# Równania różniczkowe liniowe drugiego rzędu

**Przykład 14.1** Omówimy jeszcze jeden przykład zagadnienia prowadzącego do równania pierwszego rzędu. Załóżmy, że spadochroniarz wyskoczył z samolotu na wysokości 1500 m i że spada swobodnie aż do wysokości 500 m. Zakładamy, że opór powietrza jest proporcjonalny do kwadratu prędkości (tak jest przy „dużych" prędkościach). Załóżmy dodatkowo, że graniczna prędkość spadania jest równa 50 m/s (chodzi o to, że przy tej prędkości siła oporu powietrza równoważy siłę ciężkości). Jak długo spadać będzie spadochroniarz do chwili otwarcia spadochronu na wysokości 500 m?

Oznaczmy wysokość nad powierzchnią Ziemi w chwili $t$ przez $h(t)$, współczynnik proporcjonalności, który występuje w treści zadania — przez $k$, masę spadochroniarza przez $m$. Z drugiej zasady dynamiki Newtona wnioskujemy, że

$$mh''(t) = -mg + k[h'(t)]^2$$

— $h'(t)$ to prędkość w chwili $t$, $h''(t)$ — to przyspieszenie w tym momencie. Z formalnego punktu widzenia napisane zostało równanie różniczkowe drugiego rzędu. Jeśli jednak potraktujemy prędkość $h'$ jako niewiadomą funkcję, to okaże się ono równaniem pierwszego rzędu. Niech $x(t) = h'(t)$. Równanie, po tej zmianie dekoracji, wygląda tak

$$x'(t) = -g + \frac{k}{m}[x(t)]^2 ,$$

albo też tak

$$1 = \frac{x'(t)}{-g + \frac{k}{m}[x(t)]^2} .$$

Mamy więc

$$t + C = \int dt = \int \frac{x'(t)\,dt}{-g+\frac{k}{m}[x(t)]^2} = \int \frac{dx}{-g+\frac{k}{m}x^2} = \frac{1}{2\sqrt{g}} \int \left[\frac{1}{x\sqrt{k/m}-\sqrt{g}} - \frac{1}{x\sqrt{k/m}+\sqrt{g}}\right] dt =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{m}{gk}} \ln\left|\frac{x\sqrt{k/m}-\sqrt{g}}{x\sqrt{k/m}+\sqrt{g}}\right| .$$

Mnożymy równość obustronnie przez $2t \cdot \sqrt{gk/m}$, a potem podnosimy liczbę $e$ do odpowiednich potęg i otrzymujemy dosyć długi wzór

$$e^{2t\cdot\sqrt{gk/m}} \cdot e^{2C\cdot\sqrt{gk/m}} = \pm\frac{x\sqrt{k/m}-\sqrt{g}}{x\sqrt{k/m}+\sqrt{g}} .$$

Oczywiście $x(0) = h'(0) = 0$ — to początkowa prędkość spadania. Wobec tego $1 \cdot e^{2C\cdot\sqrt{gk/m}} = \pm\frac{0-\sqrt{g}}{0+\sqrt{g}} = \pm 1$. Stąd wynika, że $e^{2C\cdot\sqrt{gk/m}} = 1$, więc

$$e^{2t\cdot\sqrt{gk/m}} = = -\frac{x\sqrt{k/m}-\sqrt{g}}{x\sqrt{k/m}+\sqrt{g}} = \frac{\sqrt{g}-x\sqrt{k/m}}{\sqrt{g}+x\sqrt{k/m}}\,.$$

Z tej równości wyznaczamy

$$x(t) = x = \sqrt{\frac{gm}{k}}\cdot\frac{1-e^{2t\cdot\sqrt{gk/m}}}{1+e^{2t\cdot\sqrt{gk/m}}}\,.$$

Wobec tego, że spełniona ma być równość $\lim\limits_{x\to\infty} x(t) = -50$ (spadamy, a nie wznosimy się), stwierdzamy, że $\sqrt{\frac{gm}{k}} = 50$. Dla prostoty przyjmujemy, że $g = 10\frac{m}{s^2}$. Otrzymujemy więc $\frac{m}{k} = 250$ i wobec tego

$$h'(t) = x(t) = 50\frac{1-e^{\frac{2}{5}t}}{1+e^{\frac{2}{5}t}}\,.$$

Teraz znajdziemy $h(t)$. Wystarczy scałkować. Mamy

$$h(t) = 50\int\frac{1-e^{\frac{2}{5}t}}{1+e^{\frac{2}{5}t}}\,dt = 50\int\left[1-\frac{2e^{\frac{2}{5}t}}{1+e^{\frac{2}{5}t}}\right]dt = 50t-250\int\left[\frac{d(1+e^{\frac{2}{5}t})}{1+e^{\frac{2}{5}t}}\right] =$$

$$= 50t - 250\ln(1+e^{\frac{2}{5}t}) + 250\ln 2 + 1500\,.$$

Stałą dobraliśmy tak, by $h(0) = 1500$. Szukamy takiego $t$, że

$$500 = h(t) = 50t - 250\ln(1+e^{\frac{2}{5}t}) + 250\ln 2 + 1500 = 250\ln\frac{e^{t/5}}{1+e^{\frac{2}{5}t}} + 1500\,,$$

co oznacza, że $\ln\frac{2e^{t/5}}{1+e^{\frac{2}{5}t}} = -4 = \ln e^{-4}$, czyli $e^{-4} = \frac{e^{t/5}}{1+e^{\frac{2}{5}t}}$, więc

$$0 = 1 + e^{\frac{2}{5}t} - 2e^4e^{\frac{t}{5}} = \left[e^{t/5}-e^4\right]^2 + 1 - e^8\,,$$

czyli $e^{t/5} = e^4 + \sqrt{e^8-1}$, zatem $t = 5\ln\left\{e^4+\sqrt{e^8-1}\right\} \approx 23{,}47\,\mathrm{s}$.

