\infty}(6y^5 + 15y^4 - 50y^3 - 90y^2) = -\infty .$$

Teraz zajmiemy się funkcją g. Oczywiście obliczenia są bardzo podobne, więc podamy tylko wyniki i wyciągniemy wnioski.

Gradient funkcji g zeruje się w dwóch punktach: $(\ln 2, -1)$ i $(\ln 10, 2)$.

Podstawiając $x = u + \ln 2$ i $y = v - 1$ otrzymujemy

$$g(x,y) = g(u + \ln 2, v - 1) = -31 + 16u^2 + uv + 94v^2 + \cdots .$$

Wyrażenie $16u^2 + uv + 94v^2$ jest dodatnie dla dowolnie wybranych liczb u, v z wyjątkiem $u = 0 = v$. Jeśli bowiem potraktujemy je jako wielomian kwadratowy zmiennej u z parametrem v, to jego wyróżnik równy będzie $\Delta = v^2 - 4\cdot 16\cdot 94v^2$, więc wyróżnik ten jest ujemny dla $v \neq 0$; jasne jest, że gdy $v = 0$, to jedynym u, dla którego $16u^2 + uv + 94v^2 = 0$ jest liczba 0. Wobec tego funkcja g ma lokalne minimum w punkcie $(\ln 2, -1)$.

Podstawiając $x = u + \ln 10$ i $y = v + 2$ otrzymujemy

$$g(x,y) = g(u + \ln 10, v + 2) = 328 + 10000u^2 - 14000uv + 5350v^2 + \cdots .$$

Wyrażenie $10000u^2 - 14000uv + 5350v^2$ jest dodatnie dla dowolnie wybranych liczb u, v z wyjątkiem $u = 0 = v$, bo

$$(-14000v)^2 - 4\cdot 10000\cdot 5350v^2 = (196\,000\,000 - 214\,000\,000)v^2 = -18\,000\,000v^2 < 0 .$$

Wobec tego funkcja g ma lokalne minimum w punkcie $(\ln 10, 2)$. Podobnie jak dla funkcji f wykazujemy, że kresem górnym funkcji g jest $+\infty$, a kresem dolnym — $-\infty$. Innych punktów krytycznych ta funkcja nie ma. Proszę spróbować wyobrazić sobie wykres funkcji g. Jest to niezłe ćwiczenie na zrozumienie sytuacji.

Gradient funkcji h zeruje się w dwóch punktach: $(\ln 3, 0)$ i $(\ln 15, 2)$.

Podstawimy najpierw $x = u + \ln 3$. Mamy wtedy

$$h(x,y) = h(u + \ln 3, y) = 6y^5 + 15y^4 - 50y^3 - 90y^2 +$$
$$+ \tfrac{1}{4}\left(-e^{2(u+\ln 3)} + (y+1)^2(y+3)^2\right)^2 =$$
$$= 81u^2 - 216uy + 54y^2 + \cdots .$$

Wyrażanie $81u^2-216uy+54y^2$ bywa dodatnie, np. gdy $y=0\neq u$; bywa też ujemne, np. gdy $u=y\neq 0$. Wobec tego w punkcie $(\ln 3,0)$ funkcja h ma siodło.
Teraz kolej na punkt $(\ln 15,2)$. Podstawimy $x=u+\ln 15$, $y=2+v$. Po pewnych rachunkach otrzymujemy

$$h(x,y)=h(u+\ln 3,2+v)=6(2+v)^5+15(2+v)^4-50(2+v)^3-90(2+v)^2+ \\ +\tfrac14\Big(-e^{2(u+\ln 3)}+(2+v+1)^2(2+v+3)^2\Big)^2= \\ =-328+50625u^2-54000uv+14850v^2+\cdots.$$

Ponieważ $54000^2-4\cdot 50625\cdot 14850=-91125000<0$, więc wyrażenie $50625u^2-54000uv+14850v^2$ traktowane jako wielomian kwadratowy zmiennej u z parametrem v nie ma pierwiastków rzeczywistych, więc przyjmuje jedynie wartości dodatnie z wyjątkiem przypadku $v=0$, w którym ma jeden pierwiastek podwójny $u=0$. W tej sytuacji funkcja ma lokalne minimum w punkcie $(\ln 15,2)$.

