Równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych

I. Newton sformułował podstawowe zasady dynamiki. Druga zasada dynamiki ma postać wzoru

$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}\,.$$

$\mathbf{F}$ oznacza tu siłę działającą na ciało o masie m, $\mathbf{a}$ oznacza przyspieszenie tego ciała. Przyspieszenie to druga pochodna położenia w chwili t, oczywiście przyspieszenie na ogół zależy od czasu. Jest to oczywiście wielkość wektorowa, więc dlatego stosujemy „tłusty” druk albo strzałkę (to rzecz gustu). Oznaczając położenie w chwili t przez $\mathbf{x}(t) = \big(x_1(t), x_2(t), x_3(t)\big)$ otrzymujemy $\mathbf{a}(t) = \mathbf{x}''(t)$. W ogólności siła jest wektorem zależnym od położenia (np. grawitacyjna), prędkości poruszającego się ciała (np. tarcie) i czasu (np. zwiększamy lub zmniejszamy obroty silnika). Powinniśmy więc traktować wektor $\mathbf{F}$ jako funkcję zależną od zmiennych $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$ oraz t. Wtedy druga zasada dynamiki przyjmuje postać

$$\mathrm{F}\big(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t), t\big) = m\mathbf{x}''(t)\,.$$

Z jednej strony występuje druga pochodna funkcji $\mathbf{x}$, a z drugiej funkcja zależna od $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$ oraz t. Zwykle naszym celem po napisaniu takiego równania jest znalezienie funkcji $\mathbf{x}$ — chcemy zbadać ruch, czyli móc powiedzieć w jakim punkcie w danej chwili znajduje się poruszający się obiekt.

Równania tego typu nazywane są *równaniami różniczkowymi*, w tym konkretnym przypadku drugiego rzędu, bowiem w równaniu występują pochodne drugiego rzędu niewiadomej funkcji, a pochodne wyższego rzędu już nie.

Jeśli równanie nie daje się rozwiązać, to możemy próbować przybliżyć rozwiązanie, czasem przybliżyć równanie i rozwiązać równanie przybliżone w nadziei, że jego rozwiązania przybliżają rozwiązania wyjściowego równania. Zagadnienia te są trudne. W trakcie tego wykładu zajmować się będziemy jedynie najprostszymi typami równań różniczkowych i to tylko takimi, które można rozwiązać używając jedynie elementarnych funkcji.

W szkole uczniowie spotykają się na lekcjach fizyki z wahadłem matematycznym, poznają prawa jego ruchu. Zaczyna się to wszystko od stwierdzenia, że jeśli $x(t)$ oznacza kąt o jaki wahadło odchylone jest od pionu w chwili t, to spełniona jest równość $x''(t) = -\sin x(t)$. Zakładam tu, że jednostki są tak dobrane, że przyspieszenie ziemskie równe jest 1, długość wahadła też jest 1 i dlatego nie ma żadnych współczynników w rodzaju g, l, ... Następnie nauczyciel oświadcza, że ponieważ zajmujemy się jedynie sytuacją, w której amplituda wahań jest mała, więc możemy przyjąć, że $\sin x \approx x$,* co pozwala na zajęcie się równaniem $x''(t) = -x(t)$. To ostatnie daje się łatwo rozwiązać, nauczymy się tego w nieodległej przyszłości.

Można równanie $x''(t) = -\sin x(t)$ pomnożyć stronami przez $x'(t)$, w wyniku otrzymamy $x''(t)x'(t) = -x'(t)\sin x(t)$. Korzystając z wzoru na pochodną złożenia możemy napisać równość $\frac{1}{2}\big(\big[x'(t)\big]^2\big)' = \big(\cos x(t)\big)'$. Ponieważ pochodna funkcji $\frac{1}{2}\big[x'(t)\big]^2 - \cos x(t)$ zeruje się na całej prostej, więc ta funkcja jest stała. Fizycy tę funkcję zwykli nazywać energią i dodając, że $\frac{1}{2}\big[x'(t)\big]^2$ to energia kinetyczna, a $-\cos x(t)$ to energia potencjalna. Nie ma więc nic dziwnego w tym, że suma energii kinetycznej i potencjalnej jest stała. Oznaczmy tę stałą przez E. Może ona przyjmować różne wartości, jednak nie mogą one być mniejsze niż -1. Jeśli $\frac{1}{2}\big[x'(t)\big]^2 - \cos x(t) = -1$, to musi być $x'(t) = 0$ i $\cos x(t) = 1$ dla każdej liczby t. Odpowiada to temu, że wahadło znajduje się w swym najniższym położeniu i nie porusza się. Zajmiemy się inną ciekawą z punktu widzenia autora tekstu wartością E, mianowicie przyjmiemy, że $E = 1$. Nasze równanie ma więc teraz postać:

$$\frac{1}{2}\big[x'(t)\big]^2 - \cos x(t) = 1$$

Nie jest trudno odgadnąć jedno z rozwiązań. Funkcja stała $x(t) = \pi$ spełnia to równanie. Rozwiązanie to odpowiada temu, że wahadło znajduje się bez ruchu w swym **górnym** położeniu. Oczywiście tego rodzaju bezruch jest bardzo niestabilny i trudno go zrealizować w praktyce. Przepiszmy równanie w postaci

$$x'(t) = \pm\sqrt{2(1+\cos x(t))} = \pm\sqrt{4\cos^2\tfrac{x(t)}{2}} = \pm 2\cos\tfrac{x(t)}{2}\,.$$

Zajmiemy się równaniem $x'(t) = 2\cos\frac{x(t)}{2}$. Przepiszemy je w postaci

$$1 = \frac{x'(t)}{2\cos\frac{x(t)}{2}}\,.$$

Całkując obie strony otrzymujemy

$$t + C = \int 1\cdot dt = \int \frac{x'(t)}{2\cos\frac{x(t)}{2}}\,dt \;\underset{dx=x'(t)/2\,dt}{\overset{x=x(t)/2}{=\!=\!=\!=}}\; \int\frac{dx}{\cos x} = \int\frac{\cos x\,dx}{1-\sin^2 x} =$$

* Jeśli f jest funkcją różniczkowalną w punkcie p, to dla dostatecznie małych $|h|$ zachodzi równość przybliżona $f(p+h)\approx f(p)+f'(p)h$. Tę przybliżoną równość stosujemy tu dla $f(x)=\sin x$, $p=0$. Zastępujemy więc funkcję sinus funkcją liniową.

$$\xlongequal[dz=\cos x\,dx]{z=\sin x} \int \frac{dz}{1-z^2} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-z}+\frac{1}{1+z}\right)dz =$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\ln|1-z|+\ln|1+z|\right) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin\frac{x(t)}{2}}{1-\sin\frac{x(t)}{2}}\right| = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin\frac{x(t)}{2}}{1-\sin\frac{x(t)}{2}} =$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{\left(1+\sin\frac{x(t)}{2}\right)^2}{\cos^2\frac{x(t)}{2}}\,.$$

Można więc napisać $\quad e^{2(t+C)} = \dfrac{(1+\sin\frac{x(t)}{2})^2}{\cos^2\frac{x(t)}{2}} = \dfrac{(1+\sin\frac{x(t)}{2})^2}{1-\sin^2\frac{x(t)}{2}} = \dfrac{1+\sin\frac{x(t)}{2}}{1-\sin\frac{x(t)}{2}}\,.$

Stąd wyznaczamy $\quad \sin\dfrac{x(t)}{2} = \dfrac{e^{2(t+C)}-1}{e^{2(t+C)}+1}$, czyli $x(t) = 2\arcsin\dfrac{e^{2(t+C)}-1}{e^{2(t+C)}+1}\,.$

Bez trudu można stwierdzić, że funkcja x jest na całej prostej $(-\infty,+\infty)$ ściśle rosnąca. Mamy też $x(t)\xrightarrow[t\to\infty]{}2\frac{\pi}{2}=\pi$. Fizyczna interpretacja znalezionego rozwiązania jest następująca: wahadło zostało popchniete z taką siłą, że będzie poruszać się z malejącą prędkością w kierunku swego górnego położenia, ale nigdy go nie osiągnie! W szczególności to rozwiązanie **nie** jest funkcją okresową.

Rozważony przykład to szczególny przypadek równania o zmiennych rozdzielonych

$$x'(t) = f(t)g\big(x(t)\big)$$

zapisywanego często niecałkiem precyzyjnie w postaci $x' = f(t)g(x)$. W omówionym przykładzie mieliśmy $f(t) = 1$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$ oraz $g(x) = 2\cos\frac{x}{2}$ dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$.

Podamy bez dowodu twierdzenie, którego ogólniejsza wersja zostanie podana później.