Tylko ostatni krok (przybliżenie) został wsparty komputerem, chociaż ja umiem te obliczenia przeprowadzić bez komputera i tablic. ■

Zajmiemy się równaniami różniczkowymi postaci $x''(t)+ax'(t)+bx(t) = 0$, gdzie $a, b$ oznaczają liczby (niekoniecznie rzeczywiste). Zaczniemy od prostego przykładu.

**Przykład 14.2** Rozwiążemy równanie

$$x''(t) - 5x'(t) + 6x(t) = 0\,.$$

Zauważmy, że $x''(t) - 5x'(t) + 6x(t) = \left[x'(t)-3x(t)\right]' - 2\left[x'(t)-3x(t)\right]$. Wprowadzimy pomocniczą niewiadomą. Niech $y(t) = x'(t) - 3x(t)$. Funkcja pomocnicza $y(t)$ musi spełniać równanie $y'(t) - 2y(t) = 0$. Wynika stąd, jak już wiemy, że istnieje stała $c$ taka, że $y(t) = ce^{2t}$. Problem został sprowadzony do rozwiązania równania różniczkowego pierwszego rzędu z niewiadomą funkcją $x$:

$$x'(t) - 3x(t) = ce^{2t}\,.$$

Rozwiązujemy pomocnicze równanie jednorodne $x'(t) - 3x(t) = 0$ . Rozwiązanie ogólne ma postać $x(t) = ke^{3t}$, gdzie $k$ oznacza pewną liczbę. Zamiast liczby $k$ rozważymy funkcję $k$ zmiennej $t$ i znajdziemy rozwiązanie w postaci $k(t)e^{3t}$. Podstawiając do równania otrzymujemy

$$ce^{2t} = \big[k(t)e^{3t}\big]' - 3k(t)e^{3t} = k'(t)e^{3t} + 3k(t)e^{3t} - 3k(t)e^{3t} = k'(t)e^{3t}.$$

Stąd wynika, że $k'(t) = ce^{-t}$ i w końcu $k(t) = -ce^{-t} + c_1$. Mamy więc

$$x(t) = [-ce^{-t} + c_1]e^{3t} = -ce^{2t} + c_1e^{3t}.$$

Wykazaliśmy, że każde rozwiązanie równania $x''(t) - 5x'(t) + 6x(t) = 0$ może być zapisane w postaci $c_1e^{3t}+c_2e^{2t}$ (podstawiliśmy $c_2 = -c$ ). W wykładnikach pojawiły się pierwiastki równania charakterystycznego $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$. To nie jest przypadek.

Jeśli $a, b \in \mathbb{C}$ i równanie $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ ma dwa różne pierwiastki $\lambda_1, \lambda_2$, to

$$0 = x''(t) + ax'(t) + bx(t) = \big[x'(t) - \lambda_1x(t)\big]' - \lambda_2\big[x'(t) - \lambda_1x(t)\big] = \\ = \big[x'(t) - \lambda_2x(t)\big]' - \lambda_1\big[x'(t) - \lambda_2x(t)\big].$$

Oznaczając $y(t) = x'(t) - \lambda_1x(t)$ otrzymujemy równanie $y'(t) - \lambda_2y(t) = 0$. Stosując procedurę zastosowaną przed chwilą w konkretnej sytuacji stwierdzamy, że istnieją takie liczby $c_1, c_2$, że dla każdej liczby $r \in \mathbb{R}$ zachodzi $x(t) = c_1e^{\lambda_1t}+c_2e^{\lambda_2t}$ równość. To, że funkcja tak określona jest rozwiązaniem interesującego nas równania, mogliśmy sprawdzić bezpośrednio, ale nie wiedzielibyśmy wtedy, że innych rozwiązań nie ma. Nasza metoda zawiera dowód tego, że wskazane funkcje są **jedynymi** rozwiązaniami tego równania.

**Twierdzenie 14.1 (o rozwiązaniach jednorodnego równania różniczkowego liniowego drugiego rzędu o stałych współczynnikach)**

(a) Jeśli równanie charakterystyczne $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ równania $x'' + ax' + bx = 0$ ma dwa różne pierwiastki $\lambda_1, \lambda_2$, to każde rozwiązanie równania $x'' + ax' + bx = 0$ może być zapisane w postaci $c_1e^{\lambda_1t} + c_2e^{\lambda_2t}$, gdzie $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.

