# Granica ciągu

Ostatnia aktualizacja 16 listopada 2017, godz. 9:21

W wielu sytuacjach rozpatrywane są tzw. ciągi liczbowe. Jeśli np. chcemy zdefiniować pole koła, to można rozważać np. wielokąty foremne wpisane w to koło o coraz większej liczbie boków i mówić, że pole koła jest liczbą, którą można przybliżać polami tych wielokątów, przy czym przybliżenie jest tym dokładniejsze im większa jest liczba boków wielokąta. Mamy tu więc do czynienia z ciągiem pól wielokątów wpisanych w dane koło, co oznacza, że liczbom naturalnym począwszy od $3$ przypisane zostały pewne liczby rzeczywiste. Te ostatnie nazywamy wyrazami ciągu i oznaczamy na ogół symbolem $a_n$ .

Inny przykład był rozważany przez Zenona (490-430 p.n.e) z Elei . Twierdził on mianowicie, że znany w starożytności biegacz Achilles nie jest w stanie dogonić żółwia. Rozważania te przedstawimy oczywiście używając współczesnego języka i stosując współczesne oznaczenia. Przyjmijmy na przykład, że początkowa odległość między Achillesem i żółwiem równa jest $100$ m. Dla prostoty przyjmiemy, że prędkość Achillesa jest dziesięciokrotnie większa niż prędkość uciekającego żółwia. W jakimś czasie Achilles przebiegnie $100$ m. W tym samym czasie żółw przesunie się o $10$ m, więc na razie przynajmniej nie zostanie złapany. Po $\frac{1}{10}$ tego czasu Achilles przebiegnie $10$ m, jednak znów nie dogoni żółwia, który oddali się o następny metr. Achilles przebiegnie metr, a żółw oddali się o $10$ cm itd. Proces ten można kontynuować. Prowadzi to do rozpatrywania coraz dłuższych odcinków przebytych przez Achillesa, czyli liczb: $100$ ; $110$ ; $111$ ; $111{,}1$ ; ... – czyli ciągu, którego wyraz o numerze $n$ jest dany za pomocą wzoru $a_n = 100 + 10 + 1 + \ldots + \dfrac{100}{10^{n-1}} = 111{,}1\ldots1$ – przy czym w zapisie dziesiętnym tej liczby występuje $n$ jedynek. Zenon po prostu nie potrafił zsumować nieskończenie wielu składników. Nie operował pojęciem *sumy nieskończonej*, nie umiano wtedy takiego pojęcia zdefiniować. Tego rodzaju problemy analizowano już wtedy, ale ścisłe definicje matematyczne pojawiły się dopiero w pierwszej połowie XIX wieku (Gauss, Cauchy, Bolzano). Oczywiście można łatwo odpowiedzieć na pytanie po przebiegnięciu jakiego dystansu Achilles złapie żółwia: $111,1\ldots = \dfrac{1000}{9}$. Na wszelki wypadek podamy formalne rozumowanie, które można było zastosować również w starożytności, jednak bez jawnego użycia pojęcia sumy nieskończonej, a więc omijając istotny problem matematyczno-filozoficzny.[*] Oznaczmy dystans przebyty przez żółwia do momentu zakończenia pogoni przez $x$. Achilles w tym samym czasie przebiegł odległość $10x$. Różnica tych wielkości to $9x = 100$. Stąd natychmiast wynika, że $x = \dfrac{100}{9}$, zatem $10x \underset{1}{=} \dfrac{1000}{9}$. Oczywiście problemem istotnym

[*] Były inne paradoksy związane z problemem dzielenia w nieskończoność na części, np. punkt nie ma długości, odcinek składa się z punktów i ma długość, poruszający się obiekt w nieskończenie krótkim czasie nie przebywa żadnej odległości, a jednak się porusza. Przekonamy się, że dzięki pojęciu granicy daje się w sensowny sposób mówić o tego rodzaju kwestiach nie dochodząc do pozornych sprzeczności.

było tu obliczenie tzw. granicy ciągu, czym zajmiemy się niebawem.

Rozważymy jeszcze inny przykład. Załóżmy, że mamy do czynienia z pewną ilością pierwiastka promieniotwórczego. Niech $m$ oznacza jego masę. Fizycy twierdzą, że ubytek masy pierwiastka promieniotwórczego jest proporcjonalny do czasu i masy substancji. Oznaczmy współczynnik proporcjonalności przez $\mu$ i zastanówmy się jaką ilość tego pierwiastka będziemy mieć po czasie $t$. Na tzw. ,,zdrowy rozum" masa w czasie $t$ powinna się zmniejszyć o $\mu \cdot t \cdot m$. Jednak substancja promieniuje bez przerwy. Moglibyśmy więc rozumować w ten sam sposób myśląc o czasie dwukrotnie krótszym, czyli $\frac{t}{2}$. Wtedy masa zmniejszyłaby się o $\mu \cdot \frac{t}{2} \cdot m$. Wobec tego po czasie $\frac{t}{2}$ masa byłaby równa $m - \mu \cdot \frac{t}{2} \cdot m = m\big(1 - \mu \cdot \frac{t}{2}\big)$. Ta masa zmniejszałaby się w dalszym ciągu zgodnie z tym samym prawem, więc po czasie $\frac{t}{2}$ masa pierwiastka byłaby równa $m\big(1 - \mu \cdot \frac{t}{2}\big) - \mu \cdot \frac{t}{2} m\big(1 - \mu \cdot \frac{t}{2}\big) = m\big(1 - \mu \cdot \frac{t}{2}\big)^2$. Mamy więc dwa wyniki $\big(1 - \mu \cdot \frac{t}{2}\big)^2 m$, jeśli czas ,,dzielimy " na pół oraz $\big(1 - \mu \cdot t\big)m$, jeśli ,,nie dzielimy". Te wyniki są różne, więc podany opis nie może być dobry. Na domiar złego, jeśli czas podzielimy nie na dwie równe części, to wynik będzie jeszcze inny: przy podziale $t = \frac{t}{3} + \frac{t}{3} + \frac{t}{3}$ wywnioskujemy, że po czasie $t$ masa równa jest $m\big(1 - \mu \cdot \frac{t}{3}\big)^3$, przy podziale $t = \frac{t}{4} + \frac{t}{4} + \frac{t}{4} + \frac{t}{4}$ wynik to $m\big(1 - \mu \cdot \frac{t}{4}\big)^4$. Oczywiście rezultat nie może zależeć od tego, w jaki sposób opisujemy zjawisko. Można więc przypuścić, że zacytowane prawo fizyki działa w przypadku dostatecznie krótkiego czasu z błędem mniejszym niż dokładność pomiaru. Matematyka obliguje to do zadania pytania: czy kolejne liczby $m\big(1 - \mu \cdot t\big)$, $m\big(1 - \mu \cdot \frac{t}{2}\big)^2$, $m\big(1 - \mu \cdot \frac{t}{3}\big)^3$, $m\big(1 - \mu \cdot \frac{t}{4}\big)^4$, ... przybliżają z coraz większą dokładnością pewną liczbę, która mogłaby być wtedy uważana za prawdziwy wynik?

