Równania różniczkowe liniowe pierwszego rzędu

Zaczniemy od przypomnienia niektórych własności układów równań liniowych. Omówimy to tym razem na przykładzie. Rozważymy układ

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1\,, \\ 2x + y + z = 2\,, \\ 8x + y + 7z = 8\,. \end{cases} \tag{12.1}$$

Chcemy znaleźć wszystkie rozwiązania tego układu równań, który nazywany jest niejednorodnym. Wielu studentów w takiej sytuacji ma ochotę na zastosowanie uniwersalnej metody, która „załatwia” problem. Jednak w tym przypadku wzory znalezione w różnych miejscach nie działają, bo pojawia się w mianowniku liczba 0.*

Załóżmy teraz, że dwie trójki (x_1, y_1, z_1) i (x_2, y_2, z_2) są rozwiązaniami układu (12.1), tzn.

$$\begin{cases} x_1 - y_1 + 2z_1 = 1\,, \\ 2x_1 + y_1 + z_1 = 2\,, \\ 8x_1 + y_1 + 7z_1 = 8\,, \end{cases} \qquad \text{i} \qquad \begin{cases} x_2 - y_2 + 2z_2 = 1\,, \\ 2x_2 + y_2 + z_2 = 2\,, \\ 8x_2 + y_2 + 7z_2 = 8\,. \end{cases}$$

Odejmując stronami pierwsze, drugie i trzecie równania otrzymujemy wzory:

$$\begin{cases} (x_1 - x_2) - (y_1 - y_2) + 2(z_1 - z_2) = 0\,, \\ 2(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) + (z_1 - z_2) = 0\,, \\ 8(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) + 7(z_1 - z_2) = 0\,. \end{cases} \tag{12.2}$$

Wykazaliśmy więc, że w tej sytuacji trójka $(x_1 - x_2,\ y_1 - y_2,\ z_1 - z_2)$ jest rozwiązaniem układu (12.2), zwanego jednorodnym. Zauważmy, że jeśli dwie trójki liczb (u_1, v_1, w_1) i (u_2, v_2, w_2), czyli dwa wektory, są rozwiązaniami układu jednorodnego, a α, β dwiema liczbami, to również trójka (wektor) $\overrightarrow{(\alpha u_1 + \beta u_2, \alpha v_1 + \beta v_2, \alpha w_1 + \beta w_2)}$, zwany kombinacją liniową wektorów $\overrightarrow{(u_1, v_1, w_1)}$, $\overrightarrow{(u_2, v_2, w_2)}$ o współczynnikach α, β jest rozwiązaniem układu jednorodnego. Mówimy, że zbiór rozwiązań układu jednorodnego jest przestrzenią liniową.

W rozpatrywanym przypadku są to wektory prostopadłe do wektorów $\overrightarrow{(1, -1, 2)}$, $\overrightarrow{(2, 1, 1)}$ i $\overrightarrow{(8, 1, 7)}$. Ponieważ $\overrightarrow{(8, 1, 7)} = 3\overrightarrow{(2, 1, 1)} + 2\overrightarrow{(1, -1, 2)}$, więc z prostopadłości wektora $\overrightarrow{(u, v, w)}$ do wektorów $\overrightarrow{(1, -1, 2)}$ i $\overrightarrow{(2, 1, 1)}$ wynika jego prostopadłość do wektora $\overrightarrow{(8, 1, 7)} = 3\overrightarrow{(2, 1, 1)} + 2\overrightarrow{(1, -1, 2)}$, by przekonać się o tym mnożymy skalarnie ostatnią równość przez wektor $\overrightarrow{(u, v, w)}$. Wektory $\overrightarrow{(1, -1, 2)}$ i $\overrightarrow{(2, 1, 1)}$ nie są

* Dlatego nawet ich nie wypisujemy

równoległe, co wynika np. z tego, że ich iloczyn wektorowy $\overrightarrow{(-3,3,3)}$ nie jest wektorem zerowym (zresztą równoległość wektorów oznacza ich proporcjonalność ...).

