Układy równań różniczkowych liniowych pierwszego rzędu

Poprawiony 2 czerwca 2015 r., 17:57

Pokazywaliśmy jak można rozwiązać równanie $x'' + x = 2\cos t + 12t\sin t$ uzmienniając obie stałe, które pojawiają się w rozwiązaniu ogólnym równania jednorodnego $x'' + x = 0$. W trakcie rozwiązywanie tą metodą trochę niespodziewanie pojawiło się równanie $c_1'(t)\cos t + c_2'(t)\sin t = 0$, po prostu zostało dopisane. Można jednak wyjaśnić skąd ono się bierze. Trzeba jednak w tym celu rozważyć nieco ogólniejszy problem.

Mamy rozwiązać równanie $x''+x = 2\cos t+12t\sin t$. Wprowadźmy oznaczenie $x' = y$. Wtedy $y' = x'' = -x + 2\cos t + 12t\sin t$. Możemy więc zamiast równania różniczkowego drugiego rzędu rozwiązywać układ dwóch równań pierwszego rzędu:

$$\begin{cases} x' = y\,, \\ y' = -x + 2\cos t + 12t\sin t\,. \end{cases}$$

Niech $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{g}(t) = \binom{0}{2\cos t+12t\sin t}$ oraz $\vec{\mathbf{x}} = \binom{x}{y}$. A jest więc macierzą, a $\vec{\mathbf{x}}$ niewiadomą funkcją zmiennej t, której wartościami są wektory, również $\vec{g}$ jest funkcją o wartościach wektorowych. Układ równań możemy zapisać tak:

$$\vec{\mathbf{x}}'(t) = A\vec{\mathbf{x}}(t) + \vec{g}(t)\,. \tag{ur}$$

To bardzo przypomina równanie liniowe

$$x'(t) = \lambda x(t) + b(t)\,.$$

Rozwiązaniem równania liniowego jednorodnego $x' = \lambda x$ jest funkcja $e^{\lambda t}\cdot c$, gdzie $c \in \mathbb{R}$ lub $c \in \mathbb{C}$, jeśli interesują nas rozwiązania zespolone. Wykażemy, że teraz jest tak samo, no może nieomal tak samo. W przypadku układu funkcja powinna mieć wartości wektorowe. Chodzi też o to skąd wziąć liczbę λ. To bardzo proste: należy znaleźć wartości własne i odpowiadające im wektory własne. Niech $A\vec{\mathbf{v}} = \lambda\vec{\mathbf{v}}$ i $\vec{\mathbf{x}}(t) = \vec{\mathbf{v}}e^{\lambda t}$. Wtedy $\vec{\mathbf{x}}'(t) = \lambda\vec{\mathbf{v}}e^{\lambda t} = A\vec{\mathbf{v}}e^{\lambda t}$, a to oznacza, że funkcja $\vec{\mathbf{x}}$ jest rozwiązaniem jednorodnego układu równań

$$\vec{\mathbf{x}}'(t) = A\vec{\mathbf{x}}(t)\,. \tag{jur}$$

Jeśli mamy trochę szczęścia i udało nam się znaleźć wektory $\vec{\mathbf{v}}_1$, $\vec{\mathbf{v}}_2$, $\ldots, \vec{\mathbf{v}}_k$ odpowiadające wartościom własnym λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_k, przy czym wektory $\vec{\mathbf{v}}_1$, $\vec{\mathbf{v}}_2$, $\ldots$, $\vec{\mathbf{v}}_k$ są liniowo niezależne,* to rozwiązaniem ogólnym układu jednorodnego jest funkcja

* Oznacza to, że jeśli $\vec{\mathbf{v}}_1c_1+\vec{\mathbf{v}}_2c_2+\dots+\vec{\mathbf{v}}_kc_k=\vec{\mathbf{0}}$, to $c_1=c_2=\ldots=c_k=0$; jeśli $k=1$, to $\vec{\mathbf{v}}_1\neq\vec{\mathbf{0}}$; jeśli $k=2$, to wektory $\vec{\mathbf{v}}_1,\vec{\mathbf{v}}_2$ nie leżą na jednej prostej; jeśli $k=3$, to wektory $\vec{\mathbf{v}}_1,\vec{\mathbf{v}}_2,\vec{\mathbf{v}}_3$ nie leżą na jednej płaszczyźnie.

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = \vec{\mathbf{v}}_1 e^{\lambda_1 t} \cdot c_1 + \vec{\mathbf{v}}_2 e^{\lambda_2 t} \cdot c_2 + \cdots + \vec{\mathbf{v}}_k e^{\lambda_1 t} \cdot c_k \,.$$

Niech $\mathbf{X}(t)$ będzie macierzą, której kolumnami są kolejno funkcje o wartościach wektorowych: $\vec{\mathbf{v}}_1 e^{\lambda_1 t}$, $\vec{\mathbf{v}}_2 e^{\lambda_2 t}$, $\ldots$,$\vec{\mathbf{v}}_k e^{\lambda_k t}$. Wtedy zachodzi równość $\vec{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{X}(t) \cdot \vec{\mathbf{c}}$, kolejnymi współrzędnymi wektora $\mathbf{c}$ są liczby $c_1, c_2 \ldots, c_k$. Zauważmy przy okazji, że zachodzi też równość

$$\mathbf{X}'(t) = A\mathbf{X}(t) \,.$$

Wynika ona stąd, że analogiczna równość jest spełniona dla każdej kolumny macierzy $\mathbf{X}$ i ze sposobu mnożenia macierzy. Macierz $\mathbf{X}$ zwana jest rozwiązaniem fundamentalnym układu jednorodnego, o ile jej kolumny są wektorami liniowo niezależnymi, a to o niej założyliśmy.