Tak jak w przypadku funkcji f z łatwością stwierdzamy, że kres górny funkcji h równy jest $+\infty$, a dolny $-\infty$.

Podsumowanie: w przypadku funkcji jednej zmiennej ekstrem występowały na zmianę; w przypadku funkcji dwu zmiennych, tym bardziej w przypadku funkcji większej ich liczby może być zupełnie inaczej. Wynika to z tego, że struktura geometryczna płaszczyzny jest bardziej złożona niż struktura prostej, a w wyższych wymiarach te efekty są jeszcze silniejsze. Nie będziemy w te kwestie wchodzić głębiej. Jednak wypada podkreślić, że nie wolno zbyt szybko wyciągać wniosków i zbytnio wierzyć swej intuicji, bo ona może zawieść. Trzeba korzystać z twierdzeń, które są prawdziwe zwracając uwagę na to, czy założenia są spełnione. ∎

Uwaga 16.32 Rozumowania z ostatniego przykładu (bezpośrednio przed tą uwagą) można skrócić bardzo istotnie traktując każdą z trzech rozważanych tam funkcji jako sumę wielomianu $6y^5+15y^4-50y^3-90y^2$ zmiennej y i kwadratu pewnej funkcji dwu zmiennych. Bez trudu stwierdzamy, że w punktach -3 i 0 wielomian $6y^5+15y^4-50y^3-90y^2$ ma lokalne maksima, a w punktach -1 i 2 — lokalne minima. Kwadrat funkcji jakiejkolwiek w punkcie, w którym przyjmuje wartość 0 ma swoje minimum i to nie tylko lokalne. Stąd od razu wynika, że funkcja g ma w punktach $(\ln 2,-1)$ i $(\ln 10,2)$ lokalne minima — oba składniki mają tam lokalne minima! Minima te są właściwe, bo w żadnym innym punkcie funkcja g lokalnego minimum nie ma, gdyż jej jedynymi punktami krytycznymi są te dwa punkty. Zachęcamy do zastosowania tej metody w przypadku funkcji f i funkcji h. ∎

Zadania

16. 01 Zbadać ciągłość odwzorowania $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ określonego następująco:

$$f(x,y,z) = \left(\frac{xy}{1+z^2}, \frac{x^2y^2z^2}{x^2+y^2+z^2}\right), \text{ gdy } (x,y,z) \neq (0,0,0) \text{ i } f(0,0,0) = (0,0).$$

16. 02* Niech $f(x,y) = x^y$ dla $x > 0$ i $y > 0$. Pokazać, że nie można określić funkcji w $(0,0)$ tak, aby była ona ciągła w tym punkcie.

16. 03 Definiujemy funkcję $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ za pomocą wzorów: $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$, gdy $(x,y) \neq (0,0)$ oraz $f(0,0) = 0$. Pokazać, że obcięcie f do dowolnej prostej przechodzącej przez $(0,0)$ jest funkcją ciągłą na tej prostej, mimo że funkcja f nie jest ciągła w $(0,0)$.

16. 04* Zbiór $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k\colon \ f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)\}$ nazywamy poziomicą (warstwicą) przechodzącą przez punkt $\mathbf{x}_0$ funkcji $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$. Pokazać, że poziomice funkcji ciągłej są domknięte w $\mathbb{R}^k$.

16. 05 Obliczyć pochodne cząstkowe funkcji

(a) $f(x,y) = e^{-x^2-2xy+4}$, (b) $f(x,y) = \arctan(\frac{x}{y})$,

(c) $f(x,y,z) = e^x \sin y + e^y \sin(2z) + e^z \sin(3x)$, (d) $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} x_i^2}$, dla $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$,

(e) $f(\mathbf{x}) = e^{-\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}$, dla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$, gdzie $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k} x_i^2$.

