Funkcja wykładnicza, logarytmy, kosinus i sinus

Podstawowe oznaczenia

$\mathbb{R}$ — zbiór wszystkich liczb rzeczywistych

$\mathbb{N}$ — zbiór wszystkich liczb naturalnych, tj. liczb $0, 1, 2, 3, \ldots$; $\mathbb{N}_*$ zbiór wszystkich liczb naturalnych *dodatnich*, tj. liczb $1, 2, \ldots$

$\mathbb{Z}$ — zbiór wszystkich liczb całkowitych, tj. liczb $0, -1, 1, -2, 2, \ldots$

$\mathbb{Q}$ — zbiór wszystkich liczb wymiernych, tj. takich, które można zapisać w postaci ilorazu dwu liczb całkowitych.

$[a, b]$ — przedział domknięty, tzn. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}: \quad a \le x \le b\}$, czyli $[a, b]$ to zbiór złożony z tych wszystkich liczb rzeczywistych, które są jednocześnie większe lub równe a i mniejsze lub równe b.

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}: \quad a \le x < b\}$ — przedział domknięto–otwarty.

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}: \quad a < x < b\}$ — przedział otwarty.

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}: \quad a < x \le b\}$ — przedział otwarto–domknięty.

∞ lub $+\infty$ — ten symbol oznacza nieskończoność, to nie liczba, ale dodatkowy symbol.

$-\infty$ — ten symbol oznacza minus nieskończoność, to nie liczba, ale dodatkowy symbol.

Przyjmujemy, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzą wzory

$-\infty < x < \infty$;

$x + \infty = \infty$; $\infty - x = \infty$; $x - \infty = -\infty$; $-\infty - x = -\infty$; $\infty + \infty = \infty$;

$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$; $\infty \cdot \infty = (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$; $\infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty$;

$x \cdot \infty = \infty$ oraz $x \cdot (-\infty) = -\infty$ jeśli $x > 0$;

$x \cdot \infty = -\infty$ oraz $x \cdot (-\infty) = \infty$ jeśli $x < 0$;

$\frac{x}{\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0$;

$x^\infty = \infty$ oraz $x^{-\infty} = 0$ jeśli $x > 1$;

$x^\infty = 0$ oraz $x^{-\infty} = \infty$, jeśli $0 < x < 1$,.

Innych działań z udziałem symboli nieskończonych nie definiujemy, bo jak się później okaże nie miałoby to sensu, np. **nie** definiujemy $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, 1^∞, $\infty - \infty$, 0^0.

Końcem przedziału może być symbol nieskończony. Jeśli jeden z końców jest nieskończony, to przedział nazywany jest półprostą; jeśli oba końce są nieskończone — prostą.

Uwaga 1.1 Niektóre z oznaczeń odbiegają od stosowanych w polskich liceach, ale nie mamy wyjścia, musimy stosować oznaczenie przyjęte na całym świecie, bo na ich stosowanie poza szkołami w RP (nr 3,4, ...) polscy specjaliści od dydaktyki wpływu nie mają, więc świat się do nich nie dostosuje, a nauka jest międzynarodowa. ■

Przypomnijmy teraz, że jeśli $n \geq 2$ jest liczbą naturalną parzystą, $x \in \mathbb{R}$ jest liczbą nieujemną, to istnieje dokładnie jedna liczba nieujemna $y \in \mathbb{R}$ taka, że $y^n = x$. Nazywamy ją pierwiastkiem stopnia n z liczby x i oznaczamy symbolem $\sqrt[n]{x}$. Jeśli $n \geq 1$ jest liczbą naturalną nieparzystą, to dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$ istnieje dokładnie jedna liczba rzeczywista y taka, że $x = y^n$. Nazywamy ją pierwiastkiem stopnia n z liczby x i oznaczamy symbolem $\sqrt[n]{x}$. Jeśli stopień pierwiastka równy jest 2, to piszemy $\sqrt{x}$, zamiast $\sqrt[2]{x}$. Np. $\sqrt{196} = 14$, $\sqrt[5]{-32} = -2$ itd. Definiujemy potęgę o wykładniku wymiernym w następujący sposób $a^{k/l} = \sqrt[l]{a^k}$. Bez trudu sprawdzić można, że jeśli $a > 0$, to dla dowolnych liczb wymiernych u, v zachodzi równość $a^{u+v} = a^u a^v$. Przyjmujemy, że $a^0 = 1$ dla dowolnej liczby $a \neq 0$.

Jeśli $a > 1$ i $u > v$, to $a^u > a^v$.

Jeśli natomiast $0 < a < 1$ i $u > v$, to $a^u < a^v$.

Jeśli $a > 0$, to definiujemy potęgę o wykładniku rzeczywistym. Opiszemy jak to można zrobić. Dla ustalenia uwagi zakładać będziemy w dalszym ciągu, że $a > 1$. Zauważmy po pierwsze, że dla dowolnej liczby $b > 1$ zachodzi nierówność $\sqrt{b} < \frac{1+b}{2}$, bo $1 + b - 2\sqrt{b} = (1 - \sqrt{b})^2 > 0$. Stąd wynika, że $\sqrt[4]{b} < \frac{1+\sqrt{b}}{2} < \frac{1+\frac{1+b}{2}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{b}{4}$. Analogicznie $\sqrt[8]{b} < \frac{1+\sqrt[4]{b}}{2} < \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{b}{4}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{b}{8}$. Kontynuując dochodzimy do nierówności

$$\sqrt[2^n]{b} < \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \cdots + \tfrac{1}{2^n} + \tfrac{b}{2^n} = 1 + \tfrac{b-1}{2^n}.$$

Widzimy więc, że jeśli $u < x < v$ i $v - u < \frac{1}{2^n}$ dla pewnej liczby naturalnej $n > 1$, $u, v \in \mathbb{Q}$, to $0 < a^v - a^u = a^u\big(a^{v-u} - 1\big) < a^u\big(a^{1/2^n} - 1\big) = a^u\big(\sqrt[2^n]{a} - 1\big) < a^u \cdot \frac{a-1}{2^n}$. Jeśli ustalimy liczbę $x \in \mathbb{R}$ i wybierzemy liczbę naturalną $k > x + 1$, to otrzymamy nierówność $0 < a^v - a^u < a^u \cdot \frac{a-1}{2^n} < a^k \cdot \frac{a-1}{2^n}$. Wynika z niej, że jeśli $\varepsilon > 0$, to można znaleźć liczbę naturalną m taką, że $a^k \cdot \frac{a-1}{2^m} < \varepsilon$. Jeśli $n \geq m$ oraz $u < x < v$ i $v - u < \frac{1}{2^n}$, to $0 < a^v - a^u < a^u \cdot \frac{a-1}{2^n} < a^k \cdot \frac{a-1}{2^n} \leq a^k \cdot \frac{a-1}{2^m} < \varepsilon$. Przed zdefiniowaniem potęgi o wykładniku niewymiernym sformułujemy jedno twierdzenie, którego dowodu podawać nie będziemy.

Lemat 1.2 (o przedziałach zstępujących)
Jeśli $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \supseteq \ldots$, to istnieje liczba x taka, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $a_n \leq x \leq b_n$.* ■

*Innymi słowy: istnieje punkt należących do wszystkich przedziałów.

Dowodu nie możemy podać, bo jest on zbyt bliski podstawom teorii liczb rzeczywistych, których w ogóle nie omawiamy. Stwierdzić jednak wypada, że chodzi w tym lemacie wyraźnie o przedziały domknięte. Przykładowo $(0,1] \supset (0,\frac{1}{2}] \supset (0,\frac{1}{3}] \supset \ldots$, ale częścią wspólną wszystkich przedziałów $(0,1], (0,\frac{1}{2}], (0,\frac{1}{3}], \ldots$ jest zbiór pusty. Przedziały domknięte $[0,1]$, $[0,\frac{1}{2}]$, $[0,\frac{1}{3}]$, $[0,\frac{1}{4}], \ldots$ mają dokładnie jeden wspólny element: 0.

Twierdzenie 1.3 (o istnieniu potęgi o wykładniku rzeczywistym)
Niech $a, x \in \mathbb{R}$, $a > 1$. Istnieje wtedy dokładnie jedna liczba rzeczywista y taka, że jeśli $u < x < v$, $u, v \in \mathbb{Q}$, to $a^u < y < a^v$.