(b) Jeśli równanie charakterystyczne $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ równania $x'' + ax' + bx = 0$ ma jeden pierwiastek podwójny $\lambda_1$, to każde rozwiązanie równania $x''+ax'+bx = 0$ może być zapisane w postaci $(c_1 + c_2t)e^{\lambda_1t}$, gdzie $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.

**Dowód.** Część (a) została wykazana przed sformułowaniem. Zajmiemy się częścią (b). Z wzorów Viète'a wynika, że $2\lambda_1 = -a$ oraz $\lambda_1^2 = b$, a stąd bez trudu wnioskujemy, że $x'' + ax' + bx = (x' - \lambda_1x)' - \lambda_1(x' - \lambda_1x)$. Przyjmijmy, że $y = x' - \lambda_1x$. Mamy więc $y' - \lambda_1y = 0$, zatem $y = c_2e^{\lambda_1t}$. Dla znalezienia funkcji $x$ wystarczy rozwiązać równanie $x' - \lambda_1x = c_2e^{\lambda_1t}$. Z twierdzenia o rozwiązaniach równań liniowych pierwszego rzędu wynika, że pewien quasiwielomian pierwszego stopnia z wykładnikiem $\lambda_1$ jest rozwiązaniem (szczególnym) tego równania. Przyjmijmy, że $x(t) = (d_2 t + d_1)e^{\lambda_1 t}$. Mamy wtedy

$$c_2 e^{\lambda_1 t} = \big((d_2 t + d_1)e^{\lambda_1 t}\big)' - \lambda_1 (d_2 t + d_1)e^{\lambda_1 t} = d_2 e^{\lambda_1 t}.$$

Wystarczy więc przyjąć $d_2 = c_2$. Liczba $d_1$ może być dowolną stałą, co zresztą jest jasne od początku, bo do dowolnego rozwiązania równania niejednorodnego można dodać dowolne rozwiązanie równania jednorodnego. Oznaczając $c_1 = d_1$ otrzymujemy rozwiązanie ogólne równania $x'' + ax' + bx = 0$ w postaci $(c_1 + c_2 t)e^{\lambda_1 t}$. ■

Będziemy się teraz zajmować równaniem postaci

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = g(t)\,, \qquad (nj2)$$

gdzie $a, b \in \mathbb{C}$ zaś $g$ jest funkcją ciągłą o wartościach zespolonych określoną na pewnym przedziale, być może na całej prostej. Najważniejsze dla nas są te równania, w których funkcja $g$ jest quasiwielomianem.

Z równaniem $(nj2)$ wiązać będziemy równanie linowe jednorodne

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0 \qquad (j2)$$

oraz równanie charakterystyczne

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0\,. \qquad (ch2)$$

Równanie charakterystyczne $(ch2)$ ma dwa pierwiastki $\lambda_1, \lambda_2$ (niekoniecznie rzeczywiste i niekoniecznie różne). Dla każdej liczby $\lambda$ mamy więc

$$\lambda^2 + a\lambda + b = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\,,$$

spełnione są też znane (kiedyś) wszystkim maturzystom wzory Viète'a:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -a\,,\ \lambda_1\lambda_2 = b\,.$$

Z nich wynika, że

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = \big(x'(t) - \lambda_2 x(t)\big)' - \lambda_1\big(x'(t) - \lambda_2 x(t)\big)\,.$$

Można sobie ułatwić manipulacje wprowadziwszy symbol $D$, oznaczający różniczkowanie, umawiając się, że symbol $Df$ oznacza pochodną funkcji $f$, tzn.

$$Df(t) = f'(t)\,.$$

Wtedy spełnione są następujące równości:

$$D(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 Df_1 + c_2 Df_2 \qquad \text{(liniowość różniczkowania)},$$

$$D(f_1 \cdot f_2) = Df_1 \cdot f_2 + f_1 \cdot Df_2 \qquad \text{(pochodna iloczynu)}.$$

Będziemy też pisać $D^2 f$ zamiast $D(Df)$. Przy takich umowach równanie $(nj2)$ można zapisać tak $D^2 x + aDx + bx = g$, opuściliśmy argument, co wielokrotnie będziemy robić, bo to upraszcza zapis, choć zmusza do pamiętania, które symbole oznaczają liczby, a które — funkcje. Jeśli jeszcze umówimy się, że $(D+\lambda)x = Dx+\lambda x$ dla każdej liczby $\lambda$ i każdej funkcji różniczkowalnej $x$, to możemy napisać

$$x'' + ax' + bx = D^2x + aDx + bx = (D-\lambda_1)\big(Dx - \lambda_2 x\big) = (D-\lambda_1)\big((D-\lambda_2)x\big)\,.$$

Naturalnym pomysłem jest więc pisanie $x''+ax'+bx = (D-\lambda_1)(D-\lambda_2)x$, co zwykle się czyni. Nasze równanie ma więc postać

$$(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)x = g\,.$$

Niech $z = (D-\lambda_2)x$. Rozwiązanie równania drugiego rzędu $(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)x = g$ można więc sprowadzić do rozwiązania dwóch równań pierwszego rzędu: najpierw szukamy funkcji $z$ takiej, że $(D-\lambda_1)z = g$ a po znalezieniu $z$ szukamy funkcji $x$ takiej, że $(D-\lambda_2)x = z$. Zauważmy, że jeśli $(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)x_1 = g$ i $(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)x_2 = g$, to $(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)(x_1-x_2) = (D-\lambda_1)(D-\lambda_2)x_1 - (D-\lambda_1)(D-\lambda_2)x_2 =$

$$= g - g = 0\,,$$

czyli różnica rozwiązań równania niejednorodnego, spełnia równanie jednorodne.