16. 06 „Narysować” następujące zbiory (w odpowiedniej przestrzeni, R^2 lub R^3):

a. $A = \{(x,y)\colon \ |x| - |y| \le 1\}$,
b. $B = \{(x,y)\colon \ 0 < x+y \le 1, \ y \ge x^2\}$,
c. $C = \{(x,y)\colon \ 0 < x+y \le 1, \ y \ge x^2+1\}$,
d. $D = \{(x,y)\colon \ x^2+2x+y^2-4y \ge -1, \ 9x^2+16y^2 \le 144\}$,
e. $E = \{(x,y,z)\colon \ x \ge 0, \ y \ge 0, \ z \ge 0, \ x+2y+3z = 6\}$,
f. $F = \{(x,y,z)\colon \ x \ge 0, \ y \ge 0, \ z \ge 0, \ x+2y+3z < 6\}$,
g. $G = \{(x,y,z)\colon \ x^2+y^2 = 4z^2, \ x^2+y^2+z^2 = 9\}$,
h. $H = \{(x,y,z)\colon \ x^2+y^2 \le 4z^2, \ x^2+y^2+z^2 \le 9\}$,
i. $I = \{(x,y,z)\colon \ x^2+y^2 = 4, \ x^2+y^2+z^2 \le 9\}$,
j. $J = \{(x,y,z)\colon \ x^2+y^2 \le 4, \ x^2+y^2+z^2 \le 9\}$,
k. $K = \{(x,y,z)\colon \ x^2+y^2 \le 4, \ x^2+y^2+z^2 > 9\}$,
l. $L = \{(x,y,z)\colon \ x^2+y^2 < z, \ x^2+y^2+z^2 \le 1\}$,
m. $M = \{(x,y,z)\colon \ x^2-y^2 = z, \ x^2+y^2+z^2 \le 1\}$,
n. $N = \{(x,y,z)\colon \ x^2+y^2 \le 4, \ x^2+y^2-z^2 \le 1\}$,
o. $O = \{(x,y,z)\colon \ x^2+y^2 \le 4, \ z^2-x^2-y^2 \le 1\}$,

p. $P=\{(x,y,z)\colon\quad xy\le 0,\ x^2+z^2\le 1\}$
r. $R=\{(x,y,z)\colon\quad x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ x+y+z<3\}$,
s. $S=\{(x,y,z)\colon\quad x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ x+y+2z\ge 6,\ x+y+z\le 6\}$,
t. $T=\{(x,y,z)\colon\quad x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge -6,\ x+y+2z\ge 6,\ x+y+z\le 6\}$,
u. $U=\{(x,y,z)\colon\quad |x|\le 1,\ |y|\le 1,\ |z|\le 1,\ x^2+y^2+z^2\ge 1\}$,
v. $V=\{(x,y,z)\colon\quad |x|\le 1,\ |y|\le 1,\ |z|\le 1,\ x^2+y^2+z^2>1\}$,
w. $W=\{(x,y,z)\colon\quad |x|\le 1,\ |y|\le 1,\ |z|\le 1,\ x^2+y^2+z^2=1\}$.

16. 07* Wyjaśnić, które ze zbiorów zdefiniowanych w zadaniu 6 są otwarte, które domknięte, które ograniczone, które zwarte, a które wypukłe.

16. 08* Ciągłość normy. Pokazać, że $\Big|\|\mathbf{x}\|-\|\mathbf{y}\|\Big|\le\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$.

16. 09* Wypukłość normy. Pokazać, że $\|\alpha\mathbf{x}+(1-\alpha)\mathbf{y}\|\le\alpha\|\mathbf{x}\|+(1-\alpha)\|\mathbf{y}\|$ dla $0\le\alpha\le 1$. Pokazać, że kule $B(\mathbf{x}_0,r)$, $\overline{B}(\mathbf{x}_0,r)$ są zbiorami wypukłymi. Zbiór A jest wypukły, jeśli każdy odcinek, którego końce leżą w zbiorze A jest zawarty w A.