Dowód. Niech $u_1, u_2, \ldots,\ v_1, v_2, \ldots$ będą liczbami wymiernymi takimi, że

$$-\tfrac{1}{2^{n+1}} + x < u_n < u_{n+1} < x < v_{n+1} < v_n < \tfrac{1}{2^{n+1}} + x \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Mamy zatem $a^{u_n} < a^{u_{n+1}} < a^{v_{n+1}} < a^{v_n} \leq a^{v_1}$. Wobec tego

$$[a^{u_1}, b^{v_1}] \supset [a^{u_2}, b^{v_2}] \supset [a^{u_3}, b^{v_3}] \supset \ldots$$

Istnieje więc liczba y, która jest elementem każdego przedziału $[a^{u_n}, b^{v_n}]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Ponieważ $0 < v_n - u_n < \frac{1}{2^n}$, więc $0 < a^{v_n} - a^{u_n} < a^{v_1} \cdot \frac{a-1}{2^n}$. Załóżmy, że dla każdego $n = 1, 2, 3, \ldots$ zachodzi nierówność $a^{u_n} < y < z < a^{v_n}$, tzn. zakładamy, że liczby y, z są elementami wspólnymi wszystkich rozpatrywanych przedziałów, przy czym $y < z$. Wtedy dla każdej liczby $n = 1, 2, 3, \ldots$ mamy $0 < z - y < a^{v_1} \cdot \frac{a-1}{2^n}$, co nie jest możliwe, bo po odpowiednim wybraniu n otrzymujemy nierówność

$$z - y > a^{v_1} \cdot \tfrac{a-1}{2^n},$$

przeciwną do poprzedniej. Dowód został zakończony. ■

Teraz możemy podać definicję potęgi o dowolnym wykładniku i dowolnej dodatniej podstawie.

Definicja 1.4 (potęgi o wykładniku dowolnym)
Jeśli $a > 1$, $x \in \mathbb{R}$, to a^x jest jedyną liczbą taką, że dla każdej pary liczb wymiernych u, v takich, że $u < x < y$ zachodzi nierówność $a^u < a^x < a^y$. Jeśli $0 < a < 1$, $x \in \mathbb{R}$, to $a^x = (\frac{1}{a})^{-x}$. ■

Na potęgi o dowolnym wykładniku przenoszą się własności potęgowania, o których wspominaliśmy w kontekście wykładników wymiernych i dodatniej podstawy. Prócz tego dochodzą nowe.

Twierdzenie 1.5 (o własnościach funkcji wykładniczej)
Jeśli $a > 0$, to

0. dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $1^x = 1$;
1. dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi $a^{x+y} = a^x a^y$;
2. dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$;
3. $a^0 = 1$, $a^1 = a$;
4. dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$;
5. dla dowolnej liczby $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$;
6. dla dowolnych $b, x \in \mathbb{R}$, $b > 0$ zachodzi $(ab)^x = a^x b^x$;
7. jeśli $a > 1$, $x, y \in \mathbb{R}$ i $x < y$, to $a^x < a^y$ (funkcja wykładnicza o podstawie większej niż 1 jest ściśle rosnąca);
8. jeśli $0 < a < 1$, $x, y \in \mathbb{R}$ i $x < y$, to $a^x > a^y$ (funkcja wykładnicza o podstawie dodatniej, mniejszej niż 1 jest ściśle malejąca);
9. dla każdej liczby rzeczywistej $y > 0$ i dla każdej liczby dodatniej $a \neq 1$ istnieje dokładnie jedna liczba rzeczywista x taka, że $y = a^x$. ■

Dowód tego twierdzenie pomijamy, większa jego część powinna być znana ze szkoły. Niektóre własności funkcji wykładniczej wymienione w twierdzeniu są łatwe do uzasadnienia lub wynikają łatwo z pozostałych umieszczonych na tej liście, dowody innych wymagają pewnej pracy.

Definicja 1.6 (logarytmu)
Logarytmem liczby $y > 0$ przy podstawie $a > 0, a \neq 1$ nazywamy taką liczbę $x \in \mathbb{R}$, że $y = a^x$. Piszemy $x = \log_a y$. ■

Z twierdzenia o własnościach funkcji wykładniczej, punkt 9 wynika, że ta definicja ma sens, tzn. każda liczba dodatnia ma logarytm przy dowolnej podstawie dodatniej, różnej od 1. Zachodzi więc równość $a^{\log_a x} = x$ przy założeniu: $0 < a \neq 1,\ x > 0$.

Przypomnijmy, że funkcja wykładnicza o podstawie a to funkcja przypisująca liczbie x liczbę a^x. Argumentem jest w tym przypadku wykładnik potęgi, a wartością potęga.

Funkcja logarytmiczna o podstawie a to funkcja odwrotna do funkcji wykładniczej o podstawie a, czyli funkcja, która liczbie y przypisuje wartość wykładnika x w taki sposób, że podstawa podniesiona do potęgi x daje liczbę logarytmowaną y. Zapiszemy to wzorem

$$y = a^{\log_a y} .$$

Funkcją potęgową o wykładniku α nazywamy funkcję, która liczbie $x>0$ przypisuje liczbę x^{α}.

Logarytmów liczb ujemnych nie definiujemy, bo nie są nam potrzebne i nie można ich dobrze zdefiniować w zbiorze liczb rzeczywistych. Sytuacja ulegnie pewnej zmianie po rozszerzeniu naszego zapasu liczb (tzn. gdy zaczniemy zajmować się liczbami zespolonymi). Wtedy będziemy w stanie zdefiniować logarytmy liczb ujemnych i innych (ale nie logarytm 0), ale nie będziemy się tymi kwestiami intensywnie zajmować.

Przykład 1.1 $\log_2 8 = 3$, bo $2^3 = 8$;
$\log_{10} 10000 = 4$, bo $10^4 = 10000$;
$\log_{10} \frac{1}{10000} = -4$, bo $10^{-4} = \frac{1}{10000}$;
$\log_{10} \sqrt{10} = \frac{1}{2}$, bo $10^{1/2} = \sqrt{10}$;
$\log_{10} \frac{1}{\sqrt{1000}} = -\dfrac{3}{2}$, bo $10^{-3/2} = \sqrt{10^{-3}} = \frac{1}{\sqrt{1000}}$. ■

Ponieważ funkcja logarytmiczna jest funkcją odwrotną do wykładniczej, więc własnościom funkcji wykładniczej odpowiadają własności funkcji logarytmicznej.

Twierdzenie 1.7 (o własnościach funkcji logarytmicznej)
Jeśli $1 \neq a > 0$, to

1. dla dowolnych $x, y > 0$ zachodzi $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$;
2. dla dowolnych $x, y > 0$ zachodzi $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$;
3. $\log_a 1 = 0$ i $\log_a a = 1$;
4. dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0$ zachodzi $\log_a \left(x^y\right) = y \log_a x$;
5. dla dowolnej liczby $x > 0$ zachodzi $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$;
6. jeśli $b, x > 0$ i $1 \neq b$, to $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$, czyli $\log_b a \cdot \log_a x = \log_b x$;
7. jeśli $a > 1$, $x, y \in \mathbb{R}$ i $0 < x < y$, to $\log_a x < \log_a y$ (funkcja logarytmiczna o podstawie większej niż 1 jest ściśle rosnąca);
8. jeśli $0 < a < 1$, $x, y \in \mathbb{R}$ i $0 < x < y$, to $\log_a x > \log_a y$ (funkcja wykładnicza o podstawie dodatniej, mniejszej niż 1 jest ściśle malejąca);
9. dla każdej liczby rzeczywistej y i dla każdej liczby dodatniej $a \neq 1$ istnieje dokładnie jedna liczba rzeczywista x taka, że $y = \log_a x$. ■

Własność szósta to twierdzenie znane niektórym studentom ze szkoły pod nazwą: *twierdzenie o zmianie podstawy logarytmu.* Jest ono bezpośrednim wnioskiem z własności 4 funkcji wykładniczej. Wynika z niego, że znając logarytmy przy podstawie b można znaleźć logarytmy przy nowej podstawie a. Warto powiedzieć, że logarytmy zostały wynalezione przez astronomów, bo ludzie obserwujący niebo w nocy przeprowadzali wiele obliczeń, a w przeciwieństwie do obecnie żyjących nie mieli do dyspozycji urządzeń elektronicznych. Mnożenie liczb pochodzących z obserwacji było trudne (na ogół nie były to małe liczby naturalne), więc usiłowano zastąpić mnożenie znacznie mniej pracochłonnym dodawaniem. Początkowo używano do tego tablic trygonometrycznych i wzorów typu $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, a później stworzono tablice logarytmów* i używano własności 1: znajdowano logarytmy mnożonych liczb x, y w tablicach, sumowano je i za pomocą tablic znajdowano liczbę, której logarytmem była liczba $\log_a x + \log_a y$. Podobnie pierwiastkowano i podnoszono do potęgi $\big(\ln(x^y) = y\ln x\big)$. Tak było do początku lat osiemdziesiątych XX wieku, czyli do momentu, w którym komputery osobiste stały się powszechne. Dziś do „ręcznych" obliczeń logarytmy nie są używane, tym niemniej są, i zapewne będą, stosowane różne skale logarytmiczne.