Twierdzenie 11.1 (o istnieniu i jednoznaczności dla równania o zmiennych rozdzielonych)

Jeśli funkcja f jest ciągła na przedziale (α,β), a funkcja g jest ma ciągłą pochodną na przedziale (a,b), to dla każdej pary punktów $t_0 \in (\alpha,\beta)$, $x_0 \in (a,b)$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że na przedziale $(t_0-\delta, t_0+\delta) \subseteq (\alpha,\beta)$ równanie $x'(t) = f(t)g\big(x(t)\big)$ ma dokładnie jedno rozwiązanie $x(t)$ spełniające warunek $x(t_0) = x_0$. $\boxtimes$

Przykład 11.1 Zajmiemy się równaniem

$$x'(t) = \lambda x(t)\,,$$

w którym λ oznacza daną liczbę, a x poszukiwaną funkcję zmiennej t. Nie jest trudno zauważyć, że funkcja $e^{\lambda t}$ jest rozwiązaniem tego równania. Oczywiście nie jedynym. Jeśli pomnożymy tę funkcję np. przez $\sqrt[3]{11}$, to też otrzymamy rozwiązanie. Ogólnie funkcja $Ce^{\lambda t}$ jest rozwiązaniem równania $x'(t) = \lambda x(t)$ dla każdej liczby C, bo $\left(Ce^{\lambda t}\right)' = \lambda Ce^{\lambda t}$. Wykażemy, że innych rozwiązań to równanie nie ma.

Jeśli dla każdej liczby t zachodzi równość $x'(t) = \lambda x(t)$, to

$$\left(x(t)e^{-\lambda t}\right)' = x'(t)e^{-\lambda t} - x(t)\lambda e^{-\lambda t} = \lambda x(t)e^{-\lambda t} - x(t)\lambda e^{-\lambda t} = 0\,.$$

Oznacza to, że funkcja $x(t)e^{-\lambda t}$ jest stała na przedziale, na którym jest określona (zakładamy, że dziedziną funkcji x jest pewien przedział). Oznaczając wartość funkcji $x(t)e^{-kt}$ przez C otrzymujemy równość $x(t) = Ce^{kt}$. Wykazaliśmy, że odgadnięte rozwiązania są jedynymi.

Przy okazji warto zauważyć, że rozwiązania tego równania tworzą przestrzeń liniową, co oznacza, że suma rozwiązań jest rozwiązaniem tego równania oraz że pomnożywszy rozwiązanie przez liczbę otrzymujemy następne rozwiązanie.

Równanie to pojawia się np. przy badaniu rozszerzalności cieplnej (długość jako funkcja temperatury), przy rozpadzie promieniotwórczym (masa jako funkcja czasu), badaniu liczebności populacji (np. liczba zajęcy na danym obszarze jako funkcja czasu) i wielu innych okazjach. ■

Przykład 11.2 Rozwiążemy równanie $x'(t) = tx(t)$. Piszemy $t = \frac{x'(t)}{x(t)}$. Całkujemy obie strony względem t. Otrzymujemy

$$\tfrac{1}{2}t^2 + C = \int t\,dt = \int \tfrac{x'(t)}{x(t)}\,dt = \int \tfrac{dx}{x} = \ln|x|\,.$$

Stąd $|x| = e^C \cdot e^{t^2/2}$ i wobec tego $x(t) = \pm e^c \cdot e^{t^2/2}$. Niech C_1 oznacza dowolną liczbę rzeczywistą (dodatnią, ujemną lub 0) i niech $x(t) = C_1 e^{t^2/2}$. Ta funkcja jest rozwiązaniem równania $x'(t) = tx(t)$, co można bez trudu sprawdzić (z przeprowadzonych wcześniej obliczeń wynika, że tak jest dla $C_1 \neq 0$). Innych rozwiązań nie ma, bowiem funkcja t jest ciągła na całej prostej (a nawet różniczkowalna i to nieskończenie wiele razy), funkcja x jest różniczkowalna i jej pochodna jest ciągła (bo jest stała), więc są spełnione założenia twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności, zatem teza też. Przyjmując $C_1 = x_0 e^{-t_0^2}$ i $x(t) = C_1 e^{t^2/2} = x_0 e^{t^2/2 - t_0^2/2}$ otrzymujemy rozwiązanie spełniające warunek $x(t_0) = x_0$, a to oznacza, że innych rozwiązań już nie ma. ■

Przykład 11.3 Zajmiemy się teraz równaniem $x'(t) = \sqrt[3]{x(t)^2}$. Postępując tak, jak poprzednio otrzymujemy

$$1 = \frac{x'(t)}{\sqrt[3]{x(t)^2}}\,,\ \text{zatem}\ t + C = \int dt = \int \frac{x'(t)}{\sqrt[3]{x(t)^2}}\,dt = \int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = 3x^{1/3}\,,$$

zatem $x(t) = \left(\frac{t+c}{3}\right)^3$.