Rozwiązanie równania liniowego niejednorodnego mogliśmy znaleźć w postaci $e^{\lambda t} \cdot c(t)$. Rozwiązania układu równań niejednorodnych możemy poszukać w analogiczny sposób, tj. w postaci $\vec{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{X}(t) \cdot \vec{\mathbf{c}}(t)$. Mamy wtedy

$$\vec{\mathbf{x}}'(t) = \mathbf{X}'(t)\vec{\mathbf{c}}(t) + \mathbf{X}(t)\vec{\mathbf{c}}'(t) = A\mathbf{X}(t)\vec{\mathbf{c}}(t) + \mathbf{X}(t)\vec{\mathbf{c}}'(t) = A\vec{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{X}(t)\vec{\mathbf{c}}'(t) \,.$$

Wystarczy więc, by spełniona była równość

$$A\mathbf{x}(t) + \vec{g}(t) = \mathbf{x}'(t) = A\vec{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{X}(t)\vec{\mathbf{c}}'(t) \,,$$

czyli $\vec{g}(t) = \mathbf{X}(t)\vec{\mathbf{c}}'(t)$, by funkcja $\vec{\mathbf{X}}$ była rozwiązaniem układu niejednorodnego. Otóż można udowodnić, że $\det\big(\mathbf{X}(t)\big) \neq 0$, a z tego wynika, że istnieje $\big(\mathbf{X}(t)\big)^{-1}$. Możemy więc napisać $\vec{\mathbf{c}}'(t) = \big(\mathbf{X}(t)\big)^{-1} \vec{g}(t)$. Sprowadziliśmy więc rozwiązanie układu równań do scałkowania pewnej funkcji, której wartościami są wektory. Prześledzimy tę procedurę na przykładzie, od którego rozpoczęliśmy omawianie układów równań różniczkowych.

Mamy więc $k = 2$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{g}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\cos t + 12t\sin t \end{pmatrix}$.

Układ jednorodny wygląda więc tak:

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Równanie charakterystyczne macierzy A wygląda tak $0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$, zatem jej wartościami własnymi są liczby $\pm i$. Znajdziemy wektor własny $\binom{v_1}{v_2}$ odpowiadający wartości własnej i. Musi być spełniony układ równań (algebraicznych):

$$\begin{cases} 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 = iv_1, \\ -1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 = iv_2. \end{cases}$$

Oba równania są równoważne, zatem musi być spełniona równość $v_2 = iv_1$. Niech $v_1 = 1$. Widzimy, że $\binom{1}{i}$ jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej i. Ponieważ macierz A jest rzeczywista, więc wartości własnej $-i$ odpowiada wektor własny $\binom{1}{-i}$.

Wobec tego funkcje $\binom{1}{i}e^{it}$ oraz $\binom{1}{-i}e^{-it}$ są rozwiązaniami wektorowymi jednorodnego układu równań (różniczkowych). Rozwiązanie ogólne wygląda więc tak:

$$\binom{1}{i}e^{it}c_1 + \binom{1}{-i}e^{-it}c_2 = \begin{pmatrix} e^{it} & e^{-it} \\ ie^{it} & -ie^{-it} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Możemy więc przyjąć $\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} e^{it} & e^{-it} \\ ie^{it} & -ie^{-it} \end{pmatrix}$. Szukamy rozwiązania układu niejednorodnego w postaci $\mathbf{X}(t) \cdot \vec{\mathbf{c}}(t) = \begin{pmatrix} e^{it} & e^{-it} \\ ie^{it} & -ie^{-it} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}$. Podstawiając do wyjściowego układu i redukując wszystko, co tylko można, otrzymujemy:

$$\begin{pmatrix} e^{it} & e^{-it} \\ ie^{it} & -ie^{-it} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\cos t + 12t\sin t \end{pmatrix},$$

co można zapisać też nie używając macierzy

$$\begin{cases} c_1'(t)e^{it} + c_2'(t)e^{-it} &= 0, \\ c_1'(t)ie^{it} - c_2'(t)ie^{-it} &= 2\cos t + 12t\sin t. \end{cases}$$

Otrzymaliśmy więc układ równań z niewiadomymi funkcjami c_1', c_2' taki sam, jak w metodzie uzmienniania stałych stosowanej do równania różniczkowego drugiego rzędu. Tym razem nie trzeba było wprowadzać sztucznie pierwszego równania, pojawiło się samo. Teraz należy rozwiązać otrzymany układ równań. Mnożąc pierwsze przez e^{it}, drugie przez $-ie^{it}$ i dodając równania stronami otrzymujemy

$$2c_1'(t)e^{2it} = -i(2\cos t + 12t\sin t)e^{it}.$$

Stąd wynika, że

$$c_1'(t) = -i(\cos t + 6t\sin t)e^{-it} = -i(\cos t + 6t\sin t)(\cos t - i\sin t) = \\ = -\sin t\cos t - 6t\sin^2 t - i(\cos^2 t + 6t\sin t\cos t).$$

Z pierwszego równania wynika, że

$$c_2'(t) = -\mathbf{c}_1'(t)e^{2it} = i(\cos t + 6t\sin t)e^{it} = i(\cos t + 6t\sin t)(\cos t + i\sin t) = \\ = -\sin t\cos t - 6t\sin^2 t + i(\cos^2 t + 6t\sin t\cos t).$$