W chemii używana jest wielkość pH, która jest równa minus logarytmowi (o podstawie 10) ze stężenia jonów wodorowych w roztworze, chemicy mówią *ujemny logarytm* ... mając na myśli liczbę przeciwną do logarytmu. W czystej wodzie stężenie jonów wodorowych wynosi około $0,0000001 = 10^{-7}$, zatem pH czystej wody jest równe 7. Chodzi o to, by operować mniejszymi liczbami, co w przypadku jednokrotnego użycia znaczenia nie ma, ale pH jest używane przez bardzo wielu ludzi wielokrotnie, więc prostota definicji ma duże znaczenie.

Innym przykładem jest np. skala Richtera trzęsień Ziemi: trzęsienie o jeden stopień silniejsze ma dziesięciokrotnie większą energię. Podobnie jest jest z natężeniem dźwięku, również w tym przypadku skala jest logarytmiczna. Podobnie skala jasności gwiazd.

Są one użyteczne, bo ich użycie „spłaszcza" skalę. Zilustrujemy to na przykładzie $\log_{10} 0,0000001 = -7$, $\log_{10} 0,000001 = -6$, $\log_{10} 0,00001 = -5$, $\log_{10} 0,0001 = -4$, $\log_{10} 0,001 = -3$, $\log_{10} 0,01 = -2$, $\log_{10} 0,1 = -1$, $\log_{10} 1 = 1$, $\log_{10} 10 = 1$, $\log_{10} 100 = 2$, $\log_{10} 1000 = 3$, $\log_{10} 10000 = 4$, $\log_{10} 100000 = 5$, $\log_{10} 1000000 = 6$, $\log_{10} 10000000 = 7$.

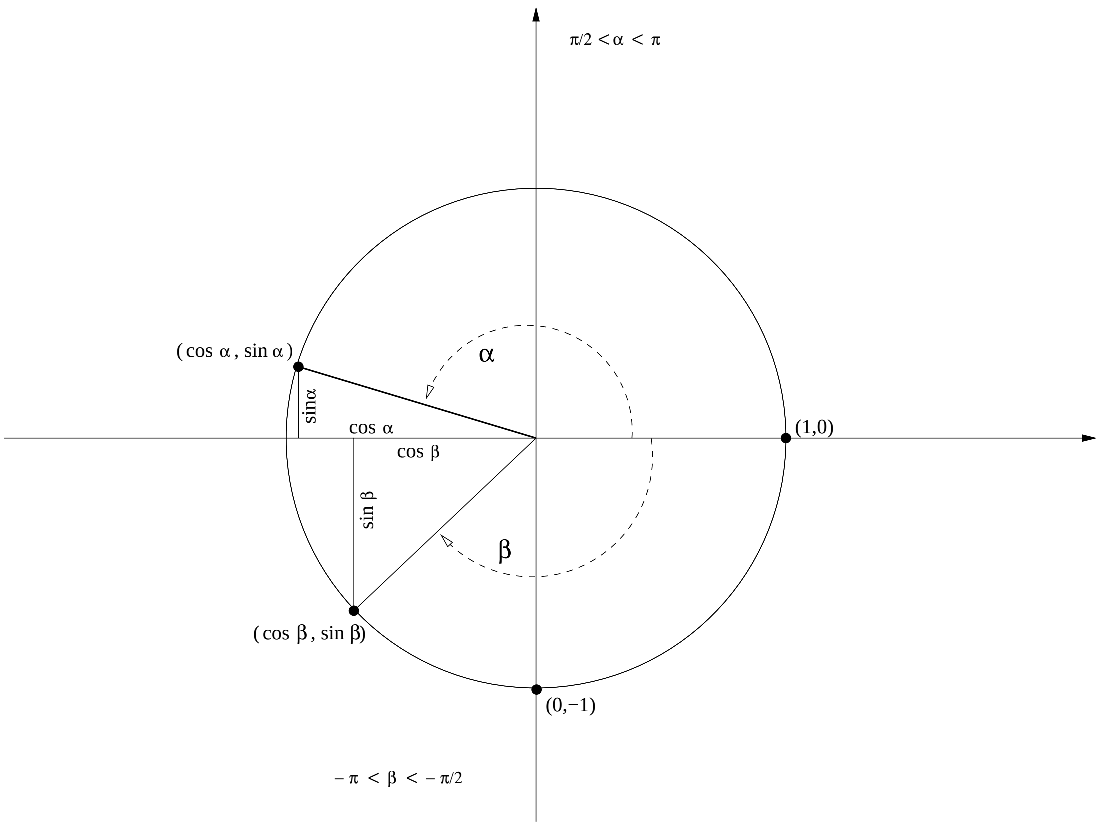
Chodzi o to, że trudno jest oglądać te zera w dużych ilościach, a czasem mamy do czynienia z wielkościami, które zmieniają się w szerokim zakresie. Wtedy wygodniej jest je zlogarytmować, bo wtedy łatwiej można się porozumiewać mówiąc lub pisząc o nich, zwłaszcza jeśli robimy, jak w podanych przykładach, stale.

* Tablice logarytmów stworzono w XVII wieku (J.Napier). Pierwszą podstawą była liczba $e \approx 2,7$, o której będzie mowa później, a po około 10 latach przeliczono (J.Briggs) logarytmy naturalne (czyli o podstawie e) na logarytmy o podstawie 10, czyli dziesiętne.

Funkcje trygonometryczne

Przypomnimy teraz znane niektórym studentom ze szkoły definicje funkcji trygonometrycznych. Rozpocznijmy od tego, że dosyć powszechnie stosowana jednostka miary kąta – stopień – jest dosyć sztuczna i nie wszędzie stosowana. Na statkach stosowano rumby (rumb to $\frac{1}{32}$ kąta pełnego), po 1789 r (Rewolucja we Francji) ustalono nowy system miar, kąty miały być mierzone w gradusach (kąt prosty miał mieć 100 gradusów), ta miara jest gdzieś stosowana do dziś, bo niektóre kalkulatory można „przestawić na gradusy".

W rozważaniach teoretycznych najważniejsza jednostka miary kąta to *radian*. Załóżmy, że rozważamy kąty o wierzchołku w początku układu współrzędnych, których pierwszym ramieniem jest dodatnia półoś pozioma, czyli zbiór wszystkich punktów postaci $(x, 0)$, gdzie $x \geq 0$. Kąty odmierzamy w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Kąt ma t radianów, jeśli drugie ramię przecina okrąg C o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu 1, w punkcie P takim, że długość łuku okręgu C zaczynającego się w punkcie $(1, 0)$ i kończącego się w punkcie P jest równa t.



Kąt prosty $90°$ ma więc miarę równą $\frac{1}{4}$ długości okręgu o promieniu 1, czyli $\frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \pi = \frac{\pi}{2}$. Kąt półpełny $(180°)$, równy dwóm kątom prostym, ma miarę $2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$. Kąt o mierze $-\frac{\pi}{2}$, to również kąt prosty, lecz odmierzony w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, tj. oparty na łuku o końcach $(1,0)$ i $(0,-1)$.

Rozważamy tu, jak widać, kąty zorientowane, tzn. wiadomo, które ramię jest pierwsze, a które — drugie, jeśli od pierwszego ramienia do drugiego poruszamy się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, to mówimy o kącie dodatnim, jeśli — w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara — o kącie ujemnym. Można mówić o kątach większych od pełnego, np. kąt o mierze $\frac{9\pi}{4}$ powstaje w wyniku przejścia w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara najpierw całego okręgu, a potem jeszcze $\frac{1}{8}$ okręgu; kąt o mierze $-\frac{5\pi}{2}$ to kąt odmierzony w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, najpierw obchodzimy cały okrąg, potem jeszcze ćwiartkę, cały czas w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara.