16. 10 Znaleźć kierunek najszybszego wzrostu funkcji f, czyli jej gradient, w punkcie P dla:
(a) $f(x,y)=\arctan(\frac{y}{x})$, $\mathbf{p}=(1,-2)$; (b) $f(x,y,z)=\sqrt{xy^2z^3}$, $\mathbf{p}=(2,2,2)$;
(c) $f(x,y,z)=e^{x-y-z}$, $\mathbf{p}=(5,2,3)$; (d) $f(x,y,z)=x+2y+3z$, $\mathbf{p}=(1,1,1)$.
Uwaga: dla funkcji f zależnej od 3 zmiennych zachodzi równość: $\operatorname{grad} f(\mathbf{p})=$ $=\nabla f(\mathbf{p})=\big(\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}),\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p}),\frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{p})\big)$, *analogicznie w przypadku dwu zmiennych.*

16. 11* Pokazać, że niżej zdefiniowana funkcja jest różniczkowalna w $(0,0)$:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3+y^3}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{jeżeli } (x,y)\ne(0,0);\\ 0, & \text{jeżeli } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

a funkcja

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & \text{jeżeli } (x,y)\ne(0,0);\\ 0, & \text{jeżeli } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

jest ciągła w punkcie $(0,0)$, ale różniczkowalna w tym punkcie nie jest.

16. 12* Pokazać, że funkcja $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$ nie jest różniczkowalna w $(0,0)$, chociaż istnieją obie pochodne cząstkowe w tym punkcie.

16. 13 Znaleźć punkty zerowania się gradientu funkcji f i wyjaśnić, w których z nich ma ona lokalne minima, w których – lokalne maksima, a w których nie ma lokalnego ekstremum, jeśli
(a) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z$;

(b) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$;

(c) $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$;

(d) $f(x,y,z) = x + \dfrac{4y^2}{x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}$;

(e) $f(x,y,z) = xy^2z^3(6 - x - 2y - 3z)$;

(f) $f(x,y) = 3x^8 + 3y^8 + 8x^3y^3$;

(g) $f(x,y) = y^2 + 3x^2y - x^3y$;

(h) $f(x,y) = y^2 + y^4 + 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$;

(i) $f(x,y) = x^5y^7(13 - x - y)$;

(j) $f(x,y) = -x^4 + y^4 + 4x^2y - 2y^2$;

w otoczeniu punktu $(0,0)$ *rozważyć zachowanie się funkcji* f *na paraboli* $y = x^2$.

(k) $f(x,y) = x^4 - y^4 - 2x^3 - 2xy^2 + x^2 + y^2$.

16. 14 Niech $f(x,y,z) = \frac{1}{9} \cdot \big(3(x+y)^3 - 18x^2 - 36xy - 54y^2 - 9z^2 + 2\big)$.
Znaleźć punkty krytyczne f, tj. te, w których

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \big(\,(x+y)^2 - 4x - 4y,\ (x+y)^2 - 4x - 12y,\ -2z\,\big)$$

jest wektorem zerowym. Wyjaśnić, w których z tych punktów funkcja f ma lokalne minima, w których lokalne maksima, a w których nie ma lokalnego ekstremum.

16. 15* Niech $f(x,y) = 6y^5 + 15y^4 - 50y^3 - 90y^2 + \frac{1}{4}\big(-e^{2x} + (y+1)^2(y-2)^2\big)^2$,

$$g(x,y) = 6y^5 + 15y^4 - 50y^3 - 90y^2 + \tfrac{1}{4}\big(-e^{2x} + y^2(y+3)^2\big)^2.$$

Znaleźć punkty zerowania się gradientu obu funkcji i wyjaśnić, w których punktach funkcje mają lokalne minima, w których lokalne maksima, a w których nie ma lokalnego ekstremum. Wykazać, że funkcje f i g nie są ograniczone ani z góry ani z dołu.