Z tego, co napisaliśmy wynika od razu, że zbiór rozwiązań układu jednorodnego jest prostą przechodzącą przez $(0,0,0)$, prostopadłą do wektorów $\overrightarrow{(1,-1,2)}$ i $\overrightarrow{(2,1,1)}$. To nie jedyny wniosek. Widzimy też, że dla znalezienia wszystkich rozwiązań układu niejednorodnego wystarczy znaleźć jedno jego rozwiązanie i wszystkie rozwiązania układu jednorodnego. Widać od razu, że rozwiązaniem układu (12.1) jest np. wektor $\overrightarrow{(1,0,0)}$. Rozwiązaniami układu jednorodnego są wektory $t\overrightarrow{(-1,1,1)}$, $t \in \mathbb{R}$, bo są one równoległe do wektora $\overrightarrow{(-3,3,3)}$. Są to **wszystkie** rozwiązania tego układu, bo jedynie wektory równoległe do $\overrightarrow{(-3,3,3)}$ są jednocześnie prostopadłe do obu wektorów $\overrightarrow{(1,-1,2)}$ i $\overrightarrow{(2,1,1)}$. Wobec tego rozwiązania układu niejednorodnego są postaci $\overrightarrow{(1,0,0)} + t\overrightarrow{(-1,1,1)}$ (innych rozwiązań układ (12.1) nie ma). Oczywiście do tego samego rezultatu można dojść na drodze czysto algebraicznej. Można np. potraktować niewiadomą z jako parametr i znaleźć wzory na x oraz y (tak zostało to zrobione w czasie wykładu). Przekonamy się niebawem, że opisane zjawisko występuje również w innych sytuacjach, w których znajdowanie rozwiązań jest mniej oczywiste.

Zajmowaliśmy się równaniem

$$x'(t) = \lambda x(t)\,,$$

w którym λ oznacza daną liczbę, a x poszukiwaną funkcję zmiennej t. Stwierdziliśmy, że funkcja $e^{\lambda t}$ jest rozwiązaniem tego równania, a potem przekonaliśmy się, że jeśli funkcja x jest rozwiązaniem tego równania, to istnieje taka liczba $C \in \mathbb{R}$, że $x(t) = Ce^{\lambda t}$ dla każdej liczby $t \in \mathbb{R}$. Możemy więc zauważyć, że rozwiązania te tworzą jednowymiarową przestrzeń liniową.

Ogólniejsze równanie to

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)\,, \tag{12.3}$$

gdzie a, b są funkcjami ciągłymi zmiennej t określonymi na pewnym przedziale $(\alpha,\beta) \subseteq \mathbb{R}$.*

Załóżmy, że dwie funkcje x_1, x_2 są rozwiązaniami równania $x' = a(t)x + b(t)$, tzn. dla każdego $t \in (\alpha,\beta)$ zachodzą równości

*Na ogół zapisywać je będziemy w postaci $x'=a(t)x+b(t)$ ukrywając niejako zależność funkcji x od zmiennej t.

$$x_1' = a(t)x_1 + b(t) \qquad \text{oraz} \qquad x_2' = a(t)x_2 + b(t)\,.$$

Odjąwszy je stronami otrzymujemy $(x_1 - x_2)' = a(t)(x_1 - x_2)$. Oznacza to, że funkcja $x_1 - x_2$ jest rozwiązaniem równania jednorodnego

$$x' = a(t)x\,. \tag{12.4}$$

To jest równanie o zmiennych rozdzielonych, więc umiemy je już rozwiązać. Piszemy je w postaci $\frac{x'}{x} = a(t)$, całkujemy stronami, otrzymujemy $\ln|x| = \int a(\tau)\,d\tau$, zatem $|x| = e^{\int a(\tau)\,d\tau}$. Stąd bez większych trudności wnioskujemy, że $x = Ce^{A(t)}$, gdzie A jest dowolną funkcją pierwotną funkcji a, czyli $A(t) = \int a(t)\,dt$, a C dowolną liczbą rzeczywistą. Widzimy więc znów, że zbiór rozwiązań tego równania jest jednowymiarową przestrzenią liniową — wszystkie rozwiązania można otrzymać mnożąc wybrane niezerowe przez liczby.