Pozostało scałkować otrzymane pochodne poszukiwanych funkcji:

$$\int c_1'(t)\,dt = \int \big(-\sin t\cos t - 6t\sin^2 t - i(\cos^2 t + 6t\sin t\cos t)\big)\,dt = \\ = 2\cos^2 t + 3\sin t\cos t - \tfrac{3}{2}t^2 - i\big(2\sin t\cos t + 2t - 3t\cos^2 t\big) + d_1,$$

gdzie d_1 jest pewną liczbą, być może nierzeczywistą. Analogicznie

$$\int c_2'(t)\,dt = \int \big(-\sin t\cos t - 6t\sin^2 t + i(\cos^2 t + 6t\sin t\cos t)\big)\,dt = \\ = 2\cos^2 t + 3\sin t\cos t - \tfrac{3}{2}t^2 + i\big(2\sin t\cos t + 2t - 3t\cos^2 t\big) + d_2,$$

gdzie d_2 jest pewną liczbą być może nierzeczywistą. Wobec tego rozwiązania układu niejednorodnego wyglądają w tym przypadku tak:

$$x_1(t) = \big(2\cos^2 t + 3t\sin t\cos t - \tfrac{3}{2}t^2 - i(2\sin t\cos t + 2t - 3t\cos^2 t) + d_1\big)e^{it} + \\ + \big(2\cos^2 t + 3t\sin t\cos t - \tfrac{3}{2}t^2 + i(2\sin t\cos t + 2t - 3t\cos^2 t) + d_2\big)e^{-it} =$$

$$= \big(2\cos^2 t + 3t\sin t\cos t - \tfrac{3}{2}t^2 - i(2\sin t\cos t + 2t - 3t\cos^2 t) + d_1\big)\big(\cos t + i\sin t\big) +$$
$$+ \big(2\cos^2 t + 3t\sin t\cos t - \tfrac{3}{2}t^2 + i(2\sin t\cos t + 2t - 3t\cos^2 t) + d_2\big)\big(\cos t - i\sin t\big) =$$
$$= 4\cos t - 3t^2\cos t + 2t\sin t + (d_1 + d_2)\cos t + i(d_1 - d_2)\sin t\,.$$

Analogicznie

$$x_2(t) = i\big(2\cos^2 t + 3t\sin t\cos t - \tfrac{3}{2}t^2 - i(2\sin t\cos t + 2t - 3t\cos^2 t) + d_1\big)e^{it} -$$
$$- i\big(2\cos^2 t + 3t\sin t\cos t - \tfrac{3}{2}t^2 + i(2\sin t\cos t + 2t - 3t\cos^2 t) + d_2\big)e^{-it} =$$
$$= i\big(2\cos^2 t + 3t\sin t\cos t - \tfrac{3}{2}t^2 - i(2\sin t\cos t + 2t - 3t\cos^2 t) + d_1\big)\big(\cos t + i\sin t\big) -$$
$$- i\big(2\cos^2 t + 3t\sin t\cos t - \tfrac{3}{2}t^2 + i(2\sin t\cos t + 2t - 3t\cos^2 t) + d_2\big)\big(\cos t - i\sin t\big) =$$
$$= 3t^2\sin t - 2t\cos t - (d_1 + d_2)\sin t + i(d_1 - d_2)\cos t\,.$$

Przyjmimy $d_1 = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Jeśli chcemy, by funkcja x_1 przyjmowała jedynie rzeczywiste wartości, należy założyć, że $d_1 + d_2$ jest liczbą rzeczywistą, a $d_1 - d_2$ — liczbą czysto urojoną. Oznacza to, że $\mathrm{Im}\, d_2 = -\mathrm{Im}\, d_1 = -\beta$ i $\mathrm{Re}\, d_2 = \mathrm{Re}\, d_1 = \alpha$. Rozwiązania przyjmują postać

$$x_1(t) = 4\cos t - 3t^2\cos t + 2t\sin t + 2\alpha\cos t - 2\beta\sin t\,,$$
$$x_2(t) = 3t^2\sin t - 2t\cos t - 2\alpha\sin t - 2\beta\cos t\,.$$

Oczywiście żadnych ograniczeń na liczby rzeczywiste α, β nie ma.

Dodać trzeba, że mogliśmy rozwiązanie ogólne układu jednorodnego zapisać w inny sposób. Np. zamiast rozwiązań wektorowych $\binom{1}{i}e^{it}$ i $\binom{1}{-i}e^{-it}$ mogliśmy rozważać funkcje

$$\mathrm{Re}\left[\tbinom{1}{i}e^{it}\right] = \tfrac{1}{2}\left[\tbinom{1}{i}e^{it} + \tbinom{1}{-i}e^{-it}\right] = \tbinom{\cos t}{-\sin t} \text{ oraz}$$
$$\mathrm{Im}\left[\tbinom{1}{i}e^{it}\right] = \tfrac{1}{2i}\left[\tbinom{1}{i}e^{it} - \tbinom{1}{-i}e^{-it}\right] = \tbinom{\sin t}{\cos t}\,.$$

Prowadzi do wzoru

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Zachęcam studentów do przeprowadzenia obliczeń startując z z właśnie wskazanego rozwiązania fundamentalnego. Obliczenia wcale nie będą trudniejsze niż pokazane przeze mnie.

Zajmiemy się teraz dwoma układami trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi funkcjami.