Jasne jest, że jeśli $(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)x = g$ i $(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)y = 0$, to

$$(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)(x+y) = (D-\lambda_1)(D-\lambda_2)x + (D-\lambda_1)(D-\lambda_2)y = g+0 = g\,.$$

Oznacza to, że jeśli znajdziemy w jakiś sposób **jedno** rozwiązanie równania niejednorodnego* i wszystkie rozwiązania równania jednorodnego, to tym samym znajdziemy wszystkie rozwiązania równania niejednorodnego.

**Ostrzeżenie**:

$$(D+1)(D-t)x = (D+1)(x'-tx) = x'' - (tx)' + x' - tx = x'' + (1-t)x' - (1+t)x\,,$$

ale

$$(D-t)(D+1)x = (D-t)(x'+x) = x'' + x' - tx' - tx = x'' + (1-t)x' - tx\,,$$ zatem

$$(D+1)(D-t)x \neq (D-t)(D+1)x\,.$$

Widzimy więc, że kolejność wykonywania operacji ma wpływ na wynik. W tym konkretnym przypadku można się tego spodziewać przed przeprowadzaniem obliczeń, bo pochodną funkcji stałej jest $0$, a $(t)' = 1 \neq 0$.

Jednak jeśli $\lambda_1, \lambda_2$ są **liczbami** (innych z braku czasu nie rozważamy), to

$$(D-\lambda_1)(D-\lambda_2) = (D-\lambda_2)(D-\lambda_1)\,. \quad \blacksquare$$

**Przykład 14.3** Zajmiemy się równaniem oscylatora harmonicznego, na razie bez tłumienia i wymuszenia, czyli równaniem $x'' + \omega^2 x = 0$. Można je zapisać w postaci $0 = (D^2+\omega^2)x = (D+\omega i)(D-\omega i)x$. Z tego, co już wiemy o równaniach jednorodnych drugiego rzędu wynika, że rozwiązanie ogólne równania $x'' + \omega^2 x = 0$ wygląda tak:

* np. zgadniemy!

$x(t) = c_1 e^{-\omega i t} + c_2 e^{\omega i t}$, gdzie $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.

Otrzymaliśmy rozwiązanie w postaci zespolonej. Można je zapisać w postaci rzeczywistej. Niech $c_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$, $c_2 = \alpha_2 + \beta_2 i$, gdzie $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{R}$. Wtedy
$x(t) = c_1 e^{-\omega i t} + c_2 e^{\omega i t} =$
$= \big[\alpha_1 + \beta_1 i\big]\big[\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)\big] + \big[\alpha_2 + \beta_2 i\big]\big[\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)\big] =$
$= \big[(\alpha_1 + \alpha_2)\cos(\omega t) + (\beta_1 - \beta_2)\sin(\omega t)\big] + i\big[(\beta_1 + \beta_2)\sin(\omega t) - (\alpha_1 - \alpha_2)\cos(\omega t)\big]$.
Jeśli $\omega \in \mathbb{R}$, to z tego, że funkcja $x$ jest rozwiązaniem równania $x'' + \omega^2 x = 0$ wynika, że
$0 = \overline{0} = \overline{x'' + \omega^2 x} = \overline{x''} + \overline{\omega^2 x} = \bar{x}'' + \bar{\omega}^2 \bar{x}$, więc również funkcja $\bar{x}$ jest rozwiązaniem. Wobec tego, że suma rozwiązań też jest rozwiązaniem, stwierdzamy, że funkcje $x + \bar{x}$ i $\frac{1}{2}(x + \bar{x}) = \mathrm{Re}\, x$ są rozwiązaniami równania. Również funkcja $\mathrm{Im}\, x = \frac{1}{2i}(x - \bar{x})$ jest rozwiązaniem. Ponieważ

$\mathrm{Re}\, x(t) = (\alpha_1 + \alpha_2)\cos(\omega t) + (\beta_1 - \beta_2)\sin(\omega t)$ oraz

$\mathrm{Im}\, x(t) = (\beta_1 + \beta_2)\sin(\omega t) - (\alpha_1 - \alpha_2)\cos(\omega t)$,

więc rozwiązania rzeczywiste wyglądają tak:

$$d_1 \cos(\omega t) + d_2 \sin(\omega t),$$

gdzie $d_1, d_2$ oznaczają dowolne liczby rzeczywiste.