Rozwiązawszy równanie jednorodne $x' = a(t)x$ możemy spróbować znaleźć jakieś rozwiązanie równania jednorodnego. Będziemy go szukać w postaci $c(t)e^{A(t)}$ — zastępujemy stałą C w rozwiązaniu ogólnym równania jednorodnego przez funkcję c zmiennej t. Podstawiając $x(t) = c(t)e^{A(t)}$ do równania $x' = a(t)x + b(t)$ otrzymujemy $c'(t)e^{A(t)} + c(t)A'(t)e^{A(t)} = a(t)c(t)e^{A(t)} + b(t)$, a ponieważ $A'(t) = a(t)$, więc $c'(t)e^{A(t)} + c(t)a(t)e^{A(t)} = a(t)c(t)e^{A(t)} + b(t)$, zatem $c'(t) = b(t)e^{-A(t)}$. Wystarczy więc znaleźć całkę $\int b(t)e^{-A(t)}\,dt$. Opisana metoda nazywana jest uzmiennianiem stałej (bo zamiast stałej C wpisujemy funkcję $c(t)$).♠ Pokażemy teraz na przykładach, jak działa ta metoda, która w jawnej formie pojawiła się w pracach J.L.Lagange'a w XVIII wieku.

Przykład 12.1 Rozwiążemy równanie $x' = -2x + t^2$. Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego $x' = -2x$ ma postać Ce^{-2t}. Szukamy więc rozwiązania równania niejednorodnego $x' = -2x + t^2$ w postaci $c(t)e^{-2t}$. Podstawiając tę funkcję w miejsce x otrzymujemy $c'(t)e^{-2t} - 2c(t)e^{-2t} = -2c(t)e^{-2t} + t^2$, zatem $c'(t) = t^2e^{2t}$ i wobec tego $c(t) = \int t^2e^{2t}\,dt \overset{\text{przez}}{\underset{\text{części}}{=\!=}} \frac12 t^2e^{2t} - \int te^{2t}\,dt \overset{\text{przez}}{\underset{\text{części}}{=\!=}} \frac12 t^2e^{2t} - \left[\frac12 te^{2t} - \frac12\int e^{2t}\,dt\right] =$
$= \frac12 t^2e^{2t} - \frac12 te^{2t} + \frac14 e^{2t} + C$. Wobec tego rozwiązaniem równania

$$x' = -2x + t^2$$

jest funkcja

$$\left[\tfrac12 t^2e^{2t} - \tfrac12 te^{2t} + \tfrac14 e^{2t} + C\right]e^{-2t} = \tfrac12 t^2 - \tfrac12 t + \tfrac14 + Ce^{-2t}\,.$$

♠ Ponieważ dla każdego t zachodzi $0 \neq e^{A(t)}$, więc każdą funkcję można zapisać w postaci $c(t)e^{A(t)}$, zatem nie zmniejszamy ogólności rozważań poszukując rozwiązania w tej postaci.

Jest to rozwiązanie ogólne. Zmieniając wartości parametru C otrzymujemy konkretne funkcje. Każda z nich jest rozwiązaniem równania $x' = -2x+t^2$. Innych rozwiązań to równanie nie ma.

Jednym z rozwiązań jest funkcja $\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$, przyjęliśmy $C = 0$. ■

Przykład 12.2 Teraz zajmiemy się równaniem $x' = -2x + t^3$. Zamiast całkować spróbujemy zgadywać. W poprzednim przykładzie okazało się, że jednym z rozwiązań badanego tam równania $x' = -2x + t^2$ jest wielomian kwadratowy. Badane teraz równanie ma nieco inną postać, więc można spróbować znaleźć wielomian trzeciego stopnia, który je spełnia. Nie mamy żadnych racjonalnych podstaw, by twierdzić, że to się uda.* Jednak spróbujemy. Niech $x(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$. Symbole a, b, c, d oznaczają tu liczby, które zamierzamy znaleźć. Podstawiając do równania otrzymujemy:

$$3at^2 + 2bt + c = -2at^3 - 2bt^2 - 2ct - 2d + t^3 = (-2a+1)t^3 - 2bt^2 - 2ct - 2d.$$

Ponieważ ta równość ma być spełniona przez wszystkie liczby rzeczywiste t, więc muszą zachodzić równości $-2a + 1 = 0$, $-2b = 3a$, $-2c = 2b$ i $-2d = c$. Z nich wynika natychmiast, że $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{3}{4}$, $c = \frac{3}{4}$ i $d = -\frac{3}{8}$. Wobec tego funkcja $\frac{1}{2}t^3 - \frac{3}{4}t^2 + \frac{3}{4}t - \frac{3}{8}$ jest rozwiązaniem szczególnym (czyli jednym z rozwiązań) równania $x' = -2x + t^3$.