Przykład 15.1 Niech $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Rozważymy układ równań różniczkowych jednorodnych (zapisany w postaci wektorowej)

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = \vec{\mathbf{x}}'(t) = A\vec{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_1(t) - 2x_2(t) + 4x_3(t) \\ 2x_1(t) + 2x_3(t) \\ -2x_1(t) + x_2(t) - x_3(t) \end{pmatrix}.$$

Zaczniemy od znalezienia wartości własnych, potem zajmiemy się wektorami własnymi tej macierzy. Równanie charakterystyczne wygląda tak

$$0 = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & 4 \\ 2 & 0-\lambda & 2 \\ -2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = (1-\lambda)^2(2-\lambda)\,.$$

Wobec tego wartościami własnymi są liczby $1, 1, 2$.* Jeśli wektor $\vec{\mathbf{v}}$ o współrzędnych v_1, v_2, v_3 odpowiada wartości własnej 2, to muszą być spełnione równości

$$\begin{cases} 5v_1 - 2v_2 + 4v_3 = 2v_1, \\ 2v_1 + 0v_2 + 2v_3 = 2v_2, \\ -2v_1 + 1v_2 - 1v_3 = 2v_3, \end{cases} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} 3v_1 - 2v_2 + 4v_3 = 0, \\ 2v_1 - 2v_2 + 2v_3 = 0, \\ -2v_1 + \ \ v_2 - 3v_3 = 0. \end{cases}$$

Odejmując drugie równanie od pierwszego otrzymujemy $v_1 + 2v_3 = 0$, a zatem $v_1 = -2v_3$. Po podstawieniu tego wyniku do dowolnego z trzech równań otrzymujemy $v_2 = -v_3$. Przyjmując np. $v_3 = -1$ (możemy też $v_3 = 1683 \cdot \sqrt[1410]{1525}$) stwierdzamy, że wektor $\vec{\mathbf{v}}_1 = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ odpowiada wartości własnej 2. Teraz znajdziemy wektory odpowiadające wartości własnej 1. Jeśli v_1, v_2, v_3 są współrzędnymi takiego wektora, to

$$\begin{cases} 5v_1 - 2v_2 + 4v_3 = v_1, \\ 2v_1 + 0v_2 + 2v_3 = v_2, \\ -2v_1 + 1v_2 - 1v_3 = v_3, \end{cases} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} 4v_1 - 2v_2 + 4v_3 = 0, \\ 2v_1 - \ \ v_2 + 2v_3 = 0, \\ -2v_1 + \ \ v_2 - 2v_3 = 0. \end{cases}$$

Otrzymaliśmy trzy równoważne równania. Oznacza to, że możemy wybrać dowolnie np. wartości v_1 i v_3 i wyznaczyć v_2 z wzoru $v_2 = 2v_1 + 2v_3$. Wybierając np. $v_1 = 1$. $v_3 = 0$ otrzymujemy $v_2 = 2$. Podobnie z równości $v_1 = 0$ i $v_3 = 1$ wynika równość $v_2 = 2$. Znaleźliśmy więc dwa wektory własne $\vec{\mathbf{v}}_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ i $\vec{\mathbf{v}}_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, które nie leżą na jednej prostej, bowiem z równości $\vec{\mathbf{0}} = c_2\vec{\mathbf{v}}_2 + c_3\vec{\mathbf{v}}_3 = \left(\begin{smallmatrix} c_2 \\ 2c_2+2c_3 \\ c_3 \end{smallmatrix}\right)$ wynikają oczywiście równości $c_2 = 0 = c_3$. Można bez trudu stwierdzić, że jeśli $\vec{\mathbf{0}} = c_1\vec{\mathbf{v}}_1 + c_2\vec{\mathbf{v}}_2 + c_3\vec{\mathbf{v}}_3 = \left(\begin{smallmatrix} 2c_1+c_2 \\ c_1+2c_2+2c_3 \\ -c_1+c_3 \end{smallmatrix}\right)$, to $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Wynika stąd łatwo, że dla każdego wektora $\vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^3$ istnieje i to dokładnie jedna taka trójka liczb c_1, c_2, c_3, że $\vec{\mathbf{v}} = c_1\vec{\mathbf{v}}_1 + c_2\vec{\mathbf{v}}_2 + c_3\vec{\mathbf{v}}_3$. Możemy więc stwierdzić, że funkcja o wartościach wektorowych

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = c_1\vec{\mathbf{v}}_1e^{2t} + c_2\vec{\mathbf{v}}_2e^t + c_3\vec{\mathbf{v}}_3e^t = \left(\begin{smallmatrix} 2c_1e^{2t}+c_2e^t \\ c_1e^{2t}+2c_2e^t+2c_3e^t \\ -c_1e^{2t}+c_3e^t \end{smallmatrix}\right)$$

jest rozwiązaniem ogólnym jednorodnego układu równań, tzn. każde rozwiązanie możemy zapisać w tej postaci dobierając stałe c_1, c_2, c_3 w odpowiedni sposób. ■

Przykład 15.2 Niech $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Rozważymy więc układ równań:

* Liczba 1 jest powtórzona, bo jest pierwiastkiem podwójnym równania charakterystycznego, czyli jest podwójną wartością własną.

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = \vec{\mathbf{x}}'(t) = A\vec{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_1(t) + 2x_2(t) - x_3(t) \\ -3x_1(t) + x_3(t) \\ 3x_1(t) + 2x_2(t) + x_3(t) \end{pmatrix}.$$

Zaczniemy, jak poprzednio, od znalezienia wartości własnych macierzy A. Szukamy takich liczb λ, dla których spełniona jest równość

$$0 = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & -1 \\ -3 & 0-\lambda & 1 \\ 3 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = (2-\lambda)^3 .$$

Tym razem macierz ma jedną, za to trzykrotną, wartość własną. Jeśli $\vec{\mathbf{v}} = \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{smallmatrix}\right)$ jest wektorem własnym macierzy A, to muszą być spełnione równości:

$$\begin{cases} 5v_1 + 2v_2 - v_3 = 2v_1, \\ -3v_1 + 0v_2 + v_3 = 2v_2, \\ 3v_1 + 2v_2 + v_3 = 2v_3, \end{cases} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} 3v_1 + 2v_2 - v_3 = 0, \\ -3v_1 - 2v_2 + v_3 = 0, \\ 3v_1 + 2v_2 - v_3 = 0. \end{cases}$$