Załóżmy teraz, że odmierzyliśmy łuk o mierze t od punktu $(1,0)$ do punktu P. Wtedy współrzędnymi punktu P są $\cos t$ i $\sin t$ — to **DEFINICJA** kosinusa i sinusa kąta t, np. $\cos\frac{\pi}{2}=0$, $\sin\frac{\pi}{2}=1$, $\cos\frac{3\pi}{2}=0$, $\sin\frac{3\pi}{2}=-1$, $\cos\frac{-\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\frac{-\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Wiemy też, że $\operatorname{tg} t=\frac{\sin t}{\cos t}$, $\operatorname{ctg} t=\frac{\cos t}{\sin t}$.* Wprowadzane są również sekans i kosekans: $\sec t=\frac{1}{\cos t}$, $\csc t=\frac{1}{\sin t}$. My będziemy używać głównie funkcji kosinus, sinus i tangens.

Przypomnimy kilka podstawowych własności funkcji sinus i kosinus.

T1. Dla każdej liczby t zachodzi wzór $\sin^2 t+\cos^2 t=1$.

T2. Dla dowolnych liczb rzeczywistych t, s zachodzi wzór

$$\sin(s+t)=\sin s\cos t+\sin t\cos s\,.$$

T3. Dla dowolnych liczb rzeczywistych t, s zachodzi wzór

$$\cos(s+t)=\cos s\cos t-\sin s\sin t\,.$$

T4. Dla każdej liczby rzeczywistej t zachodzą wzory

$$\cos(-t)=\cos t \quad \text{i} \quad \sin(-t)=-\sin t$$

— wzory te wynikają z tego, że punkty $(\cos t,\sin t)$, $(\cos(-t),\sin(-t))$ leżą symetrycznie względem środka układu współrzędnych.

T5. Dla każdej liczby rzeczywistej t zachodzą wzory

$$\cos(t+\tfrac{\pi}{2})=-\sin t \quad \text{i} \quad \sin(t+\tfrac{\pi}{2})=\cos t$$

— te wzory wynikają natychmiast z tego, że przy obrocie o kąt $\frac{\pi}{2}$ wokół punktu $(0,0)$ punkt (x,y) przekształcany jest na punkt $(-y,x)$, można je też wyprowadzić z wzorów T2 i T3 korzystając z tego, że $\cos\frac{\pi}{2}=0$, $\sin\frac{\pi}{2}=1$.

* W niektórych krajach używane są skróty tan (tangens) i cot (kotangens)

T6. Dla każdej liczby rzeczywistej t zachodzą wzory

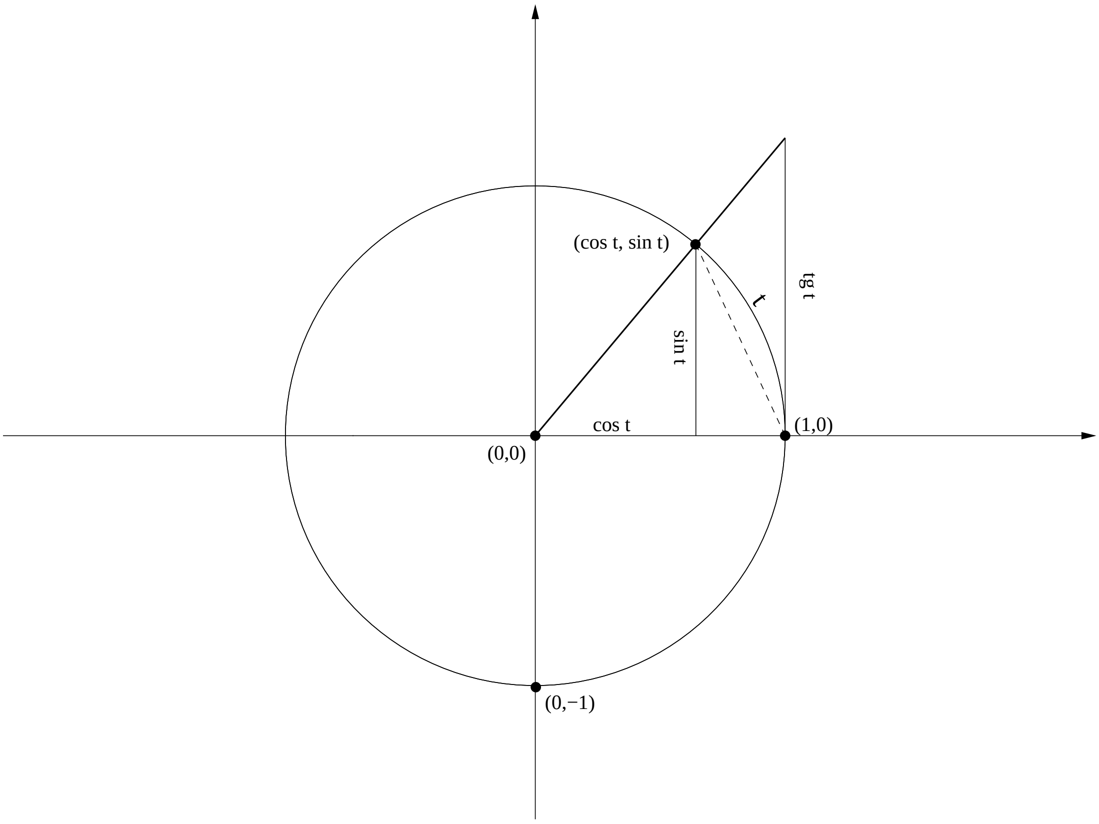
$$\cos(t+2\pi) = \cos t \text{ oraz } \sin(t+2\pi) = \sin t$$

— te wzory wynikają od razu z tego, że obrót o kąt 2π jest przekształceniem tożsamościowym: punkt (x,y) przekształcany jest na ten sam punkt (x,y); można też je wyprowadzić stosując czterokrotnie wzory T5.**

T7. Dla dowolnych liczb rzeczywistych s, t zachodzą wzory:

$$\sin s \pm \sin t = 2\sin\tfrac{s\pm t}{2}\cos\tfrac{s\mp t}{2}\,,$$
$$\cos s + \cos t = 2\cos\tfrac{s+t}{2}\cos\tfrac{s-t}{2}\,,$$
$$\cos s - \cos t = -2\sin\tfrac{s-t}{2}\sin\tfrac{s+t}{2}$$

— te cztery wzory wynikają łatwo z wzorów T2, T3 i T4.



T8. Jeżeli $0 < t < \frac{\pi}{2}$, to $0 < \sin t < t < \operatorname{tg} t$.

Podamy dowód tej nierówności. Niech $O=(0,0)$, $A=(1,0)$, $P=(\cos t,\sin t)$, $Q=(1,\operatorname{tg} t)$. Trójkąt POA jest zawarty w wycinku koła $\widehat{POA}$, a ten wycinek koła w trójkącie prostokątnym QOA . Wobec tego pole trójkąta POA jest mniej-

** Reszty wzorów redukcyjnych wypisywać nie będziemy, zachęcamy czytelników do wyprowadzania ich w razie potrzeby z rysunku, albo z wzorów T4, T5. Zapamiętywać ich nie ma potrzeby, bo wyprowadzenia są bardzo proste. Wątpliwej jakości utwory poetyckie mające ułatwić zapamiętywanie wzorów redukcyjnych powinny ulec szybkiemu zapomnieniu, pomimo rozpowszechniania ich przez tych autorów książek i nauczycieli, którzy są przekonani o tym, że uczniowie i studenci nie są w stanie przeprowadzać samodzielnie jednolinijkowych rozumowań.

sze niż pole wycinka kołowego $\widehat{POA}$, a to pole jest mniejsze od pola trójkąta QOA. Obliczając te pola za pomocą wzorów znanych ze szkoły podstawowej otrzymujemy nierówność podwójną $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \sin t < \frac{t}{2\pi}\cdot\pi\cdot 1^2 < \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \operatorname{tg} t$, która jest równoważna nierówności, którą dowodzimy. ■