Rozwiązanie ogólne znajdujemy dodając do znalezionego rozwiązania szczególnego rozwiązanie ogólne równania jednorodnego. Otrzymujemy

$$x = \frac{1}{2}t^3 - \frac{3}{4}t^2 + \frac{3}{4}t - \frac{3}{8} + Ce^{-2t}. \quad ■$$

Przykład 12.3 Teraz zajmiemy się równaniem

$$x'(t) = -3x(t) + \sin t. \tag{12.5}$$

Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego wygląda tak: Ce^{-3t}. Znajdziemy rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego (12.5) w postaci $c(t)e^{-3t}$. Podstawiając tę funkcję do równania (12.5) otrzymujemy równość

$$\left[c(t)e^{-3t}\right]' = -3c(t)e^{-3t} + \sin t.$$

Po zróżniczkowaniu lewej strony otrzymujemy

$$c'(t)e^{-3t} - 3c(t)e^{-3t} = -3c(t)e^{-3t} + \sin t,$$

czyli $c'(t)e^{-3t} = \sin t$, tzn. $c'(t) = e^{3t}\sin t$. Wystarczy więc znaleźć $\int e^{3t}\sin t\,dt$. Scałkujemy dwukrotnie przez części:

* To się wkrótce zmieni!

$$\int e^{3t}\sin t\,dt = \tfrac{1}{3}e^{3t}\sin t - \tfrac{1}{3}\int e^{3t}\cos t\,dt = \tfrac{1}{3}e^{3t}\sin t - \tfrac{1}{9}e^{3t}\cos t - \tfrac{1}{9}\int e^{3t}\sin t\,dt\,.$$

Otrzymaliśmy równanie w którym niewiadomą jest poszukiwana całka. Możemy je przepisać w postaci

$$\tfrac{10}{9}\int e^{3t}\sin t\,dt = \tfrac{1}{3}e^{3t}\sin t - \tfrac{1}{3}\int e^{3t}\cos t\,dt = \tfrac{1}{3}e^{3t}\sin t - \tfrac{1}{9}e^{3t}\cos t + c\,,$$

gdzie c oznacza pewną stałą. Mnożąc przez $\frac{9}{10}$ otrzymujemy

$$\int e^{3t}\sin t\,dt = \tfrac{3}{10}e^{3t}\sin t - \tfrac{1}{10}e^{3t}\cos t + c\,.$$

Wobec tego możemy napisać, że funkcja

$$\big[\tfrac{3}{10}e^{3t}\sin t - \tfrac{1}{10}e^{3t}\cos t + c\big]e^{-3t} = \tfrac{3}{10}\sin t - \tfrac{1}{10}\cos t + ce^{-3t}$$

jest rozwiązaniem równania (12.5).

Mogliśmy postąpić podobnie jak w przykładzie 12.2: zgadnąć jedno rozwiązanie i dodać do niego wszystkie rozwiązania równania jednorodnego. W równaniu (12.5) występuje funkcja sinus. Mogliśmy więc spróbować znaleźć takie liczby A, B, by funkcja $A\cos t + B\sin t$ okazała się rozwiązaniem równania (12.5). Zobaczymy teraz, jak działa ta metoda.

Podstawiamy $x(t) = A\cos t + B\sin t$ i otrzymujemy

$$-A\sin t + B\cos t = -3\big[A\cos t + B\sin t\big] + \sin t = -3A\cos t + (1-3B)\sin t\,.$$

Wystarczy wybrać liczby A, B tak, by $-A = 1-3B$ i $B = -3A$. Rozwiązując ten układ równań liniowych z niewiadomymi A, B otrzymujemy: $A = -\frac{1}{10}$ i $B = \frac{3}{10}$. Przekonaliśmy się, że funkcja $x(t) = -\frac{1}{10}\cos t + \frac{3}{10}\sin t$ jest rozwiązaniem szczególnym (czyli jednym z rozwiązań) równania $x'(t) = -3x(t) + \sin t$. Rozwiązanie ogólne otrzymujemy dodając do otrzymanego rozwiązania szczególnego rozwiązanie ogólne równania jednorodnego $x' = -3x$:

$$-\tfrac{1}{10}\cos t + \tfrac{3}{10}\sin t + Ce^{-3t}\,. \;\blacksquare$$

Definicja 12.1 (quasiwielomianu)