Pytanie okazuje się tym ważniejsze, że do tego samego pytania prowadzi analiza oprocentowanego wkładu bankowego albo np. wydłużania się np. szyn kolejowych w wyniku wzrostu temperatury lub ich skracania się w wyniku spadku temperatury. To prawo fizyczne jest znane każdemu, kto był przytomny w czasie lekcji fizyki w szkole podstawowej lub gimnazjum. Jednak nieliczni uczniowie zauważają problem, który opisaliśmy wyżej. Stosowanie tego prawa w sposób opisany w podręcznikach szkolny prowadzi do różnych wyników w zależności od tego czy temperatura zmienia się np. o $20^\circ$, czy też o $10^\circ + 10^\circ$, co oczywiście nie może być prawdą, bowiem wzrost temperatury nie jest skokowy, lecz odbywa się stopniowo. Podsumujmy: opisane wyżej zagadnienia prowadzą do rozpatrywania ciągu o wyrazie $(1 + \frac{x}{n})^n$, w przypadku masy substancji promieniotwórczej $x = -\mu \cdot t$. Powyższe rozważania sugerują, że wzrost liczby naturalnej $n$ powinien powodować wzrost wyrażenia $(1 + \frac{x}{n})^n$ przynajmniej w przypadku $x \neq 0$. W istocie rzeczy łatwo można się przekonać o tym, że $n > -x$

wzrost taki ma miejsce, wykażemy to niebawem.

Innym rodzajem ciągu jest tzw. ciąg geometryczny: $a_n = a_0 q^n$, gdzie $a_0$ i $q$ są dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Liczba $q$ jest zwana ilorazem ciągu geometrycznego, bo w przypadku $q \neq 0$ jest równa ilorazowi dwóch kolejnych wyrazów ciągu. Do rozpatrywania tego ciągu prowadzą opisane poprzednio zagadnienia, jeśli nie zmniejszamy odcinków czasu lub temperatury Liczba ludzi w danym kraju w przypadku stałego przyrostu naturalnego zachowuje się jak ciąg geometryczny o ilorazie dosyć bliskim jedności — dodatni przyrost naturalny oznacza, że iloraz jest większy niż $1$ zaś ujemny przyrost naturalny — że iloraz jest mniejszy niż $1$.

Jeszcze innym rodzajem ciągu jest ciąg arytmetyczny: $a_n = a_0 + nd$, gdzie $a_0$ oraz $d$ oznaczają dowolne liczby rzeczywiste. Liczba $d$ zwana jest różnicą ciągu arytmetycznego, jest ona równa różnicy dwóch kolejnych wyrazów ciągu. Na przełomie XVIII i XIX wieku zaobserwowano, że ilość zboża zachowuje się jak wyraz ciągu arytmetycznego ($n$ jest numerem roku). Oczywiście tego rodzaju obserwacje są przybliżone, bowiem co jakiś czas zdarzają się powodzie, susze i wtedy proces wzrostu ulega zakłóceniu. Bywają też zakłócenia innego rodzaju, np. w XIX zauważono, że stosowanie saletry chilijskiej (nawozy azotowe) zwiększa w istotny sposób plony. Były też inne zakłócenia ,,naturalnego" tempa wzrostu ilości zbóż.

W książce ,,Liber Abaci" z 1202 r. autorstwa Leonarda z Pizy, zwanego Fibonaccim, znajduje się następujące zadanie: Ile par królików może być spłodzonych przez parę płodnych królików i jej potomstwo w ciągu roku, jeśli każda para daje w ciągu miesiąca żywot jednej parze, para staje się płodna po miesiącu, króliki nie zdychają w ciągu tego roku. Jasne jest, że po miesiącu mamy już dwie pary przy czym jedna z nich jest płodna, a druga jeszcze nie. Wobec tego po dwóch miesiącach żyją już trzy pary królików: dwie płodne, jedna jeszcze nie. Po trzech miesiącach żyje już pięć par królików: trzy płodne, dwie jeszcze nie. Po czterech miesiącach jest już $8 = 5 + 3$ par królików. Kontynuując to postępowanie stwierdzamy po niezbyt długim czasie, że po roku żyje już $377 = 233 + 144$ par królików. Naturalnym problemem jest: znaleźć wzór na liczbę $a_n$, jeśli $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ i $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ dla $n = 2, 3, 4, \ldots$. Wzór taki został znaleziony dopiero po kilkuset latach od napisania książki przez
Fibonacci'ego i wygląda tak:

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}}{\sqrt{5}}.$$

Dowód prawdziwości tego wzoru jest prosty i nie wykracza poza program liceum

— łatwa indukcja. Jednak ważniejsze jest pytanie, jak w ogóle można tego rodzaju hipotezę sformułować. Za kilka miesięcy stanie się jasne w jaki sposób do takiego dziwnego rezultatu można dojść.