Wydawać by się mogło, że rozwiązaliśmy równanie, czyli że znaleźliśmy wszystkie jego rozwiązania. Jednak tym razem mamy kłopot. W tym przypadku $f(t) = 1$, więc funkcja f jest ciągła a nawet różniczkowalna (bo jest stała), ale funkcja $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$ nie jest różniczkowalna w punkcie 0. $g'(0)$ istnieje, ale jest nieskończona: $g'(0) = \infty$.

Założenia twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności nie są spełnione. Bez trudu sprawdzamy, że funkcja określona wzorami

$$x(t) = \begin{cases} \frac{t^3}{27} & \text{dla } x \geq 0 \\ 0 & \text{dla} x < 0 \end{cases}$$

spełnia równanie $x'(t) = \sqrt[3]{x(t)^2}$, funkcja tożsamościowo równa 0, też spełnia to równanie, obie przyjmują wartość 0 w punkcie $t = 0$ i oczywiście nie pokrywają się na żadnym przedziale o środku w punkcie 0. ■

Przykład 11.4 Znajdziemy rozwiązania równania $x'(t) = x(t)^2$. Możemy to równanie przepisać w postaci $1 = \frac{x'(t)}{x(t)^2}$. Całkując obie strony otrzymujemy

$$t + C = \int dt = \int \frac{x'(t)}{x(t)^2}\, dt = \int \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x}.$$

Wynika stąd od razu, że $x(t) = \frac{-1}{t+C}$. Jeśli chcemy, by $x(t_0) = x_0$, gdzie t_0 i x_0 są dowolnymi liczbami rzeczywistymi, to musi być spełniona równość $x_0 = \frac{-1}{t_0+C}$, zatem $C = -t_0 - \frac{1}{x_0}$. Wynika stąd, że $x(t) = \frac{-1}{t-t_0-\frac{1}{x_0}} = \frac{x_0}{1-x_0(t-t_0)}$.

Zwykle żąda się, by rozwiązania równania różniczkowego określone były na pewnym przedziale (być może nieskończonym). W tym przypadku należy wykluczyć z dziedziny rozwiązania punkt $t_0 + \frac{1}{x_0}$. Dzieli on prostą na dwie półproste. Dziedziną poszukiwanego rozwiązania tego równania jest ta z nich, która zawiera punkt t_0: jeśli $x_0 > 0$, to dziedziną jest półprosta $(-\infty, t_0 + \frac{1}{x_0})$, a jeśli $x_0 < 0$, to dziedziną rozwiązania jest półprosta $(t_0 + \frac{1}{x_0}, \infty)$. ■

Zwykle układ równań $\begin{cases} x'(t) &= f(t,x), \\ x'(t_0) &= x_0, \end{cases}$ nazywany jest zagadnieniem Cauchy'ego: dane są funkcja f oraz liczby t_0, x_0. Należy znaleźć funkcję x.

Kilka zadań

W niektórych zadaniach z listy poniżej można nie znajdować jawnego wzoru na funkcję x i podać wynik w postaci $f(t, x(t)) = 0$.

11.01 Rozwiązać równanie $x' + tx^2 = 0$.

11.02 Rozwiązać równanie $x' + t^2x = 0$.

11.03 Rozwiązać równanie $x' + tx^2 = t$.

11.04 Rozwiązać równanie $x' + tx = 0$.

11.05 Rozwiązać równanie $tx' + x = 0$.

11.06 Rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego $tx' + x = 0$, $x(0) = 0$.

11.07 Rozwiązać równanie $tx' - x = 0$.

11.08 Rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego $tx' - x = 0$, $x(0) = 0$.

11.09 Rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego $x' + tx = 0$, $x(0) = 1$.

11.10 Rozwiązać równanie $x' + t\sin x = 0$.

11.11 Rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego $x' + t\sin x = 0$, $x(0) = \pi$.

11.12 Rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego $(t^2 - 1)x' + 2tx^2 = 0$, $x(0) = 1$.

11.13 Rozwiązać równanie $2t^2xx' + x^2 = 2$.

11.14 Rozwiązać równanie $x' - tx^2 = 2tx$.

11.15 Rozwiązać równanie $x' = \cos(t - x)$. Można ewentualnie podstawić $y = x - t$.

11.16 Rozwiązać równanie $x' = \sqrt{4t + 2x - 1}$. Tu też można coś podstawić, ale co?

11.17 Rozwiązać równanie $(t + 1)x' + tx = 0$.

11.18 Rozwiązać równanie $tx'x = \sqrt{1 + x^2}$.

11.19 Rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego $tx' + x = x^2$, $x(1) = \frac{1}{2}$.

11.20 Rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego $x'\cos t + x\sin t = 2\sin t$, $x(0) = -1$.

11.21 Rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego $x'\cos t + x\sin t = 2\sin t$, $x(0) = 2$.

11.22 Rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego $x' - x = 3t - 3$, $x(0) = 0$.

11.23 Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $x'(t) = \sin t \cdot x(t)^2$ i takie rozwiązanie x, że $x(0) = 0$.