Funkcję postaci $w(t)e^{\lambda t}$, gdzie w jest wielomianem stopnia n nazywamy quasiwielomianem stopnia n o wykładniku λ. ■

Funkcja $(2t^2+5t-3)e^{3t}$ jest quasiwielomianem stopnia 2 o wykładniku 3. Funkcja t^3+1 jest quasiwielomianem stopnia 3 o wykładniku 0, czyli wielomianem stopnia 3. Funkcja

$$(t^7 + 13t3 + 666)e^{2it} = (t^7 + 13t3 + 666)\cos 2t + i(t^7 + 13t3 + 666)\sin 2t$$

jest quasiwielomianem stopnia 7 o wykładniku $2i$. Jej część rzeczywista, czyli funkcja $(t^7+13t3+666)\cos 2t$ quasiwielomianem nie jest, ale jest sumą quasiwielomianów stopnia 7 o wykładnikach $2i$ oraz $-2i$:

$$(t^7 + 13t3 + 666)\cos 2t = \tfrac{1}{2}(t^7 + 13t3 + 666)e^{2it} + (t^7 + 13t3 + 666)e^{-2it}\,.$$

Funkcja $t^3e^{-5t}+te^{5t}$ też nie jest quasiwielomianem, ale jest sumą dwóch quasiwielomianów. Czytelniku warto się przekonać o tym samodzielnie!

Stwierdzenie 12.2 (o różniczkowaniu quasiwielomianów)
Niech w będzie wielomianem stopnia n. Wtedy

(12.2.1) jeśli $\lambda\neq\mu$, to funkcja $\big[w(t)e^{\lambda t}\big]'-\mu w(t)e^{\lambda t}$ jest quasiwielomianem stopnia n o wykładniku λ.

(12.2.2) jeśli $\lambda=\mu$, to funkcja $\big[w(t)e^{\lambda t}\big]'-\mu w(t)e^{\lambda t}$ jest quasiwielomianem stopnia $n-1$ o wykładniku λ.

Dowód. $\big[w(t)e^{\lambda t}\big]'-\mu w(t)e^{\lambda t}=\big[w'(t)+(\lambda-\mu)w(t)\big]e^{\lambda t}$. ■

Ze stwierdzenia o różniczkowaniu quasiwielomianów wynika

Twierdzenie 12.3 (o rozwiązaniach równań postaci $x'(t)=a(t)x(t)+b(t)$, w których a jest stałą, a b – quasiwielomianem)
Jeśli μ jest liczbą, a b quasiwielomianem stopnia n z wykładnikiem λ, to równanie

$$x'=\mu x+b(t)$$

ma rozwiązanie, które jest quasiwielomianem z wykładnikiem λ, którego stopień jest

(12.3.1) równy n, gdy $\lambda\neq\mu$;

(12.3.2) równy $n+1$, gdy $\lambda=\mu$. ■

Pokażemy na przykładzie, jak można stosować to twierdzenie.

Przykład 12.4 Znajdziemy rozwiązania równania $x'=5x+2t^2e^{3t}+4t^3e^{5t}$. Ponieważ funkcja $2t^2e^{3t}+4t^3e^{5t}$ nie jest quasiwielomianem, ale jest sumą dwóch quasiwielomianów, więc zajmiemy się dwoma równaniami niejednorodnymi:

$$x'=5x+2t^2e^{3t}\qquad\text{oraz}\qquad x'=5x+4t^3e^{5t}.$$

Na mocy twierdzenia 12.3 równanie $x'=5x+2t^2e^{3t}$ ma rozwiązanie, które jest quasiwielomianem stopnia 2 o wykładniku 3, czyli postaci $(\alpha t^2+\beta t+\gamma)e^{3t}$. Podstawiając tę funkcję w miejsce x w równaniu $x'=5x+2t^2e^{3t}$ otrzymujemy

$$(2\alpha t+\beta+3\alpha t^2+3\beta t+3\gamma)e^{3t}=(5\alpha t^2+5\beta t+5\gamma)e^{3t}+2t^2e^{3t}.$$

Możemy tę równość zastąpić równoważną:

$$3\alpha t^2+(2\alpha+3\beta)t+\beta+3\gamma=(5\alpha+2)t^2+5\beta t+5\gamma.$$

Z tej równości wynika, że $3\alpha=5\alpha+2$, $2\alpha+3\beta=5\beta$ i $\beta+3\gamma=5\gamma$. Wobec tego $\alpha=-1$, $\beta=-1$ i $\gamma=-\frac12$, a to oznacza, że funkcja $x_1(t)=-(t^2+t+\frac12)e^{3t}$ jest rozwiązaniem szczególnym równania $x'=5x+2t^2e^{3t}$.