Przejdziemy teraz do ścisłego zdefiniowania ciągu.

**Definicja 4.1 (ciągu)**
Ciągiem nazywamy dowolną funkcję określoną na zbiorze złożonym ze wszystkich tych liczb całkowitych, które są większe lub równe pewnej liczbie całkowitej $n_0$. Wartość tej funkcji punkcie n nazywamy $n$-tym wyrazem ciągu. ■

Stosujemy oznaczenie $(a_n)$ dla oznaczenia ciągu, którego $n$-tym wyrazem jest $a_n$. Rozpatrując wielokąty wpisane w okrąg zaczynamy od trójkąta, w tym przypadku najmniejszym numerem wyrazu ciągu jest liczba $n_0 = 3$ (zaczynamy więc od $a_3$). Rozważając ciągi postaci $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ zaczynamy od $n_0 = 1$, czyli od $a_1$. Rozpatrując ciąg arytmetyczny, geometryczny oraz ciąg Fibonacciego rozpoczęliśmy od $n_0 = 0$. Oczywiście można rozpoczynać numerację od dowolnej liczby całkowitej, również ujemnej. Terminy *ciąg arytmetyczny*, *ciąg geometryczny* używane będą nie tylko w przypadku ciągów rozpoczynających się od wyrazu $a_0$, również w tym przypadku $n_0$ może być dowolną liczbą całkowitą. Chodzi jedynie o to, by były prawdziwe równości $a_n = a_{n-1} + d$ lub — w przypadku ciągu geometrycznego — $a_n = a_{n-1} \cdot q$ dla wszystkich liczb całkowitych $n \geq n_0$. Zazwyczaj jednak numerację będziemy rozpoczynać od $0$ lub od $1$. Jeśli nie zaznaczymy tego wyraźnie, symbol $n$ oznaczać będzie liczbę całkowitą nieujemną, czyli *naturalną*.*

Rozpatrywanie ciągów nieskończonych wymaga precyzji. Wiele osób nie może pogodzić się z tym, że $1 = 0,9999\ldots = 0{,}9 + 0{,}09 + 0{,}009 + 0{,}0009 + \ldots$, bo wydaje im się, że prawa strona jest mniejsza, choć wiedzą jaka miałaby różnica lewej i prawej strony. Omówimy jeszcze jeden przykład, który w przekonaniu autora tekstu wyraźnie sugeruje konieczność dokładnego zdefiniowania pojęć, którymi się posługujemy i wyjaśnienia, co wolno, a czego nie wolno robić. Rozważmy sumę
$s = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}+\frac{1}{13}-\frac{1}{14}+\frac{1}{15}-\frac{1}{16}+\frac{1}{17}-\frac{1}{18}+\ldots$
W sumie występuje nieskończenie wiele składników. Jest jasne, że
$s = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}+\frac{1}{13}-\frac{1}{14}+\frac{1}{15}-\frac{1}{16}+\frac{1}{17}-\frac{1}{18}+\ldots =$
$=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{6})+(\frac{1}{7}-\frac{1}{8})+(\frac{1}{9}-\frac{1}{10})+(\frac{1}{11}-\frac{1}{12})+(\frac{1}{13}-\frac{1}{14})+(\frac{1}{15}-\frac{1}{16})+$
$+(\frac{1}{17}-\frac{1}{18})+\ldots > 1-\frac{1}{2}$, bo różnice w nawiasach są dodatnie. Podobnie można

* Część matematyków uważa, że liczby naturalne to $1$, $2$, ... Inni uważają, że zaczynać należy od $0$. W momencie pisania tego tekstu autor przychylił się do tej drugiej koncepcji: liczby naturalne służą przede wszystkim do ustalania liczby elementów danego zbioru skończonego, ponieważ rozważamy niejednokrotnie zbiór pusty, więc liczbę $0$ uważać będziemy za naturalną.

uzasadnić, że $s > (1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{3}-\frac{1}{4}) =: s_4$ lub $s > (1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{3}-\frac{1}{4}) + (\frac{1}{5}-\frac{1}{6}) + +(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}) + (\frac{1}{9}-\frac{1}{10}) =: s_{10}$. Rozpatrywaną sumę możemy też zapisać tak:
$s = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}+\frac{1}{13}-\frac{1}{14}+\frac{1}{15}-\frac{1}{16}+\frac{1}{17}-\frac{1}{18}+\ldots =$
$=1 + (-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}) + (-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}) + (-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}) + (-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}) + (-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}) + (-\frac{1}{12}+\frac{1}{13}) +$
$(-\frac{1}{14}+\frac{1}{15}) + +(-\frac{1}{16}+\frac{1}{17}) + (-\frac{1}{18}+\frac{1}{19}) + \ldots < 1 =: s_1$ — ostatnia nierówność wynika z tego, że sumy we wszystkich nawiasach są ujemne. Podobnie jak poprzednio możemy wykazać więcej: $s = 1 + (-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}) + (-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}) + (-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}) + (-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}) + (-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}) + +(-\frac{1}{12}+\frac{1}{13}) + (-\frac{1}{14}+\frac{1}{15}) + (-\frac{1}{16}+\frac{1}{17}) + (-\frac{1}{18}+\frac{1}{19}) + \ldots < 1 + (-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}) =: s_3$