Oznacza to, że $\vec{\mathbf{v}}$ jest wektorem własnym macierzy A wtedy i tylko wtedy, gdy $v_3 = 3v_1 + 2v_2$. Niech $\vec{\mathbf{v}}_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$, $\vec{\mathbf{v}}_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$. Jest jasne, że jeśli $\vec{\mathbf{v}} = \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{smallmatrix}\right)$ i $v_3 = 3v_1 + 2v_2$, to $\vec{\mathbf{v}} = v_1 \cdot \mathbf{v}_1 + v_2 \cdot \mathbf{v}_2$. Wynika stąd, że używając rozwiązań postaci $\vec{\mathbf{v}}e^{2t}$ nie znajdziemy nigdy rozwiązania $\vec{\mathbf{x}}$, dla którego spełniona byłaby równość $\vec{\mathbf{x}}(0) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Wobec tego funkcja $c_1\vec{\mathbf{v}}_1e^{2t} + c_2\vec{\mathbf{v}}_2e^{2t}$ **nie** jest rozwiązaniem ogólnym układu.

W tej sytuacji należy znaleźć tzw. uogólniony wektor własny, tj. wektor $\vec{\mathbf{w}}$, dla którego istnieje taki wektor własny $\vec{\mathbf{v}}$, że spełniona jest równość

$$A\vec{\mathbf{w}} = \lambda\vec{\mathbf{w}} + \vec{\mathbf{v}} \overset{\text{bo}}{\underset{\lambda=2}{=\!=}} 2\vec{\mathbf{w}} + \vec{\mathbf{v}} .$$

Wtedy, jak to sprawdzimy za chwilę, funkcja $(\vec{\mathbf{w}} + t\vec{\mathbf{v}})e^{\lambda t} \overset{\text{bo}}{\underset{\lambda=2}{=\!=}} (\vec{\mathbf{w}} + t\vec{\mathbf{v}})e^{2t}$. W ten sposób znajdziemy brakujące rozwiązania.

Najpierw wykażę, że znalezienie wektora $\vec{\mathbf{w}}$ rozwiązuję problem:

$$\big((\vec{\mathbf{w}} + t\vec{\mathbf{v}})e^{\lambda t}\big)' = \vec{\mathbf{v}}e^{\lambda t} + \lambda(\vec{\mathbf{w}} + t\vec{\mathbf{v}})e^{\lambda t} = (\lambda\vec{\mathbf{w}} + \vec{\mathbf{v}})e^{\lambda t} + t\lambda\vec{\mathbf{v}}e^{\lambda t} = (A\vec{\mathbf{w}})e^{\lambda t} + t(A\vec{\mathbf{v}})e^{\lambda t} = \\ = A\big((\vec{\mathbf{w}} + t\vec{\mathbf{v}})e^{\lambda t}\big) .$$

Teraz znajdziemy wektor $\vec{\mathbf{w}}$. Równanie $A\vec{\mathbf{w}} = \lambda\vec{\mathbf{w}} + \vec{\mathbf{v}}$ można przepisać w postaci♠ $(A - \lambda I)\vec{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}\vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{v}}$. Spróbujmy przyjąć $\vec{\mathbf{w}} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Wtedy

$$\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

— $\vec{\mathbf{v}}$ jest wektorem własnym, bowiem

♠ Przypominamy, że I to macierz jednostkowa, ma jedynki na głównej przekątnej, poza nią — zera.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Jest jasne , że jeśli $\vec{\mathbf{w}} = \left(\begin{smallmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{smallmatrix}\right)$, to

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}\vec{\mathbf{w}} = (-3w_1 - 2w_2 + w_3)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

a więc zastąpienie wektora $\vec{\mathbf{w}}$ innym może jedynie w nieistotny sposób zmienić wektor $\vec{\mathbf{v}}$ — zastąpimy go równoległym do niego, pomimo tego, że mamy do dyspozycji całą płaszczyznę!

Możemy napisać w końcu

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = c_1\vec{\mathbf{v}}_1 e^{2t} + c_2\vec{\mathbf{v}}_2 e^{2t} + c_3(\vec{\mathbf{w}} + t\vec{\mathbf{v}})e^{2t} = \begin{pmatrix} (c_1 - c_3 t)e^{2t} \\ (c_2 + c_3 t)e^{2t} \\ (3c_1 + 2c_2 + c_3 - c_3 t)e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Oczywiście dla każdego wektora $\vec{\mathbf{u}} = \left(\begin{smallmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{smallmatrix}\right)$ można znaleźć takie stałe c_1, c_2, c_3, że $\vec{\mathbf{u}} = c_1\vec{\mathbf{v}}_1 + c_2\vec{\mathbf{v}}_2 + c_3\vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{x}}(0)$,* a to oznacza, że funkcja $\vec{\mathbf{x}}$ jest rozwiązaniem ogólnym układu. ■

Obejrzymy jeszcze jeden układ jednorodny.