Na mocy twierdzenia 12.3 rozwiąniem szczególnym równania $x'=5x+4t^3e^{5t}$ jest quasiwielomian stopnia 4 o wykładniku 5, czyli funkcja postaci

$$(At^4 + Bt^3 + Ct^2 + Dt + E)e^{5t}\,.$$

Podstawiając tak jak poprzednio tę funkcję w miejsce x do równania $x' = 5x + 4t^3e^{5t}$ otrzymujemy równość

$$(4At^3 + 3Bt^2 + 2Ct + D)e^{5t} + (5At^4 + 5Bt^3 + 5Ct^2 + 5Dt + 5E)e^{5t} =$$
$$= (5At^4 + 5Bt^3 + 5Ct^2 + 5Dt + 5E)e^{5t} + 4t^3e^{5t}\,.$$

Z niej wynika, że $4At^3 + 3Bt^2 + 2Ct + D = 4t^3$ dla każdego t, zatem $A = 1$, $B = C = D = 0$. Wobec tego dla każdego E funkcja

$$x_2(t) = (t^4 + E)e^{5t} = t^4e^{5t} + Ee^{5t}$$

jest rozwiązaniem równania $x' = 5x + 4t^3e^{5t}$, a to oznacza, że jest ona jego rozwiązaniem ogólnym (bo funkcja Ee^{5t} jest rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego $x' = 5x$).

Ponieważ $x_1'(t) = 5x_1 + 2t^2e^{3t}$ i $x_2'(t) = 5x_2(t) + 4t^3e^{5t}$, więc

$$\big(x_1 + x_2\big)' = 5(x_1 + x_2) + 2t^2e^{3t} + 4t^3e^{5t}\,.$$

Znaleźliśmy więc rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego. Jest nim funkcja

$$x_1 + x_2 = -(t^2 + t + \tfrac{1}{2})e^{3t} + (t^4 + E)e^{5t} = -(t^2 + t + \tfrac{1}{2})e^{3t} + t^4e^{5t} + Ee^{5t}\,. \quad \blacksquare$$

Oczywiście w ostatnim przykładzie można nieco skrócić rachunki posługując się wzorem z dowodu stwierdzenia o różniczkowaniu quasiwielomianów. Nie zrobiliśmy tego, by nie sprawiać wrażenia, że wszystkie te wzory trzeba zapamiętywać. Można, ale nie ma konieczności i nie warto wkładać wysiłku w zapamiętanie wzorów. Lepiej zrozumieć i zapamiętać metodę.

Przykład 12.5 Rozwiążemy równanie $x' - 3x = t\sin 2t + e^t\cos 2t$ korzystając z twierdzenia o rozwiązaniach równań o stałym współczynniku, w których wyraz wolny jest quasiwielomianem. Ponieważ lewa strona nie jest quasiwielomianem, ale $t\sin 2t = \mathrm{Im}\,(ie^{2it})$ i $e^t\cos 2t = \mathrm{Re}\,(e^{(1+2i)t})$, więc zajmiemy się najpierw równaniami

$$x' - 3x = te^{2it} \qquad \text{i} \qquad x' - 3x = e^{(1+2i)t}\,.$$

Ponieważ $3 \neq 2i$, więc na mocy twierdzenia 12.3 równanie $x' - 3x = te^{2it}$ ma rozwiązanie, które jest quasiwielomianem stopnia 1 z wykładnikiem $2i$, czyli rozwiązanie postaci $(At + B)e^{2it}$. Podstawiając tę funkcję w miejsce x w równaniu otrzymujemy $\big[(At + B)e^{2it}\big]' - 3\big[(At + B)e^{2it}\big] = te^{2it}$, czyli