11.24 Duży garnek świeżo ugotowanej zupy o temperaturze $100°C$ chłodzony jest w bieżącej wodzie o temperaturze $5°C$; zupa jest mieszana, więc można przyjąć, że jej temperatura jest taka sama we wszystkich punktach garnka. W ciągu 10 minut temperatura zupy obniżona została do $60°C$. W jakim czasie garnek ostygnie do temperatury $20°C$?

Wiadomo, że obowiązuje prawo stygnięcia, które sfromułował Newton:
,, *szybkość zmniejszania się temperatury układu jest proporcjonalna do różnicy temperatur pomiędzy układem a otoczeniem*".

11.25 Łódka porusza się w wodzie bez napędu (została rozpędzona wcześniej). Opór wody jest proporcjonalny do prędkości (chwilowej) łódki. W pewnej chwili prędkość łódki była równa 1,5 m/s, a po następnych 4 s już tylko 1 m/s.
Po jakim czasie prędkość łódki zmniejszy się do 4 cm/s?

11.26 Znaleźć rozwiązanie równania różniczkowego $x(t)x'(t) + t = 1$ spełniające warunek początkowy $x(1) = 4$. Podać dziedzinę tego rozwiązania.

11. 27 Znaleźć rozwiązanie równania różniczkowego $x(t)x'(t) + t = 1$ spełniające warunek początkowy $x(1) = 0$. Podać dziedzinę tego rozwiązania.

11. 28 Funkcja $t^2 \cdot \cos t$ jest rozwiązaniem jednego, dwóch a może nawet trzech równań wypisanych niżej:

$$x^{(3)}(t) + 3x'(t) = 0\,,$$
$$x^{(3)}(t) + 3x'(t) = -6\sin t - 2t^2 \sin t\,,$$
$$x^{(3)}(t) + 3x'(t) = -6\cos t - 2t^2 \cos t\,.$$

Których? Odpowiedź należy dokładnie uzasadnić!

11. 29 Znaleźć rozwiązanie równania różniczkowego $x'(t) - \frac{t}{1+t^2}x(t) = \frac{t}{1+t^2}$ spełniające warunek początkowy $x(0) = 0$.

11. 30 Znaleźć wszystkie dodatnie, niemalejące funkcje wypukłe $f\colon (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$, które mają następującą własność: *styczna do wykresu w punkcie* $(x, f(x))$ *dzieli na połowy pole pod wykresem funkcji ograniczonej do przedziału* $(0,x)$, *czyli pole zbioru* $\{(t,y)\colon \quad 0 < t < x \ \text{ oraz } \ 0 < y < f(t)\}$.

11. 31 Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $tx'(t) + x = \cos t$.

Znaleźć takie rozwiązanie równania $tx'(t) + x = \cos t$, że $x(0) = 1$.

11. 32 Niech $f\colon (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ oznacza funkcję różniczkowalną, której pochodna jest dodatnia w każdym punkcie półprostej $(0,\infty)$ i to taką, że styczna do jej wykresu w dowolnym punkcie $(x, f(x))$, $x > 0$, przecina dodatnią półoś OX w pewnym punkcie $P(x)$ leżącym między punktami $(0,0)$ i $(x,0)$. Niech $G_f(x) = \{(t,y)\colon \quad 0 < t < x \ \text{ i } \ 0 < y < f(t)\}$, będzie „obszarem pod wykresem funkcji f ograniczonej do dziedziny $(0,x)$”.

Napisać wzór na pole obszaru $G_f(x)$.

Znaleźć funkcję f wiedząc, że pole trójkąta o wierzchołkach $(x,0)$, $\big(x, f(x)\big)$ i $P(x)$ stanowi $\frac{3}{5}$ pola obszaru $G_f(x)$.

11. 33 Temperatura ciała zmniejszyła się w ciągu 10 minut ze $100°C$ do $60°C$. Temperatura powietrza równa jest $20°C$. Zgodnie z prawem stygnięcia (Newtona): szybkość zmniejszania się temperatury stygnącego ciała jest proporcjonalna do różnicy temperatur ciała i otoczenia. Po jakim czasie temperatura ciała będzie równa $25°C$?