Mamy $x(0) = d_1$ i $x'(0) = \omega d_2$. Wobec tego $d_1$ to położenie w chwili $t = 0$, a w $d_2$ zakodowana jest prędkość początkowa. Fizycy na ogół wolą inne parametry: amplitudę i fazę. Niech $A = \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$ i niech $\theta$ będzie takim kątem, że $\cos\theta = \frac{d_1}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2}}$ oraz $\sin\theta = -\frac{d_2}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2}}$. Wtedy zachodzi równość

$$x(t) = d_1\cos(\omega t) + d_2\sin(\omega t) = A\big[\cos\theta\cos(\omega t) - \sin\theta\sin(\omega t)\big] = A\cos(\theta + \omega t).^*$$

Jest jasne jak przechodzić od zestawu parametrów $d_1, d_2$ do zestawu $A, \theta$ i odwrotnie. Można więc od razu szukać rozwiązania w postaci $A\cos(\theta + \omega t)$ jednak opis ogólnej teorii w tych terminach jest bardziej skomplikowany i do tego mniej ogólny, więc używamy funkcji wykładniczych i liczb zespolonych. ■

Okazuje się, że w elementarnych zastosowaniach najczęściej funkcja $g$ ma dosyć szczególną postać, bywa często quasiwielomianem ewentualnie częścią rzeczywistą lub urojoną quasiwielomianu.

Wiemy, jak rozwiązywać bardzo szczególne równania pierwszego rzędu. Możemy zająć się równaniami drugiego rzędu. Jest jasne, że w przypadku równania drugiego rzędu prawdziwe jest

* $A$ jest największą wartością funkcji $x$, $-A$ — najmniejszą i dlatego liczbę $A$ nazywamy amplitudą; liczbę $\theta$ nazywamy fazą, $\omega$ to częstotliwość.

**Twierdzenie 14.2 (o rozwiązaniach równania liniowego drugiego rzędu)**
Niech $a, b \in \mathbb{C}$ i niech $w$ oznacza dowolny wielomian o być może nierzeczywistych współczynnikach. Równanie $x'' + ax' + bx = w(t)e^{\lambda t}$ ma rozwiązanie, które jest quasiwielomianem o wykładniku $\lambda$.

Jeśli $\lambda$ nie jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego, to stopień rozwiązania równy jest stopniowi $w(t)$, jeśli $\lambda$ jest pierwiastkiem jednokrotnym, to stopień rozwiązania jest o 1 większy od stopnia $w(t)$, jeśli $\lambda$ jest pierwiastkiem dwukrotnym, to stopień rozwiązania jest o 2 większy od stopnia $w(t)$. ■

Studenci bez trudu uogólnią to twierdzenie na przypadek równań wyższego rzędu o stałych współczynnikach, których prawa strona jest quasiwielomianem $w(t)e^{\lambda t}$. Stopień rozwiązania szczególnego jest większy od stopnia $w(t)$ o krotność $\lambda$ jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego lewej strony.

**Przykład 14.4** Znajdziemy rozwiązania równania $x'' + x = 2\cos t + 12t\sin t$.
Tym razem prawa strona nie jest quasiwielomianem. Zachodzą jednak równości
$$2\cos t = \mathrm{Re}\big(2e^{it}\big) \text{ i } 12t\sin t = \mathrm{Im}\,12\big(e^{it}\big).$$
Zajmiemy się równaniami pomocniczymi $x'' + x = 2e^{it}$ oraz $x'' + x = 12te^{it}$.

W obu przypadkach równanie charakterystyczne równania to $\lambda^2+1=0$. Ma ono dwa pierwiastki $i$ oraz $-i$. Wobec tego jednym z rozwiązań równania różniczkowego $x'' + x = 2e^{it}$ jest quasiwielomian stopnia pierwszego, a równania $x'' + x = 12te^{it}$ — quasiwielomian stopnia drugiego .

W pierwszym przypadku powinien więc być spełniony wzór
$$2e^{it} = \big((At+B)e^{it}\big)'' + (At+B)e^{it} = 2Aie^{it} + i^2(At+B)e^{it} + (At+B)e^{it} = 2Aie^{it}.$$
Stąd wynika, że $A = -i$. $B$ może być dowolne. Znaleźliśmy rozwiązanie ogólne równania $x'' + x = 2e^{it}$:
$$x(t) = -ite^{it} + c_1e^{it} + c_2e^{-it}.$$
W drugim przypadku musi zachodzić równość
$$\begin{aligned}12te^{it} &= \big((At^2+Bt+C)e^{it}\big)'' + (At^2+Bt+C)e^{it} = \\ &= 2Ae^{it} + 2i(2At+B)e^{it} + i^2(At^2+Bt+C)e^{it} + (At^2+Bt+C)e^{it} = \\ &= 4Aite^{it} + (2A+2Bi)e^{it}.\end{aligned}$$
Wynika stąd, że $A = -3i$ oraz $2A + 2Bi = 0$, czyli $B = 3$. $C$ może być dowolne. Rozwiązaniem ogólnym drugiego równania jest
$$-3it^2e^{it} + 3te^{it} + c_1e^{it} + c_2e^{-it}.$$
Rozwiązaniem szczególnym równania $x'' + x = 2\cos t$ jest funkcja $\mathrm{Re}\big(-ite^{it}\big) = t\sin t$. Rozwiązaniem ogólnym — funkcja $t\sin t + c_1\cos t + c_2\sin t$. Ma to być

rozwiązanie rzeczywiste, zatem tym razem stałe $c_1, c_2$ muszą być rzeczywiste. Rzeczywistym rozwiązaniem ogólnym równania $x'' + x = 12t\sin t$ jest funkcja

$$\mathrm{Im}\big(-3it^2e^{it} + 3te^{it}\big) + c_1\cos t + c_2\sin t = -3t^2\cos t + 3t\sin t + c_1\cos t + c_2\sin t\,.$$

Znów zainteresowani jesteśmy rozwiązaniem rzeczywistym, zatem i w tym przypadku $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ■

Pokażemy teraz jak można uzmienniać stałe (obie na raz!) w równaniach drugiego rzędu. Rozwiążemy równanie, które właśnie rozwiązaliśmy, ale podkreślić należy, że tę metodę można stosować również wtedy, gdy funkcja $g$ (prawa strona równania) nie jest quasiwielomianem.