Nierówność $\sin t < t$ zachodzi dla każdego *dodatniego* t, bo dla $t \geq \frac{\pi}{2}$ prawdziwa jest nierówność $t > 1 \geq \sin t$. Ponieważ $\sin(-t) = -\sin t$, więc dla $t \neq 0$ mamy $|\sin t| < |t|$. Wobec tego mamy $|\sin s - \sin t| = \left|2\sin\frac{s-t}{2}\cos\frac{s+t}{2}\right| \leq 2\cdot\left|\frac{s-t}{2}\right|\cdot 1 = |s-t|$ dla dowolnych liczb rzeczywistych $s,\ t$. Analogicznie dowodzimy, że $|\cos s - \cos t| \leq |s-t|$. Udowodniliśmy więc, że

T9. Dla dowolnych liczb rzeczywistych $s,\ t$ zachodzą nierówności

$$|\sin s - \sin t| \leq |s-t| \quad \text{oraz} \quad |\cos s - \cos t| \leq |s-t| \ . \blacksquare$$

T10. Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \sin t_n = \sin t$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} \cos t_n = \cos t$, czyli sinus i kosinus są funkcjami ciągłymi — dowód wynika z twierdzenia o trzech ciągach i własności T9. Definicja granicy ciągu pojawi się dopiero za jakiś czas. Intuicyjnie: jeśli f_n zbliża się do t, to $\sin t_n$ zbliża się do $\sin t$. ■

T11. Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$ i $t_n \neq 0$ dla każdego n, to $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin t_n}{t_n} = 1$.

Udowodnimy to stwierdzenie.* Ponieważ $\frac{\sin(-t)}{-t} = \frac{\sin t}{t}$, więc można zakładać, iż $t_n > 0$ dla każdego n. Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$, więc dla dostatecznie dużych n mamy $|t_n| < 1$, co w połączeniu z założeniem $t_n > 0$ daje $0 < t < 1$. Dla takich liczb t, dzięki własności T8, możemy napisać

$$t(1-t^2) < t(1-\sin^2 t) = t\cos^2 t < t\cos t < \sin t < t\,,$$

zatem $t - t^3 < \sin t < t$ i wobec tego $1 - t^2 < \frac{\sin t}{t} < 1$. Teraz własność T11 wynika z twierdzenia o trzech ciągach. Dowód został zakończony. ■

Podany wyżej dowód można nieco skrócić: z T8 wynika, że $\cos t_n < \frac{\sin t_n}{t_n} < 1$, a ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} \cos t_n = \cos 0 = 1$, więc teza wynika z twierdzenia o trzech ciągach. Podaliśmy dowód jedynie nieco wydłużony po to, by uzyskać konkretne oszacowanie błędu w często stosowanej równości przybliżonej $\sin t \approx t$ dla $t \approx 0$. To szacowanie nie jest najlepsze. Później będziemy w stanie łatwo wykazać, że $t - \frac{t^3}{6} < \sin t$ dla $t > 0$, ale to już niewiele zmieni. Jeśli np. $0 < t < 0{,}1$, to $0 < t - \sin t < t^3 < 0{,}01\cdot t$, wobec tego w tym przypadku błąd, który popełniamy zastępując liczbę $\sin t$ liczbą t jest mniejszy niż 1% liczby t (w rzeczywistości $< \frac{1}{6}\%$). Jest więc całkiem przyzwoitą dokładność, a pamiętać

*Z dowodem można zapoznać się pojawieniu się definicji granicy i własności granic.

należy, że kąty są tu wyrażane w radianach (0,1 radiana to ponad 5°), są to wielkości występujące w optyce, przy ruchu długiego wahadła matematycznego, czy też przy strzelaniach z armat do w miarę odległych celów .

W szkolnych podręcznikach do fizyki znajduje się twierdzenie mówiące, że okres wahań wahadła matematycznego jest niezależny od amplitudy. Mało kto zwraca uwagę na założenie: *amplituda musi być dostatecznie mała*, po to by równość przybliżona $\sin t \approx t$ dawała dobrą dokładność. Bez trudu każdy może stwierdzić, że jeśli zaczniemy wychylać wahadło daleko od dolnego pionowego położenia to okres wzrośnie w zauważalny sposób. Jeśli jednak rozważamy dostatecznie małe amplitudy, to wtedy różnice albo są niemierzalne, bo mniejsze od dokładności pomiaru, albo trudno mierzalne. Jest to kolejne ostrzeżenie dotyczące równości przybliżonych. Na ogół wolno je stosować w określonych zakresach — poza dopuszczalnym zakresem nie ma to na ogół sensu. Więcej powiemy o tym zjawisku w końcu drugiego semestru, gdy zajmiemy się równaniami różniczkowymi.

Trochę zadań do domu i na ćwiczenia

Niektórzy studenci mogą różnych rzeczy ze szkoły nie pamiętać z różnych przyczyn. Wiele poniższych zadań nie jest przeznaczonych na ćwiczenia. Umieszczone zostały po to, by studenci, którzy mają braki wiedzieli z czym muszą sobie umieć poradzić. Należy próbować rozwiązywać zadania „w domu", a jeśli się nie uda pytać na konsultacjach. Litera P oznacza zadanie powtórzeniowe, Litera L — zadanie związane z logarytmowaniem lib potęgowaniem, litera T — zadanie związane z trygonometrią.

P.1 Oblicz: a) 4% liczby 58, b) $3\frac{1}{2}\,\%$ liczby $30\frac{1}{4}$, c) 125% liczby 45, d) 104,5% liczby $25\,000$, e) 0,25% liczby 120, f) $a\,\%$ liczby b.

P.2 Bez wykonywania obliczeń wyjaśnić, która z dwu liczb jest większa

a) $15\frac{1}{2} + 16\frac{1}{3}$ czy $16\frac{1}{3} + 15\frac{1}{3}$ b) $-7\frac{2}{3} - 3\frac{2}{7}$ czy $-4\frac{1}{2} - 6\frac{2}{7}$

c) $25\frac{5}{6}\cdot 2$ czy $25\frac{3}{5}\cdot 2$ d) $\frac{31}{7} : (-\frac{1}{5})$ czy $\frac{13}{7} : (-\frac{1}{5})$

P.3 Wykonać obliczenia używając jedynie głowy własnej, kartki i ołówka (dwa ostatnie elementy nie są konieczne, kalkulatory oraz komputery są chwilowo zakazane)

a) $\dfrac{15\frac{13}{29}\cdot 3{,}625 + 28 : \frac{7}{15}}{\frac{20}{49}\cdot 9{,}8 + 0{,}625 : 0{,}175} : 0{,}048$

b) $\dfrac{(2{,}1 - 1{,}965) : (1{,}2\cdot 0{,}045)}{0{,}00325 : 0{,}013} - \dfrac{1 : \frac{1}{4}}{1\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{8}}$

c) $\left(\dfrac{1{,}4\cdot 0{,}15}{0{,}75 - 0{,}03 : \frac{5}{100}} - \big(0{,}0(6) + 1,1\big) : 1{,}1(6)\right) : \frac{85}{100} + 471\frac{9}{17}$

P.4 Znajdź:

a) liczbę, której 5% wynosi 14, b) liczbę, której 0,2% wynosi $1\frac{2}{5}$,

c) liczbę, której 128% wynosi 512, d) liczbę, której $p\,\%$ wynosi a.

P.5 Jakim procentem liczby a jest liczba b, gdy:

a) $a = 14$, $b = 112$; b) $a = 125$, $b = 50$; c) $a = 0{,}15$, $b = 0{,}75$.

P.6 Zmieszano 2 kg stopu o zawartości 25% miedzi i 3 kg stopu o zawartości 40% miedzi. Ile procent miedzi zawiera otrzymany stop?

P.7 Zmieszano a kg stopu o zawartości $p\,\%$ miedzi i b kg stopu o zawartości $q\,\%$ miedzi. Ile procent miedzi zawiera stop?

P.8 Cenę towaru obniżono o $p\,\%$. Towar ten kosztuje obecnie a zł. Ile kosztował ten towar przed obniżką?

P.9 Cenę towaru obniżono najpierw o 20%, a następnie nową cenę podwyższono o 20%. Czy końcowa cena jest równa początkowej?

P.10 Mleko zawiera (wagowo) 21% śmietany, ze śmietany uzyskuje się masło, którego waga równa jest 23% użytej śmietany. Ile kilogramów mleka trzeba zużyć by otrzymać 483 kilogramy masła?