$$\big[(2Ai - 3A)t + 2iB - 3B + A\big]e^{2it} = te^{2it}\,.$$

Muszą więc być spełnione równości $(-3 + 2i)A = 1$ i $A + (-3 + 2i)B = 0$. Z nich wnioskujemy, że $A = \frac{1}{-3+2i} = \frac{-3-2i}{(-3)^2-(2i)^2} = -\frac{1}{13}(3 + 2i)$ i wobec tego $B = \frac{1}{3-2i}A =$ $= -\frac{1}{13} \cdot \frac{3+2i}{3-2i} = -\frac{1}{13} \cdot \frac{(3+2i)^2}{3^2-(2i)^2} = -\frac{1}{13} \cdot \frac{5+12i}{13} = -\frac{5+12i}{169}$. Wynika z tych obliczeń, że jeżeli $x_1(t) = -\big(\frac{1}{13}(3+2i)t + \frac{5+12i}{169}\big)\big)e^{2it}$, to $x_1' - 3x_1 = te^{2it}$. Zdefiniujmy funkcję o wartościach rzeczywistych

$$x_3(t) = -\mathrm{Im}\big(\tfrac{1}{13}(3+2i)t + \tfrac{5+12i}{169}\big)\big)e^{2it} = -\big(\tfrac{3}{13}t + \tfrac{5}{169}\big)\sin 2t - \big(\tfrac{2}{13}t + \tfrac{12}{169}\big)\cos 2t\,.$$

Ponieważ x_3 jest częścią urojoną funkcji x_1 a funkcję zmiennej **rzeczywistej** t, której wartości są zespolone różniczkujemy obliczając oddzielnie pochodną jej część rzeczywistej i części urojonej, więc $x_3' - 3x_3 = \mathrm{Im}\big(te^{2it}\big) = t\sin 2t$.

Ponieważ $3 \neq 1+2i$, więc jednym z rozwiązań równania $x' - 3x = e^{(1+2i)t}$ jest quasiwielomian stopnia 0 z wykładnikiem $1+2i$, czyli funkcja postaci $Ce^{(1+2i)t}$. Podstawiając ją w miejsce x do równania otrzymujemy równanie

$$\big[C(1+2i) - 3C\big]e^{(1+2i)t} = e^{(1+2i)t}\,.$$

Musi więc być spełniona równość $(-2+2i)C = 1$, zatem $C = \frac{-1}{2(1-i)} = -\frac{1+i}{4}$. Wobec tego funkcja $x_2 = -\frac{1+i}{4}\cdot e^{(1+2i)t}$ jest rozwiązaniem szczególnym równania $x' - 3x = e^{(1+2i)t}$. Niech $x_4 = \mathrm{Re}\big(-\frac{1+i}{4}\cdot e^{(1+2i)t}\big) = -\frac{1}{4}e^t\cos 2t + \frac{1}{2}e^t\sin 2t$. Podobnie jak poprzednio możemy napisać, że $x_4' - 3x_4 = \mathrm{Re}\big(e^{(1+2i)t}\big) = e^t\cos 2t$.

Sumując równości $x_3' - 3x_3 = t\sin 2t$ i $x_4' - 3x_4 = e^t\cos 2t$ otrzymujemy

$$(x_3+x_4)' - 3(x_3+x_4) = t\sin 2t + e^t\cos 2t\,.$$

Wykazaliśmy więc, że funkcja

$$x_3 + x_4 = -\big(\tfrac{3}{13}t + \tfrac{5}{169}\big)\sin 2t - \big(\tfrac{2}{13}t + \tfrac{12}{169}\big)\cos 2t - \tfrac{1}{4}e^t\cos 2t + \tfrac{1}{2}e^t\sin 2t$$

jest rozwiązaniem szczególnym równania $x' - 3x = t\sin 2t + e^t\cos 2t$. Dodając do tego rozwiązania rozwiązanie ogólne równania jednorodnego $x' - 3x = 0$ otrzymujemy rozwiązanie ogólne równania $x' - 3x = t\sin 2t + e^t\cos 2t$:

$$-\big(\tfrac{3}{13}t + \tfrac{5}{169}\big)\sin 2t - \big(\tfrac{2}{13}t + \tfrac{12}{169}\big)\cos 2t - \tfrac{1}{4}e^t\cos 2t + \tfrac{1}{2}e^t\sin 2t + Ce^{3t}\,. \quad \blacksquare$$