Przykład 15.3 Spróbujemy rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + x_2(t), \\ x_2'(t) = 2x_2(t) + x_3(t), \\ x_3'(t) = 2x_3(t). \end{cases}$$

Zapiszemy go w postaci wektorowej. Niech $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Bez trudu sprawdzamy, że liczba 2 jest potrójną wartością własną macierzy A oraz że wektorami własnymi jej odpowiadającymi są wektory postaci $\vec{\mathbf{v}} = \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = v_1\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Zbiór z nich złożony jest więc jednowymiarową przestrzenią liniową. Niech $\vec{\mathbf{v}}_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Niech $\vec{\mathbf{v}}_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Zachodzi równość $(A - 2I)\vec{\mathbf{v}}_2 = \vec{\mathbf{v}}_1$. Mamy więc rozwiązanie postaci $c_2(\vec{\mathbf{v}}_2 + t\vec{\mathbf{v}}_1)e^{2t} + c_1\vec{\mathbf{v}}_1 e^{2t}$. Nie jest to niestety rozwiązanie ogólne, bo niezależnie od tego, co uczynimy ze stałymi c_1, c_2, to podana funkcja w punkcie 0 nie przyjmie wartości $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Zauważmy jednak, że jeśli $\vec{\mathbf{v}}_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, to $(A - 2I)\vec{\mathbf{v}}_3 = \vec{\mathbf{v}}_2$, czyli $A\vec{\mathbf{v}}_3 = 2\vec{\mathbf{v}}_3 + \vec{\mathbf{v}}_2$. Niech

*Wystarczy przyjąć $c_1 = u_1$, $c_2 = u_2$ i $c_3 = u_3 - 2u_2 - 3u_1$.

$$\vec{\mathbf{x}}_3(t) = \big(\vec{\mathbf{v}}_3 + t\vec{\mathbf{v}}_2 + \tfrac{1}{2}t^2\vec{\mathbf{v}}_1\big)e^{2t}\,.$$

Mamy teraz

$$\vec{\mathbf{x}}_3'(t) = \big(\vec{\mathbf{v}}_2 + t\vec{\mathbf{v}}_1\big)e^{2t} + 2\big(\vec{\mathbf{v}}_3 + t\vec{\mathbf{v}}_2 + \tfrac{1}{2}t^2\vec{\mathbf{v}}_1\big)e^{2t} =$$
$$= (2\vec{\mathbf{v}}_3 + \vec{\mathbf{v}}_2)e^{2t} + t(2\vec{\mathbf{v}}_2 + \vec{\mathbf{v}}_1)e^{2t} + t^2\vec{\mathbf{v}}_1e^{2t} = A\vec{\mathbf{v}}_3e^{2t} + tA\vec{\mathbf{v}}_2e^{2t} + \tfrac{1}{2}A\vec{\mathbf{v}}_1e^{2t} =$$
$$= A\big(\vec{\mathbf{v}}_3 + t\vec{\mathbf{v}}_2 + \tfrac{1}{2}t^2\vec{\mathbf{v}}_1\big)e^{2t} = A\vec{\mathbf{x}}_3(t)\,.$$

Wskazaliśmy więc następne rozwiązanie. Niech

$$\vec{\mathbf{x}}(t) \;=\; c_1\big(\vec{\mathbf{v}}_1 + t\vec{\mathbf{v}}_2 + \tfrac{1}{2}t^2\vec{\mathbf{v}}_3\big)e^{2t} + c_2\big(\vec{\mathbf{v}}_2 + t\vec{\mathbf{v}}_3\big)e^{2t} + c_3\vec{\mathbf{v}}_3e^{2t} \;=\; \begin{pmatrix} c_1e^{2t} \\ (c_1t + c_2)e^{2t} \\ (\frac{1}{2}c_1t^2 + c_2t + c_3)e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Funkcja ta jest rozwiązaniem ogólnym układu, bo manipulując współczynnikami c_1, c_2, c_3 można uzyskać dowolną wartość $\vec{\mathbf{x}}(0)$. ■

Pojawił się tu nowy sposób znajdowania. rozwiązania ogólnego. Nie będziemy dowodzić ogólnego twierdzenia, które kryje się za przedstawianymi rozumowaniami, bo nie mamy na to czasu.

Definicja 15.1 (serii)

Ciąg wektorów $\vec{\mathbf{v}}_1$, $\vec{\mathbf{v}}_2$, … , $\vec{\mathbf{v}}_m$ nazywamy serią Jordana długości m odpowiadającą wartości własnej λ macierzy A wtedy i tylko wtedy, gdy

$A\vec{\mathbf{v}}_1 = \lambda\vec{\mathbf{v}}_1 + \vec{\mathbf{v}}_2\,,\ A\vec{\mathbf{v}}_2 = \lambda\vec{\mathbf{v}}_2 + \vec{\mathbf{v}}_3\,,\ \dots\ ,\ A\vec{\mathbf{v}}_{m-1} = \lambda\vec{\mathbf{v}}_{m-1} + \vec{\mathbf{v}}_m$ i $A\vec{\mathbf{v}}_m = \lambda\vec{\mathbf{v}}_m\,.$ ■

W ostatnim przykładzie wystąpiła jedna seria ($\vec{\mathbf{v}}_3, \vec{\mathbf{v}}_2, \vec{\mathbf{v}}_1$) długości 3 i dzięki niej udało się napisać rozwiązanie układu w postaci ogólnej. W poprzednim przykładzie występowała seria długości 2 . Wektor własny to seria długości 1 .

Twierdzenie Jordana, którego nie będziemy dowodzić, mówi, że jeśli mamy n–krotną wartość własną, to możemy znaleźć serie Jordana jej odpowiadające w taki sposób, by ich suma długości była równa krotności wartości własnej n i by wszystkie wektory występujące w tych seriach były liniowo niezależne. Nie mówimy też jak można to zrobić. W przykładach, które rozpatrujemy, będzie to proste.