P.11 Ile kilogramów wody należy dodać do 5 kilogramów 90–procentowego spirytusu, by otrzymać spirytus 60–procentowy?

P.12 W sadzie znajduje się 2860 drzew owocowych. Na każde 10 jabłoni przypadają 3 grusze i dwie śliwy. Liczba wiśni to $33\frac{1}{3}\%$ liczby jabłoni, grusz i śliw razem wziętych. Ile drzew każdego rodzaju rośnie w tym sadzie?

P.13 Oblicz wartość wyrażenia: $\frac{1+a+a^2}{1+a-a^2} + \frac{b^2+b+1}{b^2-b+1}$, jeśli $a = \frac{1}{3}$; $b = -\frac{1}{3}$.

P.14 Oblicz wartość wyrażenia: $\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{4xy}$, jeśli $x = 1{,}7$; $y = 0{,}7$.

P.15 Wykonaj działania:

a) $(2a^2b^3c)^6 \cdot (-ab^2c^2d)^4$, b) $(2xy^2)^2 \cdot (-3x^2y^4z^5)^3 : (-3x^2yz)^3$,

c) $(-3a^{m+n}b^{m-n}c) : (-1{,}5a^mb^{-n})$, d) $(8x^py^nz^n) : (-4x^{p-2}y^2z^{n-4})$.

P.16 Wykonaj działania:

a) $2{,}5x^2 - [0{,}6x^2 - (3{,}5x + x^2) - (x^2 + 3x)] + [0{,}1x^2 - (x^2 - 3{,}5x) + x^2]$,

b) $x - 1{,}4xy + 1{,}2y - \{1{,}6xy - [0{,}6y - (1{,}4x - 2{,}4xy)] - (1{,}4xy - 16y)\}$,

c) $2{,}6x - \{1{,}8y - [2{,}2x - (y - 0{,}6x) + 1{,}4y] - (1{,}6x - 0{,}2x)\}$,

d) $3x[5y - (7x - 4y)] - 8y[3x - (7y - 5x) + (6x - 11y)]$,

e) $x^2[4{,}8x^2 - 0{,}6y(1{,}6x - 1{,}4y)] - 1{,}2y^2[3{,}6x^2 - 1{,}6x(0{,}8x - 1{,}4y) + 2{,}4y^2]$,

f) $1\frac{1}{3}x[4\frac{1}{2}x - (3\frac{3}{4}y - 31\frac{1}{2})] - [13\frac{1}{3}x - (11\frac{3}{7} - 8\frac{1}{3}y)] \cdot 4\frac{1}{5}y$.

P.17 Wykonaj działania i zredukuj wszystko, co się da:

a) $-(3+x)^2+5(1-x)^2-3(1-x)(1+x)$,

b) $4(m+3n)^2+3(4m-n)^2-2(m+n)(m-n)$,

c) $-(2c+5d)(2c-5d)-6(2d-5c)^2+3(5c+2d)^2$,

d) $[(3x+y)^2-(x+3y)^2]\cdot 2xy$.

P.18 Uprość i oblicz wartość otrzymanego wyrażenia:

a) $3(m-1)^2+(m+2)(m^2-2m+4)-(m+1)^3 \quad dla\ m=-\frac{1}{3}$,

b) $(a-1)^3-4a(a+1)(a-1)+3(a-1)(a^2+a+1) \quad dla\ a=-2$,

P.19 Wykonaj działania i zredukuj wyrazy podobne:

a) $(a^2-3)^3-(a-2)(a^2+4)(a+2)$,

b) $(2a-3)^3-4a(2a+3)(2a-3)+(3-2a)^2$,

c) $(x^2-1)(x^4+x^2+1)-(x^2-1)^3$.

P.20 Dla jakich liczb (par liczb) prawdziwe są równości

a) $|x|+5=|x+5|$, b) $|x|\cdot|y|=|xy|$,

c) $|x|-|y|=0$, d) $|2x+1|=1$,

e) $|3-x|=4$, f) $|x|+|x+1|=3$.

P.21 Uprość wyrażenia

a) $x+|1-x|+2|x-2|$, gdy $1<x<2$, b) $|x|+|x+1|+|x-2|$, gdy $x<-1{,}3$

c) $|x-1|+\frac{x}{|x|}-|x+1|$, gdy $x<-2$.

P.22 Z definicji pierwiastka arytmetycznego wynika, że $\sqrt{x^2}=|x|$. Korzystając z tego wzoru uprość

a) $\sqrt{x^2}+x$, b) $\sqrt{(x-5)^2}+\sqrt{x^2}$,

c) $\sqrt{\frac{a^2}{b^2}}$ gdy $b\neq 0$, d) $\sqrt{x^2-6x+9}+x$.

P.23 Zapisz podane wyrażenia bez symbolu wartości bezwzględnej

a) $|m^2|$;b) $|m-n|$, gdy $m<n$;c) $|m-n|$, gdy $m>n$;d) $|-m|$, gdy $m<0$.

P.24 a) Jakie wartości przyjmuje wyrażenie $\frac{|x|}{x}$?

b) Wykazać, że $|a|=\max\{a,-a\}$.

c) Wykazać, że $\max\{a,b\}=\frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$.

d) Wykazać, że $\min\{a,b\}=\frac{1}{2}(a+b-|a-b|)$.

Definicja: $\max\{a,b\}$ *oznacza większą z liczb* a,b, *jeśli* $a=b$, *to* $\max\{a,b\}=a$.
Analogicznie $\min\{a,b\}$ *oznacza mniejszą z liczb* a,b.

P.25 Do jakiego przedziału liczbowego należy x, jeśli

a) $|x-3|=x-3$, b) $|x+2|=-x-2$, c) $|2x-6|=6-2x$, d) $\sqrt{(x-4)^2}=x-4$?

P.26 Wyłącz czynnik przed pierwiastek i przeprowadź redukcję

a) $3\sqrt{20}+5\sqrt{45}-2\sqrt{80}$, b) $0{,}5\sqrt{50}+0{,}8\sqrt{72}-0{,}2\sqrt{32}$,

c) $\sqrt{x^3}+\frac{1}{2}\sqrt{36x^3}-\frac{2x}{3}\sqrt{9x}$, gdy $x>0$, d) $(0{,}5\sqrt{24}-3\sqrt{40})-(\sqrt{150}+\sqrt{54}-\sqrt{1000})$.

P.27 Wykonaj mnożenie

a) $(\sqrt{3}+2\sqrt{2})(2\sqrt{3}-\sqrt{2})$, b) $(3\sqrt{5}-2\sqrt{6})(2\sqrt{6}-\sqrt{5})$, c) $(a-\sqrt{b})(2a+2\sqrt{b})$.

P.28 Dane są liczby x i y. Znajdź $x-y$, $x+y$, xy i $\frac{x}{y}$. Otrzymane wyniki przedstaw w postaci $a+b\sqrt{c}$.

a) $x=3+2\sqrt{3}$, $y=2-3\sqrt{3}$; b) $x=2-\sqrt{2}$, $y=2+\sqrt{2}$;

c) $x=2-5\sqrt{7}$, $y=1-\sqrt{7}$; d) $x=\frac{2}{3}-\sqrt{3}$, $y=\sqrt{3}$.

P.29 Oblicz a z równań

a) $(a+2\sqrt{3})(3-\sqrt{3})=9+\sqrt{3}$; b) $(3-a\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=\sqrt{2}$;

c) $(2-\sqrt{5})(a+\sqrt{5})=1+\sqrt{5}$; d) $(13-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})=4+a\sqrt{5}$.

P.30 Wykaż, nie używając kalkulatora ani komputera, że $3{,}14<\sqrt{2}+\sqrt{3}<3{,}16$.

P.31 Rozwiązać równanie $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x-1}=2$.

P.32 Rozwiązać równanie $\sqrt{4x^2+9x+5}-\sqrt{2x^2+x-1}=\sqrt{x^2-1}$.

P.33 Rozwiązać równanie $\sqrt{1+x\sqrt{x^2+24}}=x+1$.

P.34 Rozwiązać równanie $\frac{5}{x-\sqrt{x^2-5}}-\frac{5}{x+\sqrt{x^2-5}}=4$.

P.35 Rozwiązać równanie $\sqrt{x^2-3x+5}+x^2=3x+7$.