16. 16 Zobaczmy, co się może wydarzyć w wymiarze większym niż 1:

(a) Wykazać, że funkcja $(1+e^y)\cos x - ye^y$ ma nieskończenie wiele maksimów lokalnych, chociaż nie ma żadnego minimum lokalnego.

(b) Niech $f(x,y) = 6y^5 + 15y^4 - 50y^3 - 90y^2 + \frac{1}{4}\big(-e^{2x} + (y+1)^2(y+3)^2\big)^2$.
Znaleźć kresy funkcji f i punkty, w których funkcja ta ma lokalne ekstrema.
Można skorzystać z równości: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -e^{2x}\big(-e^{2x} + (y+1)^2(y+3)^2\big)$ i
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 30y(y+3)(y+1)(y-2) +$

$$+\,2(y+1)(y+2)(y+3)\big(-e^{2x} + (y+1)^2(y+3)^2\big).$$

16. 17 Znaleźć kresy funkcji f w pierwszej ćwiartce, jeśli $f(x,y) = \frac{xy^2}{4x^2+y^4+4}$.

16. 18* Niech $f(x,y) = \frac{xy^2-1}{4x^2+y^4+4}$. Znaleźć kres górny i kres dolny wartości funkcji f w **pierwszej ćwiartce** układu współrzędnych. Wyjaśnić, czy funkcja f ma wewnątrz pierwszej ćwiartki układu współrzędnych lokalne ekstrema.
Informacja: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(y^2+2x)(y^4-2xy^2+4)}{(4x^2+y^4+4)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2y(y^2+2x)(2x^2+2-xy^2)}{(4x^2+y^4+4)^2}$.

16. 19* Niech $\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$ oznaczają trzy **niewspółliniowe** punkty. Niech $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{p}\| + \|\mathbf{x}-\mathbf{q}\| + +\|\mathbf{x}-\mathbf{r}\|$ dla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, tzn. $f(\mathbf{x})$ jest sumą odległości punktu $\mathbf{x}$ od danych punktów $\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r}$. Wykazać, że jeśli $f(\mathbf{x}_0)$ jest najmniejszą wartością funkcji $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0,\infty)$, to albo $\mathbf{x}_0$ jest jednym z punktów $\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r}$, albo kąty między wektorami $\overrightarrow{\mathbf{x}-\mathbf{p}}$, $\overrightarrow{\mathbf{x}-\mathbf{q}}$, $\overrightarrow{\mathbf{x}-\mathbf{r}}$ są równe $\frac{2\pi}{3}$.

16. 20 Znaleźć kres dolny i kres górny funkcji f, $f(x,y,z) = (3x+2y+z)e^{-(6x+5y+3z)}$, na zbiorze $E = \{(x,y,z)\colon \quad x>0,\ y>0,\ z>0\}$.

16. 21 Znaleźć kres dolny i kres górny funkcji f, $f(x,y,z) = (3x+2y+z)e^{-(6x+5y+3z)}$, na zbiorze $E = \{(x,y,z)\colon \quad x>0,\ y>0,\ z>0\}$.

16. 22 Niech $f(x,y) = x^2y^5(8-x-y)$. Znaleźć wszystkie punkty zerowania się gradientu funkcji f i wyjaśnić, w których z nich funkcja f ma lokalne ekstrema i jakiego typu, a w których lokalnych ekstremów ta funkcja nie ma. Znaleźć $\sup\{f(x,y)\colon \quad 0\le x,\ 0\le y,\ x+y\le 10\}$.

16. 23 Niech $f(x,y) = x^6y^5(12-x-y)$. Znaleźć wszystkie punkty zerowania się gradientu funkcji f i wyjaśnić, w których z nich funkcja f ma lokalne ekstrema i jakiego typu, a w których lokalnych ekstremów ta funkcja nie ma. Znaleźć $\sup\{f(x,y)\colon \quad 0\le x,\ 0\le y,\ x+y\le 10\}$ i $\sup\{f(x,y)\colon \quad 0\le x,\ 0\le y,\ x+y\le 12\}$.