Ogólnie, jeśli $s_n$ oznacza sumę pierwszych $n$ składników sumy nieskończonej $s$, to dla każdej liczby naturalnej $n$ zachodzi nierówność $s_{2n} < s < s_{2n+1}$. Jasne jest też, że istnieje tylko jedna taka liczba $\sigma$, że $s_{2n} < \sigma < s_{2n+1}$ dla wszystkich liczb naturalnych $n$. Poprzekształcamy jeszcze trochę:
$s = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}+\frac{1}{13}-\frac{1}{14}+\frac{1}{15}-\frac{1}{16}+\frac{1}{17}-\frac{1}{18}+\ldots =$
$=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\frac{1}{7}-\frac{1}{14}-\frac{1}{16}+\frac{1}{9}-\frac{1}{18}-\frac{1}{20}+\ldots =$
$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\frac{1}{14}-\frac{1}{16}+\frac{1}{18}-\frac{1}{20}+\ldots =$
$=\frac{1}{2}\big(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\ldots\big) = \frac{1}{2}s$ — zmieniliśmy kolejność składników nie pozbywając ani jednego, pogrupowaliśmy i w końcu, po wyłączeniu $\frac{1}{2}$ przed nawias, doprowadziliśmy do równości $s = \frac{1}{2}s$, która miałaby zachodzić pomimo tego, że $\frac{1}{2} < s < 1$. Widać więc, że jeśli chcemy operować sumami nieskończenie wielu składników, to musimy zdefiniować dokładnie pojęcia, np. sumy nieskończonej, a potem sformułować i udowodnić odpowiednie twierdzenia pozwalające na przekształcanie sum nieskończonych.

Kluczowym pojęciem jest granica ciągu – pojęcia zasygnalizowanego przy okazji omawiania paradoksu Zenona. Warto stwierdzić od razu, że w definicji pojawi się zdanie wielokrotnie złożone, a takie zdania osobom, które ich na co dzień nie używają mogą sprawiać kłopoty. Zresztą ludzie przez długi czas mówili o granicach nie podając precyzyjnej definicji, co prowadziło do różnych nieporozumień, ale podać definicję użyteczną i jednocześnie ścisłą, nie było łatwo.

**Definicja 4.2 (granicy ciągu)**

**a.** Liczba $g$ nazywana jest granicą ciągu $(a_n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej liczby dodatniej $\varepsilon > 0$ istnieje liczba całkowita $n_\varepsilon$, taka że jeśli $n > n_\varepsilon$, to $|a_n - g| < \varepsilon$.

**b.** $+\infty$ (czytaj: plus nieskończoność) jest granicą ciągu $(a_n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby rzeczywistej $M$ istnieje liczba całkowita $n_m$ taka, że jeśli $n > n_M$, to $a_n > M$.

**c.** $-\infty$ (czytaj: minus nieskończoność) jest granicą ciągu $(a_n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby rzeczywistej $M$ istnieje liczba całkowita $n_m$ taka, że jeśli $n > n_M$, to $a_n < M$.

**d.** Jeśli $g$ jest granicą ciągu $(a_n)$, skończoną lub nie, to piszemy $g = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ lub $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} g$. Można też pisać $a_n \to g$, gdy $n \to \infty$ lub krótko $a_n \to g$. Mówimy, że ciąg jest zbieżny, jeśli jego granica jest skończona. ■

Skomentujemy po pierwsze część **a**. Chodzi tam o to, że wyrazy ciągu, których numery są dostatecznie duże ($n > n_\varepsilon$) przybliżają granicę $g$ z dopuszczalną dokładnością ($|a_n - g| < \varepsilon$). Stwierdzimy tu wyraźnie, że przejście do następnego wyrazu nie musi zwiększyć dokładności przybliżenia, przeciwnie chwilowo może się ta dokładność zmniejszyć, dopiero *dostatecznie duży* wzrost numeru wyrazu musi zwiększyć dokładność przybliżenia (jeśli ciąg jest stały, np. $a_n = 33$ dla każdej liczby naturalnej $n$, to błąd jest zerowy zawsze, niezależnie od numeru wyrazu, więc dokładność nie może być poprawiona). O liczbie $\varepsilon$ myśleć należy jako o małej liczbie dodatniej (chodzi o to, że jeśli dla małego $\varepsilon$ umiemy wskazać moment, od którego błąd jest mniejszy niż $\varepsilon$, to od tego momentu nierówność jest również spełniona z większym $\varepsilon$ ). Pamiętajmy również o tym, że liczba $|x - y|$ może być traktowana jako odległość dwóch punktów prostej. Wobec tego nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$ oznacza, że punkt $a_n$ znajduje się w przedziale o długości $2\varepsilon$ i środku $g$. W szczególności ciąg, którego wszystkie wyrazy są takie same (lub nawet nie wszystkie, tylko wszystkie od pewnego momentu, tj. dla dostatecznie dużych n są identyczne), jest zbieżny, przy czym granicą takiego ciągu jest wspólna wartość jego wyrazów.

Często zamiast mówić *istnieje* $n_\varepsilon$, *takie że dla* $n > n_\varepsilon$ *zachodzi* ... będziemy mówić, że *dla dostatecznie dużych* $n$ *zachodzi* ... lub że *dla prawie wszystkich* $n$ *zachodzi* .... Tak więc *dla prawie wszystkich* $n$ ... oznacza *dla wszystkich , z wyjątkiem skończenie wielu* $n$ ....

Podobnie można interpretować część **b** definicji granicy. Tym razem wyraz ciągu, którego numer jest dostatecznie duży ($n > n_M$) powinien być *blisko* plus nieskończoności, więc ma być dużą liczbą dodatnią ($a_n > M$). Interpretację części **c** pozostawiamy czytelnikom – jest ona w pełni analogiczna do części **b**. Niektórzy autorzy używają terminu „ciąg jest rozbieżny do $+\infty$", a inni mówią, że „ciąg jest zbieżny do $+\infty$". My będziemy stosować raczej pierwszą terminologię.