Mając daną serię długości m możemy napisać rozwiązania, które jej odpowiadają

$$\big(\vec{\mathbf{v}}_1 + t\vec{\mathbf{v}}_2 + \tfrac{1}{2}t^2\vec{\mathbf{v}}_3 + \cdots + \tfrac{1}{(m-1)!}t^{m-1}\big)e^{\lambda t},\ \big(\vec{\mathbf{v}}_2 + t\vec{\mathbf{v}}_3 + \tfrac{1}{2}t^2\vec{\mathbf{v}}_4 + \cdots + \tfrac{1}{(m-2)!}t^{m-2}\big)e^{\lambda t},$$
$$\dots\ ,\ \big(\vec{\mathbf{v}}_{m-1} + t\vec{\mathbf{v}}_m\big)e^{\lambda t},\ \vec{\mathbf{v}}_me^{\lambda t}\,.$$

W rozwiązaniu ogólnym pojawi się składnik

$$c_1\big(\vec{\mathbf{v}}_1 + t\vec{\mathbf{v}}_2 + \tfrac{1}{2}t^2\vec{\mathbf{v}}_3 + \cdots + \tfrac{1}{(m-1)!}t^{m-1}\big)e^{\lambda t} + c_2\big(\vec{\mathbf{v}}_2 + t\vec{\mathbf{v}}_3 + \tfrac{1}{2}t^2\vec{\mathbf{v}}_4 + \cdots + \tfrac{1}{(m-1)!}t^{m-1}\big)e^{\lambda t} +$$
$$+ \cdots + c_{m-1}(\vec{\mathbf{v}}_{m-1} + t\vec{\mathbf{v}}_m)e^{\lambda t} + c_m\vec{\mathbf{v}}_me^{\lambda t}\,.$$

Wynika z tego, że współrzędne rozwiązania ogólnego są quasiwielomianami, których stopień jest o co najmniej jeden mniejszy od długości każdej serii związanej z daną wartością własną, która oczywiście pojawia się w wykładniku.

Można więc nie szukać serii, lecz założyć że współrzędne są quasiwielomianami, których stopień jest o co najmniej jeden mniejszy od krotności wartości własnej (to na ogół za dużo) podstawić taką ogólną funkcję wektorową w miejsce poszukiwanej do układu i znaleźć warunki na współczynniki; oczywiście na wstępie nie zakładamy żadnych relacji między współczynnikami występującym na różnych współrzędnych.

Zadania

15.01 Znaleźć rozwiązanie ogólne układu równań: $\begin{cases} x' = x - 3y, \\ y' = 3x + y. \end{cases}$

15.02 Znaleźć rozwiązanie ogólne układu równań: $\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = 3y - 2x. \end{cases}$

15.03 Znaleźć rozwiązanie ogólne układu równań: $\begin{cases} x' + x + 5y = 0, \\ y' - x - y = 0. \end{cases}$

15.04 Znaleźć rozwiązanie ogólne układu równań: $\begin{cases} x' = 2y - 3x = 0, \\ y' = y - 2x. \end{cases}$

15.05 Znaleźć rozwiązanie ogólne układu równań: $\begin{cases} x' = 4x - y, \\ y' = 5x + 2y. \end{cases}$

15.06 Znaleźć rozwiązanie ogólne układu równań: $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 4y - x. \end{cases}$

15.07 Znaleźć rozwiązanie ogólne układu równań: $\begin{cases} x' = 3x - y, \\ y' = 4x - y. \end{cases}$

15.08 Znaleźć rozwiązanie ogólne układu równań: $\begin{cases} x' - 5x - 3y = 0, \\ y' + 3x + y = 0. \end{cases}$

15.09 Znaleźć rozwiązanie ogólne układu równań: $\begin{cases} x' = 2x + y + z \\ y' = -2x - z, \\ z' = 2x + y + 2z. \end{cases}$

15.10 Znaleźć rozwiązanie ogólne układu równań: $\begin{cases} x' = x - y - z, \\ y' = x + y, \\ z' = 3x + z. \end{cases}$

15.11 Znaleźć rozwiązanie ogólne układu równań: $\begin{cases} x' = 4x - y - z, \\ y' = x + 2y - z, \\ z' = 2y + 3z - x. \end{cases}$

15.12 Znaleźć rozwiązanie ogólne układu równań: $\begin{cases} x' = y - 2z - x, \\ y' = 4x + y, \\ z' = 2x + y - z. \end{cases}$

15.13 Znaleźć rozwiązanie ogólne układu równań: $\begin{cases} x' = 2x - y - z, \\ y' = 2x - y - 2z, \\ z' = 2z - x + y. \end{cases}$

15.14 Znaleźć rozwiązanie ogólne układu równań: $\begin{cases} x' = 2x - y + z, \\ y' = x + 2y - z, \\ z' = x - 2y + 2z. \end{cases}$

15. 15 Znaleźć rozwiązanie ogólne układu równań: $\begin{cases} x' = 2x + 2z - y, \\ y' = x + 2z, \\ z' = y - 2x - z. \end{cases}$

15. 16 Znaleźć rozwiązanie ogólne układu równań: $\begin{cases} x' = x - y + z, \\ y' = x + y - z, \\ z' = 2z - y. \end{cases}$

15. 17 Znaleźć rozwiązanie ogólne układu równań: $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 2y + 4z, \\ z' = x - z. \end{cases}$

15. 18 Znaleźć rozwiązanie ogólne układu równań: $\begin{cases} x' = 4x - y, \\ y' = 3x + y - z, \\ z' = x + z. \end{cases}$

15. 19 Znaleźć rozwiązanie ogólne układu równań: $\begin{cases} w' = 7w - 2x + 5y - 10z, \\ x' = 5w - 2x - 5z, \\ y' = 2w + 3y - 4z, \\ z' = 5w - x + 5y - 8z. \end{cases}$