16. 24 Niech $f(x,y) = x^4y^2(7-4x-2y)$. Znaleźć wszystkie punkty zerowania się gradientu funkcji f i wyjaśnić, w których z nich funkcja f ma lokalne ekstrema i jakiego typu, a w których lokalnych ekstremów ta funkcja nie ma.
Znaleźć $\sup\{f(x,y)\colon \quad 0\le x,\ 0\le y,\ x+y\le 1\}$, $\inf\{f(x,y)\colon \quad 0\le x,\ 0\le y,\ x+y\le 1\}$ i $\sup\{f(x,y)\colon \quad 0\le x,\ 0\le y,\ x+y\le 2\}$.

16. 25 Niech $f(x,y) = x^3y^2(6-x-6y)$. Znaleźć wszystkie punkty zerowania się gradientu funkcji f i wyjaśnić, w których z nich funkcja f ma lokalne ekstrema i jakiego typu, a w których lokalnych ekstremów ta funkcja nie ma. Znaleźć $\sup\{f(x,y)\colon \quad 0\le x\le 10,\ 0\le y\le 2\}$.

16. 26 Znaleźć punkty zerowania się gradientu funkcji $x^5y^7(13-x-y)$ i wyjaśnić, w których z nich ma ona lokalne minima, w których – lokalne maksima, a w których nie ma lokalnego ekstremum. Znaleźć kresy funkcji f na zbiorze $\{(x,y)\colon \quad |x|,\ \ |y| \leq 10\}$.

16. 27 Znaleźć kres dolny i kres górny funkcji $xy - x - y + 3$, na zbiorze E, jeśli E jest trójkątem domkniętym o wierzchołkach $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,4)$.

16. 28 Znaleźć kres dolny i kres górny funkcji $x^2 + y^2 - xy$, na zbiorze

$$E = \{(x,y)\colon \quad |x| + |y| \leq 1\}.$$

16. 29 Znaleźć kres dolny i kres górny funkcji xy^2, na zbiorze

$$E = \{(x,y)\colon \quad x^2 + y^2 \leq 3\}.$$

16. 30 Znaleźć kres dolny i kres górny funkcji $(1+x^2)e^{-x^2-y^2}$, na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$.

16. 31 Niech $f(x,y,x) = 3x + 2y - z$, $g(x,y,x) = 3x + 2y + z$, T niech oznacza czworościan o wierzchołkach $A = (1,1,0)$, $B = (1,2,2)$, $C = (2,1,3)$, $D = (3,2,4)$. Znaleźć największą i najmniejszą wartość każdej z funkcji f,g na czworościanie T. W ilu punktach funkcje f,g przyjmują wartości ekstremalne na czworościanie T.

16. 32 Niech $f(x,y,z) = x^4 + y^5 + z^6$, $g(x,y,z) = 6x^6 + 4y^4 + 2z^2$. Mamy

$$\operatorname{grad} f(0,0,0) = (0,0,0) = \operatorname{grad} g(0,0,0).$$

Która z funkcji f,g ma w punkcie $(0,0,0)$ lokalne ekstremum i dlaczego?

16. 33 Niech $h(x,y) = ay(e^x - 1) + x\sin x - \cos y$. Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ funkcja h ma lokalne ekstremum w punkcie $(0,0)$, a dla jakich lokalnego ekstremum w tym punkcie nie ma?

Wskazówka: Dla pewnego a badanie drugiej różniczki może nie pozwolić na stwierdzenie, czy w punkcie $(0,0)$ funkcja ma lokalne ekstremum, czy też nie; w tym przypadku warto zainteresować się prostą przechodzącą przez $(0,0)$, złożoną z takich punktów (u,v), że

$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(0,0)u^2 + 2\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(0,0)uv + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(0,0)v^2 = 0$.

16. 34 Niech $f(x,y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2x^2 + 2y^2 + 1$.