P.36 Rozwiązać równanie $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}-6=0$.

P.37 Rozwiązać równanie $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$.

P.38 Rozwiązać równanie $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}+\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}=34$.

P.39 Rozwiązać równanie $\sqrt{1+3x}+2=3\sqrt[4]{1+3x}$.

P.40 Rozwiązać równanie $\frac{1}{x}+\frac{1}{3}=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{x}\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{2}{x^2}}}$.

P.41 Rozwiązać równanie $\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{8+x}=2\sqrt[3]{2}$.

P.42 Rozwiązać równanie $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+3}=0$.

P.43 Rozwiązać równanie $\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1$.

P.44 Rozwiązać równanie $\frac{x-1}{1+\sqrt{x}}=4-\frac{1-\sqrt{x}}{2}$.

P.45 Rozwiązać równanie $\sqrt{x+\sqrt{14x-49}}+\sqrt{x-\sqrt{14x-49}}=\sqrt{14}$.

P.46 Rozwiązać równanie $\frac{1}{1-\sqrt{1-x}}+\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{1-x}}$.

P.47 Rozwiązać równanie $\frac{1}{\sqrt{11-x}}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}=\frac{4}{3}$.

P.48 Rozwiązać równanie $\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}-\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

W zadaniach **50. — 52.** rozwiązać układy równań

P.49 $\begin{cases} \frac{\sqrt[3]{2x+y}}{y} + \frac{\sqrt[3]{2x+y}}{2x} = \frac{81}{182}; \\ \frac{\sqrt[3]{2x-y}}{y} - \frac{\sqrt[3]{2x-y}}{2x} = \frac{1}{182}. \end{cases}$

P.50 $\begin{cases} x^2 + x\sqrt[3]{xy^2} = 80; \\ y^2 + y\sqrt[3]{x^2y} = 5. \end{cases}$

P.51 $\begin{cases} \sqrt{\frac{2y-x}{x}} + \sqrt{\frac{x}{2y-x}} = \frac{34}{15}; \\ x(x-1) + y(y+1) - 2xy = 72. \end{cases}$

L.52 Znaleźć $\log 4$, $\log 5$, $\log 6$, $\log 8$, $\log 9$, $\log 15$ wiedząc, że $\log 2 \approx 0{,}30103$, $\log 3 \approx 0{,}47712$, $\log 7 \approx 0{,}84509$.

L.53 Znaleźć $\log 15$ wiedząc, że $\log 2 \approx 0{,}30103$ i $\log 3 \approx 0{,}47712$.

L.54 Uprościć $10 \cdot 100^{\frac{1}{2}\log 9 - \log 2}$.

L.55 Uprościć $15^{2\log_{15} 40}$.

L.56 Uprościć $7^{\log_{49} 5 - 1}$.

L.57 Uprościć $125^{\log_{25} 16}$.

L.58 Jaki warunek muszą spełniać liczby dodatnie a i b, by zachodziła równość $\frac{\log_c a}{\log_c b} = \frac{a}{b}$? Podać przykłady liczb a i b, dla których ta równość nie zachodzi.

L.59 Czy $\log_{10} 2 > 0{,}3$? Odpowiedź należy uzasadnić nie korzystając ani z tablic, ani z urządzeń elektronicznych.

L.60 Wykazać, że $\log_{10} 2 < \frac{1}{3}$ oraz $2\log_{10} 7 < 2 - \log_{10} 2$.

L.61 Wykazać (nie używając tablic, kalkulatorów, komputerów — kartka i pisadło wystarczą), że zachodzi nierówność $\log 2 + \log 9 + 2\log 11 < 7\log 3 < 3\log 13$.

L.62 Wykazać (nie używając tablic, kalkulatorów, komputerów — kartka i pisadło wystarczą), że zachodzi nierówność $2 + \log 5 + 3\log 7 < 11\log 3 < -1 + 6\log 11$.

L.63 Niech $a = \log_{10} 7$, $b = \log_{10} 5$. Wyrazić $\log_{10} 35$ oraz $\log_{10} 14$ za pomocą a i b.

Wykazać, że $2a < 1 + b$.

L.64 Wykazać, że $2 + 4\log_{10} 9 > 1 + 8\log_{10} 4 > \log_{10} 5 + 4\log_{10} 19$.

L.65 Wykazać, że: $\frac{1}{2} + 2\log 2 + \frac{3}{4}\log 81 < 3\log 7 < 3\log 3 + 7\log 2 - 1$.

L.66 Rozwiązać równanie $\log(64\sqrt[24]{2^{x^2-40x}}) = 0$.

L.67 Rozwiązać równanie $x^{\frac{\log x + 7}{4}} = 10^{\log x + 1}$.

L.68 Rozwiązać równanie $\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$.

L.69 Rozwiązać równanie $\log_x 7 + \log_{x^2} 7 = 6$.

L.70 Rozwiązać równanie $\log(x^3 + 8) - \log(x + 2) = 1$.

L.71 Rozwiązać równanie $2x^{\log x} + 3x^{-\log x} = 5$.

L.72 Rozwiązać równanie $x^{\log_5 x} = 625$.

L.73 Rozwiązać równanie $x^{\log_x 9} = 4x^2$.

L.74 Rozwiązać równanie $x^{\log x} = \frac{100}{x}$.

L.75 Rozwiązać równanie $\log_{15}(\log_4(\log_3 x)) = 0$.

L.76 Rozwiązać równanie $\log(3x + 4) + \log(x - 8) = 2$.

L.77 Rozwiązać równanie $2\log_3 3 + 4\log_{25} 7 = \log_5 x$.

L.78 Rozwiązać równanie $\log_{10}(x^2 - 3x + 2) = 1 - \log_{10}(x + 2)$.

L.79 Rozwiązać równanie

$$\log_{10}(x - 5) + \log_{10}(x - 2) + \tfrac{2}{5}\log_{10}(27 \cdot 9) = 4\log_{10}\sqrt{6} - \log_{10}(x - 6).$$

L.80 Rozwiązać równanie

$$\log_{10}(x - 5) + \log_{10}(x - 8) - \tfrac{1}{3}\log_{10} 8 = 1 + \tfrac{1}{2}\log_{10} 49 - \log_{10}(x + 4).$$

L.81 Rozwiązać równanie

$$\log_{10}(x - 2) + \log_{10}(x - 1) - 2\log_{10}\sqrt[4]{4} = \tfrac{1}{2}\log_{10} 36 - \log_{10}(x + 3).$$

L.82 Rozwiązać równanie

$$\log_{10}(x - 2) + \log_{10}(x + 2) - 2\log_{10} 2 = \tfrac{1}{3}\log_{10} 27 - \log_{10}(x + 5).$$

L.83 Rozwiązać równanie

$$\log_{10}(x + 3) + \log_{10}(x - 3) - \tfrac{5}{3}\log_{10} 8 = 4\log_{10}\sqrt{3} - \log_{10}(13 - x).$$

L.84 Rozwiązać równanie $\log_3(x^2 + 2) + \log_3(2x - 1) = 2 + \log_3 x$.

L.85 Wykazać, że: $\frac{1}{2} + 2\log 2 + \frac{3}{4}\log 81 < 3\log 7 < 3\log 3 + 7\log 2 - 1$.

L.86 Znaleźć nie używając tablic, kalkulatorów, komputerów (ani pomocy kolegów lub koleżanek)

$\log(\operatorname{tg} 1^\circ) + \log(\operatorname{tg} 2^\circ) + \log(\operatorname{tg} 3^\circ) + \ldots + \log(\operatorname{tg} 88^\circ) + \log(\operatorname{tg} 89^\circ)$.