**Przykład 4.1** $0 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}$ . Aby przekonać się o prawdziwości tej tezy wystarczy przyjąć, że $n_\varepsilon$ jest dowolną liczbą całkowitą większą niż $\frac{1}{\varepsilon}$. *Można* więc przyjąć np. $n_1 = 2$, $n_{1/2} = 3$, $n_{0,41} = 3$, ale można też powiększyć niektóre z tych liczb lub nawet wszystkie i przyjąć $n_1 = 10$, $n_{1/2} = 207$, $n_{0,41} = 3$. Mamy więc możliwość wyboru: liczbę $n_\varepsilon$ można zawsze zastąpić większą. ∎

**Przykład 4.2** $\frac{1}{2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+3}{4n-1}$. Wykażemy, że wzór ten jest prawdziwy. Bez trudu stwierdzamy, że nierówność $\left|\frac{1}{2} - \frac{2n+3}{4n-1}\right| = \left|\frac{-7}{2(4n-1)}\right| \le \frac{7}{6n}$ zachodzi dla dowolnej liczby całkowitej $n \ge 1$. *Wystarczy* więc, by $n_\varepsilon > \frac{7}{6\varepsilon}$. To zdanie oznacza , że dla tak dobranego $n_\varepsilon$ i $n > n_\varepsilon$ prawdziwa jest nierówność $\left|\frac{1}{2} - \frac{2n+3}{4n-1}\right| < \varepsilon$ — nie znaczy to jednak, że *tylko* dla tych liczb całkowitych $n$ nierówność ta ma miejsce! Nie musieliśmy rozwiązywać nierówności, choć w tym przypadku było to możliwe — wystarczyło udowodnić, że nierówność ma miejsce dla *wszystkich dostatecznie dużych* liczb naturalnych $n$. ∎

**Przykład 4.3** Jeśli $d > 0$, to $+\infty = \lim\limits_{n\to\infty}(a_0 + nd)$. Postaramy się wykazać, że równość ta ma miejsce. Jeśli $M$ jest dowolną liczbą rzeczywistą, $n_\varepsilon > \frac{M-a_0}{d}$ i $n > n_\varepsilon$, to $n > \frac{M-a_0}{d}$, zatem $a_n = a_0 + nd > M$, co dowodzi prawdziwości równości, którą dowodzimy. ∎

Wykażemy teraz bardzo użyteczną nierówność.

**Twierdzenie 4.3 (Nierówność Bernoulli'ego)**
Załóżmy, że $n$ jest liczbą całkowitą dodatnią zaś $a > -1$ liczbą rzeczywistą. Wtedy
$$(1+a)^n \ge 1 + na$$
przy czym równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 0$ lub gdy $n = 1$.

**Dowód.** Jeśli $n = 1$, to oczywiście niezależnie od wyboru liczby $a$ ma miejsce równość. Ponieważ $(1+a)^2 = 1 + 2a + a^2 \ge 1 + 2a$, przy czym równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy a=0, więc teza zachodzi dla $n = 2$ i wszystkich liczb rzeczywistych $a$ (nie tylko $a > -1$). Otrzymaną nierówność $(1+a)^2 \ge 1 + 2a$ możemy pomnożyć stronami przez liczbę dodatnią $(1+a)$ – tu korzystamy z założenia $a > -1$. W wyniku otrzymujemy $(1+a)^3 \ge (1+2a)(1+a) = 1 + 3a + 2a^2 \ge 1 + 3a$. Także w tym przypadku jest widoczne, że dla $a \ne 0$ otrzymujemy nierówność ostrą. Z tej nierówności w taki sam sposób jak poprzednio wynika, że
$$(1+a)^4 \ge (1+3a)(1+a) \ge 1 + 4a + 3a^2 \ge 1 + 4a\,.$$
Teraz w ten sam sposób wnioskujemy prawdziwość twierdzenia dla $n = 5$ i wszystkich $a > -1$, potem dla $n = 6$ itd. Ogólnie jeśli $(1+a)^n \ge 1 + na$ dla wszystkich liczb $a > -1$ przy ustalonej liczbie naturalnej $n$, to
$$(1+a)^{n+1} \ge (1+na)(1+a) = 1 + (n+1)a + na^2 \ge 1 + (n+1)a$$
i znów bez trudu stwierdzamy, że równość ma miejsce jedynie dla $a = 0$. Oczywiście

jest to łatwe rozumowanie indukcyjne, nazwy nie użyto wcześniej, by nie odstraszać tych, którzy jeszcze boją się indukcji. ■

**Twierdzenie 4.4 (Granica ciągu geometrycznego)**
Niech $a_n = q^n$. Ciąg ten ma granicę $0$, jeśli $|q| < 1$, ma granicę $1$, jeśli $q = 1$, ma granicę $+\infty$, jeśli $q > 1$. Jeśli $q \le -1$, to ciąg granicy nie ma.

**Dowód.** W przypadku $q = 0$ oraz $q = 1$ teza jest oczywista, bo ciąg jest stały (jego wyrazy nie zależą od numeru). Załóżmy teraz, że $0 < |q| < 1$. Niech $\varepsilon > 0$ będzie liczbą rzeczywistą. Jeśli $n_\varepsilon > \frac{\frac{1}{\varepsilon}-1}{\frac{1}{|q|}-1}$ jest liczbą całkowitą i $n > n_\varepsilon$, to♣

$$\frac{1}{|q|^n} = \left(1 + \left(\frac{1}{|q|} - 1\right)^n\right) \ge 1 + n\left(\frac{1}{|q|} - 1\right) > 1 + \frac{1}{\varepsilon} - 1 = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Z otrzymanej nierówności wynika, że dla $n > n_\varepsilon$ zachodzi $\frac{1}{|q|^n} > \frac{1}{\varepsilon}$, czyli $|q^n| < \varepsilon$, a to oznacza, że $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Kolejny przypadek to $q > 1$. Mamy teraz $q^n = (1 + (q-1))^n \ge 1 + n(q-1)$. Wobec tego, jeśli $n > n_M$ i $n_M > \frac{M-1}{q-1}$, to $q^n > 1 + (M-1) = M$. Jasne jest więc, że $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$.