15. 20 Znaleźć rozwiązanie ogólne układu równań: $\begin{cases} w' = 7w - 4x + 5y - 10z, \\ x' = 3w - 2x - 3z, \\ y' = 2w + 3y - 4z, \\ z' = 5w - 2x + 5y - 8z. \end{cases}$

15. 21 Rozwiązać układ równań (można ewentualnie uzmienniać stałe):

$$\begin{cases} x' = y + \operatorname{tg}^2 t - 1, \\ y' = -x + \operatorname{tg} t\,; \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = 2y - x, \\ y' = 4y - 3x + \frac{e^{3t}}{1+e^{2t}}. \end{cases}$$

15. 22 Rozwiązać układ równań (można ewentualnie uzmienniać stałe):

$$\begin{cases} x' = -4x - 2y + \frac{2}{e^t-1}, \\ y' = 6x + 3y - \frac{3}{e^t-1}\,; \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = x - y + \frac{1}{\cos t}, \\ y' = 2x - y. \end{cases}$$

15. 23 Rozwiązać układ równań (można ewentualnie uzmienniać stałe):

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 2x - y + 15e^t\sqrt{t}. \end{cases}$$

15. 24 Rozwiązać układ równań (można ewentualnie uzmienniać stałe):

$$\begin{cases} x' = y + \operatorname{tg}^2 t - 1, \\ y' = -x + \operatorname{tg} t. \end{cases}$$

15. 25 Rozwiązać układ równań (można ewentualnie uzmienniać stałe):

$$\begin{cases} x' = 2y - x, \\ y' = 4y - 3x + \frac{e^{3t}}{1+e^{2t}}. \end{cases}$$

15. 26 Rozwiązać układ równań (można ewentualnie uzmienniać stałe):

$$\begin{cases} x' = -4x - 2y + \frac{2}{e^t-1}, \\ y' = 6x + 3y - \frac{3}{e^t-1}. \end{cases}$$

15. 27 Rozwiązać układ równań (można ewentualnie uzmienniać stałe):

$$\begin{cases} x' = x - y + \frac{1}{\cos t}, \\ y' = 2x - y. \end{cases}$$

15. 28 Rozwiązać układ równań (można ewentualnie uzmienniać stałe):

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 2x - y + 15e^t\sqrt{t}. \end{cases}$$

15. 29 Niech $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Znaleźć iloczyn $M \cdot \mathbf{v}$ i rozwiązanie ogólne układu równań $\mathbf{x}'(t) = M \cdot \mathbf{x}(t)$.

Znaleźć rozwiązanie ogólne układu równań $\mathbf{x}'(t) = M \cdot \mathbf{x}(t)$.

Znaleźć rozwiązania układu równań $\mathbf{x}_j'(t) = M \cdot \mathbf{x}_j(t)$, $j = 1, 2$ spełniające warunki $\mathbf{x}_1(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ oraz $\mathbf{x}_2(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

15. 30 Znaleźć rozwiązanie ogólne układu równań różniczkowych $\begin{cases} x'(t) = -x(t) + y(t), \\ y'(t) = -x(t) - 3y(t). \end{cases}$

Znaleźć rozwiązanie szczególne spełniające warunek początkowy $x(0) = 0$, $y(0) = 7$.

15. 31 Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - y(t) + e^{4t} \cdot \sin t, \\ y'(t) = x(t) + 5y(t) - e^{4t} \cdot \sin t. \end{cases} \tag{4}$$

Znaleźć rozwiązanie układu (4) spełniające warunki $x(0) = -2$ i $y(0) = 2$.

Znaleźć rozwiązanie układu (4) spełniające warunki $x(0) = 0 = y(0)$.

15. 32 Znaleźć wartości i wektory własne macierzy $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - 2y(t) + 3e^{3t} \cdot \cos(3t), \\ y'(t) = 2x(t) + 5y(t) - 3e^{3t} \cdot \cos(3t). \end{cases}$$

15. 33 Rozwiązać układ równań $\begin{cases} x'(t) = 6x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 8x(t) - 5y(t). \end{cases}$

15. 34 Znaleźć rozwiązanie układu równań $\begin{cases} x'(t) = -13x(t) + 25y(t), \\ y'(t) = -9x(t) + 17y(t), \end{cases}$

które spełnia warunek $x(0) = -2$, $y(0) = -1$.

15. 35 Niech $M = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -7 & -4 & -1 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Znaleźć iloczyny $M \cdot \mathbf{v}$ i $M \cdot \mathbf{w}$.

Znaleźć rozwiązanie ogólne układu równań $\mathbf{x}'(t) = M \cdot \mathbf{x}(t)$.

Znaleźć takie rozwiązanie układu równań $\mathbf{x}'(t) = M \cdot \mathbf{x}(t)$, że $\mathbf{x}(0) = \mathbf{w}$.

Znaleźć takie rozwiązanie układu równań $\mathbf{x}'(t) = M \cdot \mathbf{x}(t)$, że $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

15. 36 Niech $M = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 6 \\ 1 & -4 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Znaleźć iloczyny $M \cdot \mathbf{v}$ i $M \cdot \mathbf{w}$.

Znaleźć rozwiązanie ogólne układu równań $\mathbf{x}'(t) = M \cdot \mathbf{x}(t)$.

Znaleźć takie rozwiązanie układu równań $\mathbf{x}'(t) = M \cdot \mathbf{x}(t)$, że $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Znaleźć takie rozwiązanie układu równań $\mathbf{x}'(t) = M \cdot \mathbf{x}(t)$, że $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.