**Przykład 14.5** Znajdziemy rozwiązania równania $x'' + x = 2\cos t + 12t\sin t$. Pomocnicze równanie jednorodne wygląda tak $y'' + y = 0$. Jego rozwiązaniem ogólnym jest funkcja $c_1\cos t + c_2\sin t$ — stosujemy tym razem rzeczywistą postać, by dać odetchnąć osobom, które jeszcze nie zdążyły polubić liczb zespolonych. Będziemy szukać rozwiązania równania niejednorodnego w postaci $c_1(t)\cos t + c_2(t)\sin t$, gdzie $c_1, c_2$ oznaczają teraz niewiadome funkcje. Mamy

$$\big[c_1(t)\cos t + c_2(t)\sin t\big]' = c_1'(t)\cos t + c_2'(t)\sin t - c_1(t)\sin t + c_2(t)\cos t\,.$$

Jeśli obliczymy drugą pochodną, to pojawią się $c_1''(t)$ i $c_2''(t)$, co może spowodować jakieś kłopoty. Przyjmiemy więc, że $c_1'(t)\cos t + c_2'(t)\sin t = 0$ dla każdego $t$ — dodajemy tę równość sztucznie, ale mamy dwie niewiadome funkcje $c_1, c_2$, więc dwa równania nas przerazić nie powinny. Mamy więc:

$$\big[c_1(t)\cos t + c_2(t)\sin t\big]'' = \big[-c_1(t)\sin t + c_2(t)\cos t\big]' =$$
$$= -c_1'(t)\sin t + c_2'(t)\sin t - c_1(t)\cos t - c_2(t)\cos t\,.$$

W równaniu $x'' + x = 2\cos t + 12t\sin t$ zastąpimy $x(t)$ przez $c_1(t)\cos t + c_2(t)\sin t$ uwzględniając najświeższe równości:

$$2\cos t + 12t\sin t = \big(c_1(t)\cos t + c_2(t)\sin t\big)'' + c_1(t)\cos t + c_2(t)\sin t =$$
$$= -c_1'(t)\sin t + c_2'(t)\cos t - c_1(t)\cos t - c_2(t)\sin t + c_1(t)\cos t + c_2(t)\sin t =$$
$$= -c_1'(t)\sin t + c_2'(t)\cos t\,.$$

Otrzymaliśmy więc układ równań (z niewiadomymi $c_1'(t), c_2'(t)$)

$$\begin{cases} c_1'(t)\cos t + c_2'(t)\sin t = 0, \\ -c_1'(t)\sin t + c_2'(t)\cos t = 2\cos t + 12t\sin t. \end{cases}$$

Niech $W(t) = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = \cos^2 t - (-\sin^2 t) = 1 \neq 0$, zatem otrzymany układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie:

$$c_1'(t)=\frac{\begin{vmatrix}0 & \sin t\\ 2\cos t+12t\sin t & \cos t\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{vmatrix}}==-2\sin t\cos t-12t\sin^2 t,$$

oraz

$$c_2'(t)=\frac{\begin{vmatrix}\cos t & 0\\ -\sin t & 2\cos t+12t\sin t\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{vmatrix}}=2\cos^2 t+12t\sin t\cos t.$$

Całkując i upraszczając nieco otrzymujemy $c_1(t)=4\cos^2 t+6t\sin t\cos t-3t^2+d_1$ i $c_2(t)=4t+4\sin t\cos t-6t\cos^2 t+d_2$, co pozwala napisać wynik

$$x(t)=-3t^2\cos t+4t\sin t+(d_1+4)\cos t+d_2\sin t\,.$$

Widać więc, że wynik na pierwszy rzut oka jest nieco inny niż poprzednio otrzymany, ale ta różnica jest kosmetyczna: zamiast $d_1+4$ w poprzednim wyniku jest $c_1$, co oczywiście nie ma na nic wpływu, bo obie stałe są dowolnymi liczbami zespolonymi. ■

Jeśli $f,g$ są funkcjami różniczkowalnymi, to wyznacznik $\begin{vmatrix}f(t) & g(t)\\ f'(t) & g'(t)\end{vmatrix}$ nazywany jest ich wyznacznikiem Wrońskiego.*. Dla trzech funkcji $f,g,h$ wyznacznik definiowany jest tak $\begin{vmatrix}f & g & h\\ f' & g' & h'\\ f'' & g'' & h''\end{vmatrix}$ itd. Z naszego punktu widzenia jest on o tyle istotny, że jeśli wybieramy dwa rozwiązania $x_1,x_2$ jednorodnego liniowego różniczkowego równania drugiego rzędu, niekoniecznie o stałych współczynnikach i ich wyznacznik Wrońskiego (ang: wronskian) jest różny od $0$, to dla każdego rozwiązania $x$ tego równania jednorodnego istnieją **stałe** $c_1,c_2$ takie, że $x(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)$, zaś każde rozwiązanie równania niejednorodnego z tą samą prawą stroną może być znalezione w postaci $c_1(t)x_1(t)+c_2(t)x_2(t)$, gdzie $c_1,c_2$ są odpowiednio dobranymi funkcjami (jak w przykładzie 14.5 powyżej).