Pozostał przypadek ostatni: $q \le -1$. W tym przypadku mamy $q^n \le -1$ dla każdej liczby całkowitej nieparzystej $n$ oraz $q^n \ge 1$ dla każdej liczby całkowitej parzystej $n$. Gdyby istniała skończona granica $g$, to wyrazy ciągu o dostatecznie dużych numerach leżałyby w odległości mniejszej niż $1$ od granicy $g$ — to natychmiastowa konsekwencja istnienia granicy skończonej. Jeśli jednak odległości $q^n$ i $q^{n+1}$ od granicy $g$ są mniejsze od $1$, to odległość między nimi jest mniejsza niż $1+1=2$, co oznacza, że $|q^n - q^{n+1}| < 2$. To jednak nie jest możliwe, bowiem jedna z liczb $q^n$, $q^{n+1}$ jest mniejsza lub równa $-1$, a druga większa lub równa $1$. Stąd zaś wynika, że odległość między $q^n$ i $q^{n+1}$ nie jest mniejsza niż $1-(-1) = 2$*. Otrzymaliśmy sprzeczność, więc ciąg granicy skończonej nie ma. $+\infty$ granicą tego ciągu też nie jest, bowiem wtedy wyrazy ciągu o dostatecznie dużych numerach musiałyby być większe od $0$ (przyjmujemy $M = 0$), a tak nie jest, bo te, których numery są *nieparzyste*, są ujemne. Analogicznie $-\infty$ nie jest granicą tego ciągu, bo wyrazy o numerach *parzystych* są dodatnie, co wyklucza to, że wyrazy o dostatecznie dużych numerach są ujemne (i w tym przypadku przyjmujemy $M = 0$).

Wykazaliśmy więc, że ciąg nie ma ani granicy skończonej ani nieskończonej, co kończy badanie granicy ciągu geometrycznego. ■

♣ Nie używamy tu logarytmu, bo chcemy pokazać, że konkretne oszacowania można uzyskać bardzo elementarnie. Gdybyśmy jednak zechcieli go użyć, to moglibyśmy napisać $n_\varepsilon > (\log_{10}\varepsilon)/(\log_{10}|q|)$, przyp. $\log_{10}|q| < 0$.

* Można to rozumowanie zapisać wzorami: $2 \le |q^n - q^{n+1}| \le |q^n - g| + |g - q^{n+1}| < 1+1 = 2$ dla dostatecznie dużych $n$.

## Ciągi monotoniczne i ściśle monotoniczne, ciągi ograniczone

**Definicja 4.5 (ciągów monotonicznych)**

Ciąg $(a_n)$ nazywamy niemalejącym (rosnącym) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego numeru $n$ zachodzi nierówność $a_n \le a_{n+1}$ ($a_n < a_{n+1}$). Podobnie ciąg nierosnący (malejący) to taki, że dla każdej liczby $n$ zachodzi nierówność $a_n \ge a_{n+1}$ ($a_n > a_{n+1}$). Ciągi niemalejące i nierosnące mają wspólną nazwę: ciągi monotoniczne. Ciągi rosnące i malejące nazywamy ciągami ściśle monotonicznymi. ■

W niektórych podręcznikach stosowana jest nieco inna terminologia: ciągi niemalejące zwane są tam rosnącymi, a rosnące – ściśle rosnącymi. Jest oczywiście obojętne, która z dwu koncepcji jest stosowana, jeśli tylko jest to robione konsekwentnie. Można też, dla uniknięcia nieporozumień, mówić o ciągach niemalejących i ściśle rosnących.

Ciąg geometryczny zaczynający się od wyrazu $a_1 = q$ jest monotoniczny w przypadku $q \ge 0$: dla $q = 0$ oraz dla $q = 1$ ciąg geometryczny jest stały, więc niemalejący i jednocześnie nierosnący. W przypadku $0 < q < 1$ jest on malejący, dla $q > 1$ jest on rosnący. Ciąg arytmetyczny jest rosnący, gdy jego różnica $d$ jest dodatnia, malejący – gdy $d < 0$, stały (więc jednocześnie niemalejący i nierosnący), gdy $d = 0$.

**Definicja 4.6 (ciągów ograniczonych)**

Ciąg $(a_n)$ nazywany jest ograniczonym z góry wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba rzeczywista $M$, taka że dla każdej liczby naturalnej $n$ zachodzi nierówność: $a_n \le M$. Analogicznie $(a_n)$ jest ograniczony z dołu wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba rzeczywista $m$ taka, że dla każdego $n$ zachodzi nierówność $a_n \ge m$. Ciąg ograniczony z góry i z dołu nazywamy ograniczonym. Ciągiem nieograniczonym nazywamy każdy ciąg, który nie jest ograniczony. ■

Ciąg $(n)$ jest ograniczony z dołu np. przez $-13$ lub $0$, ale nie jest ograniczony z góry, więc jest nieograniczony. Ciąg $(-1)^n$ jest ograniczony z góry np. przez 1 lub przez $\sqrt{1000}$ oraz z dołu, np przez $-1$, ale również przez $-13$.

Ciąg $(a_n)$ jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba nieujemna $M$, taka że $|a_n| \le M$ dla każdego $n$. Jest oczywisty wniosek z definicji ciągu ograniczonego: $M$ musi być tak duże, by liczba $-M$ była ograniczeniem dolnym ciągu $(a_n)$ i jednocześnie liczba $M$ była jego ograniczeniem, górnym.

**Przykład 4.4 Ciąg $\left((1+\frac{x}{n})^n\right)$**

Łatwo można przekonać się, że ciąg o wyrazie $a_n = (1+\frac{x}{n})^n$ nie jest ani geometryczny , ani arytmetyczny z wyjątkiem jednego przypadku: $x = 0$.