L.87 Rozwiązać układy równań

a) $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 648; \\ 3^x \cdot 2^y = 432. \end{cases}$

b) $\begin{cases} 8^x = 10y; \\ 2^x = 5y. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^y = y^x; \\ x^3 = y^2. \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^{y+1} = 27; \\ x^{2y-5} = \frac{1}{3}. \end{cases}$

e) $\begin{cases} \log_2(x + y) - \log_3(x - y) = 1; \\ x^2 - y^2 = 2. \end{cases}$

f) $\begin{cases} \log_{xy}(x - y) = 1; \\ \log_{xy}(x + y) = 0. \end{cases}$

g) $\begin{cases} \frac{\log x + \log y}{\log(x+y)} = 1; \\ x^2 + y^2 = 8. \end{cases}$

h) $\begin{cases} \log(x^2 + y^2) - 1 = \log 13; \\ \log(x + y) - \log(x - y) = 3\log 2. \end{cases}$

i) $\begin{cases} xy = 40; \\ x^{\log y} = 4. \end{cases}$

j) $\begin{cases} \log_y x - \log_x y = \frac{8}{3}; \\ xy = 16. \end{cases}$

k) $\begin{cases} x^3 + y^2 = 33; \\ 3\log x + 2\log y = 2 + \log 2. \end{cases}$

l) $\begin{cases} 9 \cdot 5^x + 7 \cdot 2^{x+y} = 457; \\ 6 \cdot 5^x - 14 \cdot 2^{x+y} = -890. \end{cases}$

ł) $\begin{cases} 3^x - 2^y = 77; \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^{\frac{y}{2}} = 7. \end{cases}$ m) $\begin{cases} \frac{\log(x-y)-2\log 2}{1-\log(x+y)} = 1; \\ \frac{\log x - \log 3}{\log y - \log 7} = -1. \end{cases}$

n) $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2; \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2; \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2. \end{cases}$ o) $\begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0; \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0. \end{cases}$

T.88 Wyraź w radianach: $20°$, $45°$, $105°$, $150°$, $210°$, $270°$, $315°$, $330°$, $450°$, $570°$.

T.89 Wyraź w stopniach: $\frac{1}{6}\pi$ rad, $\frac{1}{3}\pi$ rad, $\frac{3}{4}\pi$ rad, $\frac{1}{12}\pi$ rad, $\frac{7}{12}\pi$ rad, $\frac{8}{9}\pi$ rad, $\frac{5}{18}\pi$ rad.

T.90 Wyraź 1 radian w (należy wesprzeć się np. kalkulatorem):

a) stopniach z dokładnością do $0{,}001°$, b) w stopniach i minutach z dokładnością do $1'$.

T.91 Wyraź w radianach (należy wesprzeć się np. kalkulatorem):

a) $1°$ z dokładnością do $0{,}001$ rad, b) $1'$ z dokładnością do $0{,}0001$ rad.

T.92 Określ (bez użycia tablic) znak różnicy:

a) $\sin 72° - \sin 80°$, b) $\cos 15° - \cos 16°$,
c) $\cos 300° - \cos 340°$, d) $\operatorname{tg} 35° - \sin 35°$,
e) $\sin 200° - \sin 100°$, f) $\cos 200° - \cos 20°$,
g) $\sin 100° - \sin 10°$, h) $\sin 400° - \sin 40°$.

T.93 Jaką liczbą (dodatnią, czy ujemną) jest:

a) $\sin 1$, b) $\sin 2$, c) $\sin 10$, d) $\cos 2$,
e) $\cos 15$, f) $\cos(-8)$, g) $\operatorname{tg} 1{,}5$, h) $\operatorname{tg}(-0,75)$,
i) $\operatorname{tg} 10$, j) $\operatorname{ctg} 5$, k) $\operatorname{ctg} 1{,}5$, l) $\operatorname{ctg} 2{,}5$?

T.94 Zbadaj, która z liczb w każdej z podanych par jest większa:

a) $\sin 1,\ \operatorname{tg} 1$, b) $\cos 1,\ \operatorname{ctg} 1$, c) $\sin 2,\ \cos 2$,
d) $\sin\frac{\pi}{4},\ \sin\frac{\pi}{3}$, e) $\operatorname{ctg}\frac{3}{4}\pi,\ \operatorname{tg}\frac{3}{4}\pi$, f) $\sin 5\pi,\ \cos 3\pi$.

T.95 Jaką liczbą (dodatnią czy ujemną) jest:

a) $\sin(\cos 1)$, b) $\cos(\sin 1)$, c) $\operatorname{ctg}(\cos 0{,}3)$,
d) $\operatorname{tg}(\sin 2{,}5)$, e) $\operatorname{tg}(\cos\frac{3}{4}\pi)$, f) $\cos(\operatorname{tg}\frac{3}{4}\pi)$?

T.96 Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α, jeżeli:

a) $\sin\alpha = \frac{15}{17}$ i $90° < \alpha < 180°$, b) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ i $270° < \alpha < 360°$,
c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{24}$ i $180° < \alpha < 270°$, d) $\sin\alpha = -\sqrt{0{,}2}$ i $180° < \alpha < 270°$,
e) $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{n}}{n+1}$ i $0° < \alpha < 90°$.

T.97 Sprawdź następujące tożsamości:

a) $(\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x)\cdot\operatorname{ctg}^2 x = \sin^2 x$, b) $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2$,

c) $(1+\cos x)(1-\cos x)=\sin^2 x\,,$ d) $\cos^2 x-\sin^2 x=1-2\sin^2 x\,,$

e) $\frac{1}{\cos x}-\cos x=\sin x\cdot \operatorname{tg} x\,,$ f) $\cos^4 x-\sin^4 x=\cos^2 x-\sin^2 x\,.$

Dla jakich x równości te nie zachodzą?

T.98 Sprawdź następujące tożsamości:

a) $1+\operatorname{ctg} x=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x}\,,$ b) $\cos^4 x+\sin^4 x=1-2\sin^2 x\cdot\cos^2 x\,,$

c) $(\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x)^2=\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}\,,$ d) $\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x=(\operatorname{tg} x-1)(\operatorname{ctg} x+1)\,,$

e) $\operatorname{ctg} x+\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{1}{\sin x}\,,$ f) $(1+\sin x)(\frac{1}{\cos x}-\operatorname{tg} x)=\cos x\,.$

T.99 Sprawdź następujące tożsamości:

a) $\frac{\sin x}{1+\cos x}+\frac{1+\cos x}{\sin x}=\frac{2}{\sin x}\,,$ b) $\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y}{\operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg} y}=\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y\,,$

c) $1-2\sin^2 x=\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}\,,$ d) $(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\cos x})(\sin x+\cos x)=\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x\,,$

e) $(\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x})(\sin x+\cos x)=2+\frac{1}{\sin x\cos x}\,.$

T.100 Wykaż, że jeśli $x=a\cos u$ i $y=b\sin u$, to $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2\,.$

T.101 Rozwiązać nierówność $8\sin^4 t-10\sin^2 t+3<0\,.$
Zilustrować jej rozwiązanie na okręgu $x^2+y^2=1\,.$

T.102 Rozwiązać nierówność $8\cos^4 t-10\cos^2 t+3<0\,.$
Zilustrować jej rozwiązanie na okręgu $x^2+y^2=1\,.$

T.103 Rozwiązać nierówność $16\sin^4 t-16\sin^2 t+3>0\,.$
Zilustrować jej rozwiązanie na okręgu $x^2+y^2=1\,.$

T.104 Rozwiązać nierówność $2\sin^4 t-5\sin^2 t+2>0\,.$
Zilustrować jej rozwiązanie na okręgu $x^2+y^2=1\,.$

T.105 Rozwiązać nierówność $3\operatorname{tg}^4 t-10\operatorname{tg}^2 t+3<0\,.$
Zilustrować jej rozwiązanie na okręgu $x^2+y^2=1\,.$

T.106 Rozwiązać nierówność $\cos^2 t>\cos^2(t+\frac{\pi}{3})\,.$ Zilustrować jej rozwiązanie na okręgu $x^2+y^2=1\,.$

T.107 Rozwiązać równanie $\operatorname{tg}(7t)+\operatorname{tg}(3t)=0\,.$ Zilustrować jej rozwiązanie na okręgu $x^2+y^2=1\,.$

T.108 Rozwiązać nierówność $\cos^4 t-4\cos^2 t\sin^2 t+3\sin^4 t>0\,.$ Zilustrować jej rozwiązanie na okręgu $x^2+y^2=1\,.$

T.109 Rozwiązać nierówność $4\cos^4 t-7\cos^2 t+3>0\,.$ Zilustrować jej rozwiązanie na okręgu $x^2+y^2=1\,.$

T.110 Rozwiązać nierówność: $\sin t>\sin(t+\frac{\pi}{3})\,.$ Zilustrować jej rozwiązanie na okręgu $x^2+y^2=1\,.$

T.111 Rozwiązać nierówność: $|\sin t|>\sin(t+\frac{\pi}{2})\,.$ Zilustrować jej rozwiązanie na okręgu $x^2+y^2=1\,.$