Znaleźć punkty krytyczne funkcji f.

Wyjaśnić, w których punktach krytycznych funkcja f ma lokalne maksima, w których — lokalne minima, a w których siodła.

Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji f w kole $K = \{(x,y)\colon \quad x^2 + y^2 \leq 4\}$.

16. 35 Niech $f(x,y) = x^2 + (xy-1)^2$ dla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$Q := \{(x,y)\colon \quad -1 \leq x \leq 1 \quad \text{i} \quad -1 \leq y \leq 1\}.$$

Znaleźć wszystkie punkty zerowania się gradientu funkcji f i wyjaśnić, czy f ma w tych punktach lokalne maksima, lokalne minima lub siodła.

Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji f w kwadracie Q.

Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji f w płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ lub wykazać, że jedna z nich lub obie nie istnieją.

16. 36 Niech $f(x,y) = 8y^2 + 6x^2y - x^3y$.

Znaleźć punkty krytyczne funkcji f.

Wyjaśnić, w których punktach krytycznych funkcja f ma lokalne maksima, w których — lokalne minima, a w których siodła.

Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji f w prostokącie

$$R = \{(x,y): \quad -1 \le x \le 6, -3 \le y \le 1\}.$$

16. 37 Niech $f(x,y) = y^2 + 3x^2y - x^3y$ dla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$Q := \{(x,y): \quad -1 \le x \le 4 \quad \text{i} \quad -3 \le y \le 1\}.$$

Znaleźć wszystkie punkty zerowania się gradientu funkcji f i wyjaśnić, czy f ma w tych punktach lokalne maksima, lokalne minima lub siodła.

Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji f w kwadracie Q.

Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji f w płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ lub wykazać, że jedna z nich lub obie nie istnieją.

16. 38 Niech $f(x,y) = x^3 - 12xy + 8y^3$. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji f w zbiorze $T = \{(x,y): \quad 0 \le x \le 4, \ 0 \le y \le 4 \quad \text{i} \quad x+y \le 4\}$. Narysować zbiór T.

16. 39 Niech $f(x,y) = x^2 + 3xy^2 - xy^3$. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji f w prostokącie $R = \{(x,y): \quad -3 \le x \le 0 \quad \text{i} \quad -1 \le y \le 3\}$.

16. 40 Niech $f(x,y) = 2x^2y + xy^2 - 12xy$. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji f w prostokącie $Q = \{(x,y): \quad -1 \le x \le 6 \quad \text{i} \quad -1 \le y \le 12\}$.

16. 41 Niech $f(x,y) = x^2y + xy^2 - 3xy$. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji f w kwadracie $Q = \{(x,y): \quad -1 \le x \le 13 \quad \text{i} \quad -1 \le y \le 13\}$.

16. 42 Niech $f(x,y) = \big(x^2 + y^2 - 25\big)\big((x-8)^2 + y^2 - 25\big)$. Wiadomo, że
$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\big((x-8)^2 + y^2 - 25\big) + 2(x-8)\big(x^2 + y^2 - 25\big)$ oraz
$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y\big((x-8)^2 + y^2 - 25\big) + 2y\big(x^2 + y^2 - 25\big)$.

Znaleźć punkty zerowania się gradientu funkcji f i lokalne ekstrema funkcji f.

Znaleźć $\max f$ i $\min f$ w kole $\{(x,y): \quad x^2 + y^2 \le 25\}$.

16. 43 Niech $f(x,y) = x(2x - y - 5)(2x + y - 5)$. Wiadomo, że
$\frac{\partial f}{\partial x} = 25 - 40x + 12x^2 - y^2$ oraz $\frac{\partial f}{\partial y} = -2xy$.

Znaleźć punkty zerowania się gradientu funkcji f i lokalne ekstrema funkcji f.

Znaleźć $\max f$ i $\min f$ w zbiorze $\{(x,y): \quad |x| \le 3, |y| \le 15\}$.