Wypiszmy przybliżenia dziesięciu pierwszych wyrazów ciągu w przypadku $x = 1$:

$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2$

$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2,25$

$\left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} \approx 2,37$

$\left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{625}{256} \approx 2,44$

$\left(1+\frac{1}{5}\right)^5 = \frac{7776}{3125} \approx 2,49$

$\left(1+\frac{1}{6}\right)^6 = \frac{117649}{46656} \approx 2,52$

$\left(1+\frac{1}{7}\right)^7 = \frac{2097152}{823543} \approx 2,55$

$\left(1+\frac{1}{8}\right)^8 = \frac{43046721}{16777216} \approx 2,56$

$\left(1+\frac{1}{9}\right)^9 = \frac{1000000000}{387420489} \approx 2,58$

$\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} = \frac{25937424601}{10000000000} \approx 2,59$

oraz w przypadku $x = -4$:

$\left(1+\frac{-4}{1}\right)^1 = -3$

$\left(1+\frac{-4}{2}\right)^2 = 1$

$\left(1+\frac{-4}{3}\right)^3 = \frac{-1}{27} \approx -0,37$

$\left(1+\frac{-4}{4}\right)^4 = 0$

$\left(1+\frac{-4}{5}\right)^5 = \frac{1}{3125} \approx 0,00032$

$\left(1+\frac{-4}{6}\right)^6 = \frac{1}{729} \approx 0,0014$

$\left(1+\frac{-4}{7}\right)^7 = \frac{2187}{823543} \approx 0,0027$

$\left(1+\frac{-4}{8}\right)^8 = \frac{1}{256} \approx 0,0039$

$\left(1+\frac{-4}{9}\right)^9 = \frac{1953125}{387420489} \approx 0,0050$

$\left(1+\frac{-4}{10}\right)^{10} = \frac{59049}{9765625} \approx 0,0060$

**Wykażemy, że jeśli $n > -x \neq 0$, to $a_{n+1} > a_n$, czyli że ciąg ten jest rosnący od pewnego momentu**. W przypadku $x > 0$ jest rosnący. Gdy $x < 0$, to może się zdarzyć, że początkowe wyrazy zmieniają znak, więc o monotoniczności nie może być nawet mowy. Jeśli jednak wszystkie wyrazy ciągu są dodatnie, to jest niemalejący. Wykażemy to. Z nierówności $n > -x$ wynika od razu nierówność $n+1 > -x$. Z pierwszej z nich wnioskujemy, że $1+\frac{x}{n} > 0$, z drugiej — że $1+\frac{x}{n+1} > 0$. Nierówność $a_n < a_{n+1}$ równoważna jest nierówności $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n < \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$, a ta — dzięki temu, że $1+\frac{x}{n} > 0$ — nierówności $\left(\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1} > \frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)} = \frac{n}{n+x}$. Skorzystamy teraz z nierówności Bernoulli'ego, by udowodnić, że ostatnia nierówność ma miejsce dla $n > -x$. Mamy

$$\left(\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1} = \left(1-\frac{x}{(n+x)(n+1)}\right)^{n+1} \geq 1-(n+1)\frac{x}{(n+x)(n+1)} = 1-\frac{1}{n+x} = \frac{x}{n+x}.$$

Dla jasności należy jeszcze zauważyć, że liczba $\frac{-x}{(n+x)(n+1)}$, pełniąca rolę $a$ w nierówności Bernoulli'ego, jest większa od $-1$ — jest to oczywiste w przypadku $x \leq 0$, bo w tym przypadku jest ona nieujemna, zaś dla $x > 0$ jej wartość bezwzględna, czyli $\frac{x}{(n+x)(n+1)}$ jest mniejsza od $\frac{1}{n+1} < 1$. Wykazaliśmy więc, że od momentu, w którym wyrażenie $(1+\frac{x}{n})$ staje się dodatnie, ciąg zaczyna rosnąć (gdy $x = 0$ jest stały). Dodajmy jeszcze, że jeśli $x > 0$, to wyrazy ciągu są dodatnie, jeśli zaś $x < 0$, to są one dodatnie dla $n$ parzystego oraz dla $n$ nieparzystego, o ile $n > -x$.

Pozostaje pytanie: czy w przypadku $x > 0$ wzrost wyrazu ciągu $\left((1+\frac{x}{n})^n\right)$ jest nieograniczony, czy też dla ustalonego $x$ znaleźć można liczbę większą od wszystkich wyrazów tego ciągu. Wykażemy, że ciąg $\left((1+\frac{x}{n})^n\right)$ jest ograniczony z góry dla dowolnej liczby rzeczywistej $x$. Dla ujemnych $x$ tak jest, bo od pewnego miejsca, jak to stwierdziliśmy wcześniej, wyrazy ciągu są dodatnie i mniejsze od $1$. Jeśli $n > x > 0$, to $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \frac{\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n}{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n} < \frac{1}{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}$. Wyrażenie $\frac{1}{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}$ maleje wraz ze wzrostem $n$ (gdy rozpatrujemy $n > x$), bo licznik nie zmienia się, a mianownik — jak to wykazaliśmy wcześniej — rośnie. Wynika stąd, że jeśli $n(x)$ jest najmniejszą liczbą całkowitą większą od $x$, to wszystkie wyrazy ciągu są mniejsze niż $\frac{1}{\left(1-\frac{x}{n(x)}\right)^{n(x)}} = \left(\frac{n(x)}{n(x)-x}\right)^{n(x)}$.