Metoda przedstawiona w ostatnich przykładach znana jest jako metoda współczynników nieoznaczonych. Oczywiście przyjrzawszy się temu, co demonstrowaliśmy w ostatnim przykładzie, możemy od razu szukać rozwiązania rzeczywistego w postaci

$$(c_1t + c_2)\cos 2t + (c_3t + c_4)\sin 2t + c_3e^t\cos 2t + c_4e^t\sin 2t\,.$$

Uważam jednak, że warto pokazać, że użycie liczb zespolonych w wielu przypadkach pozwala patrzeć na funkcje trygonometryczne jak na część rzeczywistą lub urojoną funkcji wykładniczej o wykładniku zespolonym.

Kilka zadań

12. 01 Rozwiązać równanie $tx' - 2x = 2t^4$.

12. 02 Rozwiązać równanie $x' + 2x = t^2 e^t$.

12. 03 Rozwiązać równanie $x' + 2x = t^2 e^{2t}$.

12. 04 Rozwiązać równanie $t^2 x' + tx + 1 = 0$.

12. 05 Rozwiązać równanie $x' + \frac{t}{1+t^2} x = \frac{1}{t(1+t^2)}$.

12. 06 Rozwiązać równanie $tx' - tx - e^t = 0$.

12. 07 Rozwiązać równanie $(\sin^2 x + t \operatorname{ctg} x)x' = 1$.
Wskazówka: potraktować zmienną t jako funkcję zmiennej x. Na ogól x nie da się przedstawić jawnie jako funkcja t.

12. 08 Rozwiązać równanie $(1 - 2tx)x' = x(x-1)$. *Wskazówka: zob. poprz. zad..*

12. 09 Znaleźć takie niezerujące się funkcje f takie, że dla dowolnego x pole trójkąta utworzonego przez styczną do wykresu w punkcie $(x, f(x))$, poziomą oś układu współrzędnych i pionową prostą przechodzącą przez punkt $(x, f(x))$ jest niezależne od x i równe a^2, $a \neq 0$.

12. 10 Znaleźć takie funkcje f takie, że dla dowolnego x punkt styczna do wykresu poprowadzona przez punkt $(x, f(x))$ przecina oś OX w punkcie $\left(\frac{x}{2}, 0\right)$.

12. 11 W pojemniku o objętości 20 l znajduje się powietrze 80% azotu, 20% tlenu. Do pojemnika wpompowywany jest azot z prędkością 0,1 l$/s$, który błyskawicznie miesza się z mieszanką gazów w pojemniku. Jednocześnie z pojemnika wypuszczana jest mieszanka w takim samym tempie w jakim wpompowywany jest azot. Po jakim czasie w pojemniku będzie 99% azotu?

12. 12 Ile czasu będzie wyciekać woda z pionowego pojemnika w kształcie walca o średnicy 1,8 m, o wysokości 2,45 m przez otwór w dnie o średnicy 6 cm. Zakładamy, że woda wycieka z pojemnika z prędkością $0{,}6\sqrt{2gh}$, gdzie $g = 10m/s^2$ a h oznacza głębokość wody w pojemniku.

12. 13 Masa rakiety z paliwem równa jest M, bez paliwa — m, prędkość, z którą wylatują z rakiety produkty spalania jest równa w (oczywiście względem rakiety), prędkość początkowa rakiety równa jest v_0. Znaleźć prędkość rakiety po spaleniu całego paliwa. Zakładamy, że rakieta porusza się w próżni z dala od ciał niebieskich (więc nie bierzemy pod uwagę żadnych sił poza „siłą odrzutu”).
Wskazówka: skorzystać z zasady zachowania pędu w celu wyprowadzenia równania, które spełnia zmieniająca się w czasie prędkość rakiety, należy oczywiście wziąć pod uwagę to, że w wyniku spalania paliwa masa rakiety też zmienia się w czasie.

12. 14 Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $x'(t) = \frac{2\sin t\cos t}{4+\sin^2 t}\, x(t) + \cos t(4+\sin^2 t)$.

Rozwiązać zagadnienie początkowe $\begin{cases} x'(t) = \frac{2\sin t\cos t}{4+\sin^2 t}\, x(t) + \cos t(4+\sin^2 t), \\ x(\frac{\pi}{6}) = \frac{2}{17}. \end{cases}$