**Twierdzenie 14.3 (o istnieniu i jednoznaczności dla równania drugiego rzędu)**

Jeśli

(i) funkcja $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ jest ciągła,

(ii) dla dowolnych $x,y\in\mathbb{R}$ funkcja $f(x,y,\ )$, czyli funkcja przypisująca liczbie $z$ liczbę $f(x,y,z)$ jest różniczkowalna, jej pochodna $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)$ jest ciągła,

*jedna z ulic w Warszawie nosi imię hr. Józefa Marii Hoëhnè-Wrońskiego

(iiii) dla dowolnych $x, z \in \mathbb{R}$ funkcja $f(x, \ \ , z)$, czyli funkcja przypisująca liczbie $y$ liczbę $f(x, y, z)$ jest różniczkowalna, jej pochodna $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)$ jest ciągła,

to istnieje liczba $\delta_0 > 0$ taka, że dla każdej liczby $\delta \in (0, \delta_0)$ istnieje dokładnie jedna funkcja $\gamma : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}^2$ taka, że

$$\gamma''(x) = f\big(x, \gamma(x), \gamma'(x)\big) \text{ dla } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \text{ oraz}$$

$$\gamma(x_0) = y_0 \qquad \text{i} \qquad \gamma'(x_0) = z_0 \,. \qquad \boxtimes$$

O tym twierdzeniu należy myśleć tak: jeśli w równaniu $x'' = f(t, x, x')$ funkcja $f$ jest porządna i znane jest położenie początkowe i prędkość początkowa, to znana jest zarówno przeszłość jak i przyszłość poruszającego się obiektu (mówimy tu mając na myśli ruch, ale można użyć innej terminologii związanej z procesem innego rodzaju). Tego rodzaju twierdzenia wbrew pozorom mają ogromne znaczenie praktyczne choć nie podają żadnej metody znajdowania rozwiązania. Pozwalają jednak stosować nie do końca formalne rozumowania i jeśli uda się znaleźć jakieś rozwiązanie, to możemy stwierdzić, że innych rozwiązań już nie ma. Przykładowa sytuacja (modelowa): szukamy rozwiązania w jakiejś postaci, np. quasiwielomianu, znajdujemy. Skąd wiadomo, że innych rozwiązań nie ma? Z twierdzenia o istnieniu i **jednoznaczności** to właśnie wynika.

W przypadku równań wyższych rzędów analogiczne twierdzenie też jest prawdziwe. Różni się tym tylko, że warunek początkowy obejmuje więcej pochodnych (wszystkie aż do przedostatniej).

W przypadku liniowych jednorodnych równań wyższego rzędu o stałych współczynnikach działa ta sama zasada, którą opisaliśmy dla równań drugiego rzędu. Stanie się to wszystko jasne po rozwiązaniu pewnej liczby zadań.

**Zadanka**

**14.01** Rozwiązać równanie $x'' - 2x' - 3x = e^{4t}$.

**14.02** Rozwiązać równanie $x'' - 2x = 2e^t - t^2$.

**14.03** Rozwiązać równanie $x'' - 5x' + 4x = 4t^2 e^{2t}$.

**14.04** Rozwiązać równanie $x'' - 5x' + 4x = 4t^2 e^t$

**14.05** Rozwiązać równanie $x'' - 6x' + 9x = t^2 e^{3t}$.

**14.06** Rozwiązać równanie $x'' + 2x' - 3x = t^2 e^t$.

**14.07** Rozwiązać równanie $x'' + x = 4t \sin t$.

**14.08** Rozwiązać równanie $x'' + x = 4te^t$, $x(0) = 4$, $x'(0) = -3$.

**14.09** Rozwiązać równanie $x'' - 2x' + x = 0$, $x(2) = 1$, $x'(2) = -2$.

**14.10** Rozwiązać równanie $x'' + 2x' + 2x = te^{-t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

**14.11** Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $x'' - 6x' + 4x = 0$.

**14. 12** Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $x'' - 6x' + 4 = 0$.

**14. 13** Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $x'' - 8x' + 16x = 0$.

**14. 14** Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $x'' - 6x' + 13x = 0$.

**14. 15** Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $x^{(3)} - 6x'' + 11x' - 6x = 0$.

**14. 16** Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $x^{(3)} - x = 0$.

**14. 17** Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $x^{(4)} - 6x'' + 4x = 0$

**14. 18** Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $x^{(4)} - 2x'' + x = 0$.

**14. 19** Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $x^{(4)} - 4x^{(3)} + 6x'' - 4x' + x = 0$.

**14. 20** Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $x^{(4)} - 2x^{(3)} + 2x'' - 2x' + x = 0$.

**14. 21** Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $x^{(4)} - 6x'' + 4x = 0$.

**14. 22** Rozwiązać równanie $x'' - 2x' + x = \frac{e^t}{t}$.

**14. 23** Rozwiązać równanie $x'' + 3x' + 2x = \frac{1}{e^t+1}$.

**14. 24** Rozwiązać równanie $x'' + x = \frac{1}{\sin t}$.

**14. 25** Rozwiązać równanie $x'' + 4x = 2\,\mathrm{tg}\, t$.

**14. 26** Rozwiązać równanie $x'' + 2x' + x = 3e^{-t}\sqrt{1+t}$.

**14. 27** Rozwiązać równanie $x'' + x = \frac{1}{\cos^3 t}$.

**14. 28** Rozwiązać równanie $x'' - 2x' + x = e^t$.

**14. 29** Rozwiązać równanie $x'' + 3x' + 2x = te^t + t^2e^{-t} + e^{3t}$.

**14. 30** Rozwiązać równanie $x'' + x = \sin t + t\cos 2t$.

**14. 31** Rozwiązać równanie $x'' + 4x = \cos 2t + e^{-4t}$.

**14. 32** Rozwiązać równanie $x'' + 2x' + x = 3t^2e^{-t}$.

**14. 33** Rozwiązać równanie $x'' + x = \sin t + t\sin 2t + t^2\cos t$.

**14. 34** Rozwiązać równanie $x^{(4)} - 4x^{(3)} + 16x' - 16x = te^{-2t}$.

**14. 35** Rozwiązać równanie $x^{(4)} + 4x^{(3)} + 8x'' + 8x' + 4x = e^{-t}\cos t$.

**14. 36** Rozwiązać równanie $x^{(6)} + 12x^{(4)} + 48x'' + 64x = 2\cos^2 t$.

**14. 37** Rozwiązać równanie $x^{(6)} - 12x^{(4)} + 48x'' - 64x = 2\sin^2 t$.

**14. 38** Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x''(t) - 6x'(t) + 25x(t) = 676te^{-3t} + 16te^{3t} + 8e^{3t}(\cos 4t + \sin 4t) + 219\sin 4t.$$

**14. 39** Znaleźć rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$\begin{cases} x''(t) - 6x'(t) + 25x(t) = 676te^{-3t} + 16te^{3t} + 8e^{3t}(\cos 4t + \sin 4t) + 219\sin 4t, \\ x(0) = 11, \\ x'(0) = 12. \end{cases}$$

**14. 40** Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $x''(t) - 6x'(t) + 25x(t) = e^{3t}(\cos(4t))^{-3}$.

**14. 41** Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $x''(t) + 6x'(t) + 10x(t) =$
$= 1369t\left(e^{3t} + e^{-3t}\right) + 78\cos t + 78e^{-3t}\cos t - 325\big(\cos(3t) + \sin(3t)\big)$.

**14. 42** Znaleźć rozwiązanie zagadnienia początkowego $x''(t)+6x'(t)+10x(t)=$
$=1369t\left(e^{3t}+e^{-3t}\right)+78\big(1+e^{-3t}\big)\cos t-325\big(\cos(3t)+\sin(3t)\big)$,
$x(0)=11,\quad x'(0)=1317.$

**14. 43** Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $x''(t)+6x'(t)+10x(t)=e^{-3t}\ln(\sin t)\,.$

**14. 44** Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $x''(t)+6x'(t)+9x(t)=\frac{1}{t+1}\,e^{-3t}\,.$

**14. 45** Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $x''(t)+6x'(t)+25x(t)=$
$=600e^{-3t}\cos(4t)+600e^{3t}\cos(4t)+600e^{-3t}+600\,.$

**14. 46** Znaleźć rozwiązanie zagadnienia początkowego $x''(t)+6x'(t)+25x(t)=$
$=600e^{-3t}\cos(4t)+600e^{3t}\cos(4t)+600e^{-3t}+600,\quad x(0)=60,\quad x'(0)=0.$

**14. 47** Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x''(t)+2x'(t)-15x(t)=-216t^2e^{-3t}+768t^2e^{3t}+20e^{5t}-102\cos 3t-15t+17\,.$$

**14. 48** Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x''(t)-2x'(t)+10x(t)=6e^{t}\cos(3t)-6e^{t}\sin(3t)+40e^{-t}\sin(3t)+40\,.$$

**14. 49** Znaleźć rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$\begin{cases} x''(t)-2x'(t)+10x(t)=6e^{t}\cos(3t)-6e^{t}\sin(3t)+40e^{-t}\sin(3t)+40,\\ x(0)=5,\\ x'(0)=5. \end{cases}$$

**14. 50** Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x''(t)-x'(t)-12x(t)=-42e^{-3t}-42e^{3t}+432t^2-75\cos(3t)-75\sin(3t)\,.$$

**14. 51** Definiujemy funkcję $g$ wzorem:

$$g(t)=-4+14e^{-t}\sin(7t)-197\sin(7t)+14e^{-t}\cos(7t)-197\cos(7t)+1250t^2\,.$$

Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $x''(t)+2x'(t)+50x(t)=g(t)\,.$

Rozwiązanie zagadnienie początkowe $\begin{cases} x''(t)+2x'(t)+50x(t)=g(t),\\ x(0)=12. \end{cases}$