Np. $n(1)=2$, zatem wszystkie wyrazy ciągu $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ są mniejsze niż $\left(\frac{2}{2-1}\right)^2 = 4$. W przypadku $x=-4$ wszystkie wyrazy ciągu począwszy od piątego są dodatnie i mniejsze od 1, rozważywszy cztery pierwsze przekonujemy się o tym, że największym wyrazem ciągu jest wyraz drugi, równy $1$, a najmniejszym — pierwszy, równy $-3$. W istocie rzeczy z tego, co zostało napisane wynika, że dla każdej liczby naturalnej $k \geq n(x)$ liczba $\frac{1}{\left(1-\frac{x}{k}\right)^k} = \left(\frac{k}{k-x}\right)^k$ jest ograniczeniem górnym ciągu $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ — zachęcamy do samodzielnego uzasadnienia tego prostego stwierdzenia. ■

Wykażemy teraz następujace

**Twierdzenie 4.7 (o istnieniu granicy ciągu monotonicznego)**
Każdy ciąg monotoniczny ma granicę.

**Dowód.** Załóżmy, że ciąg $(a_n)$ jest niemalejący, tzn. dla każdego $n$ zachodzi nierówność $a_n \leq a_{n+1}$. Jeśli ciąg nie jest ograniczony z góry, to dla każdej liczby rzeczywistej $M$ istnieje liczba naturalna $n_M$ taka, że $a_{n_M} \geq M$. Wtedy dla każdej liczby naturalnej $n \geq n_M$ zachodzi nierówność $a_n \geq a_{n_M} \geq M$. Wobec tego $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Załóżmy teraz, że ciąg $(a_n)$ jest ograniczony z góry przez liczbę $b_0$. Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 0$ mamy więc $a_0 \leq a_n \leq b_0$. Jeśli w przedziale $\left(\frac{a_0+b_0}{2}, b_0\right]$, znajdują się jakiekolwiek wyrazy ciągu $(a_n)$, to przyjmujemy $c_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$ i $b_1 = b_0$. Jeśli w przedziale $\left(\frac{a_0+b_0}{2}, b_0\right]$ wyrazów ciągu $(a_n)$ nie ma, to przyjmujemy $c_1 = a_0$ i $b_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$. W obu przypadkach otrzymujemy przedział $[c_1, b_1] \subseteq [a_0, b_0]$ dwa razy krótszy od przedziału $[a_0, b_0]$ zawierający prawie wszystkie wyrazy ciągu $(a_n)$. W taki sam sposób otrzymujemy przedział $[c_2, b_2] \subseteq [c_1, b_1]$ dwa razy krótszy od przedziału $[c_1, b_1]$, czyli cztery razy krótszy od przedziału $[a_0, b_0]$ zawierający prawie wszystkie wyrazy ciągu $(a_n)$. Powtarzając tę konstrukcję wielokrotnie określamy zstępujący ciąg przedziałów domkniętych $\big([c_n, b_n]\big)$ taki, że każdy przedział $[c_n, b_n]$ jest dwa razy krótszy od swego poprzednika (i jest w nim zawarty). Niech $g$ będzie punktem wspólnym wszystkich przedziałów $[c_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$. Jasne jest, że ta część wspólna składa się z tylko jednej liczby (jeśli $g_1 \neq g_2$, to dla dostatecznie dużych liczb naturalnych $n$ zachodzi nierówność $|g_1 - g_2| > \frac{b_0-a_0}{2^n} = b_n - c_n$). Wykażemy, że $\lim_{n\to\infty} a_n = g$. Niech $\varepsilon > 0$. Istnieje liczba naturalna $m$ taka, że $b_m - c_m < \varepsilon$. Niech $a_n \in [c_m, b_m]$. Wtedy również $a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \ldots \in [c_m, b_m]$ i oczywiście $g \in [c_m, b_m]$. Każde dwa punkty przedziału $[c_m, b_m]$ są odległe o nie więcej niż $b_m - c_m < \varepsilon$, w szczególności odległość $g$ od każdego z punktów $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \ldots$ jest mniejsza niż $\varepsilon$. Oznacza to, że $\lim_{n\to\infty} a_n = g$. Jeśli ciąg $(a_n)$ jest nierosnący, to można już udowodnioną część twierdzenia zastosować do ciągu $(-a_n)$, który jest niemalejący. Ma on zatem jakąś granicę $g$. Bez trudu wykazujemy, że $\lim_{n\to\infty} a_n = -g$. ∎

Ten dowód został zamieszczony po to, by studenci mogli zrozumieć, jak można przeprowadzać rozumowania matematyczne. Nie należy uczyć się go na pamięć, warto go jednak go przemyśleć.

Wypada jednak zauważyć, że gdybyśmy ograniczyli się do liczb wymiernych, czyli do ułamków o całkowitych licznikach i mianownikach, to twierdzenie nie byłoby prawdziwe — istnieją bowiem ciągi liczb wymiernych, których granice są niewymierne. Twierdzenie to podaje więc istotną informację o zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych. Chodzi o to mianowicie, że nie ma w nim dziur, geometrycznie jest to cała prosta. Wyprowadziliśmy to twierdzenie z lematu o przedziałach zstępujących, bo był on jedynym do tej pory twierdzeniem mówiącym w istocie rzeczy, że ,,między" liczbami rzeczywistymi żadnych luk nie ma w odróżnieniu od dziurawego zbioru liczb wymiernych. Między każdymi dwiema różnymi liczbami wymiernymi $c$ i $d$ znajduje się liczba niewymierna, np. $c + \frac{d-c}{\sqrt{2}}$ — jej niewymierność wynika łatwo z tego, że $\sqrt{2} > 1$ jest liczbą niewymierną, zaś $c \neq d$ są wymierne. Jest też jasne, że leży ona między $c$ i $d$ — od punktu $c$ przesuwamy się w kierunku punktu $d$ o wektor $\frac{d-c}{\sqrt{2}}$, którego długość jest mniejsza niż odległość $|c - d|$ punktów $c$ i $d$.

Z twierdzenia tego wynika np. od razu, że ciąg geometryczny, którego zbieżność zbadaliśmy wcześniej ma granicę w przypadku $q \geq 0$. Nie wynika natomiast istnienie tej granicy w przypadku $q < 0$, bo w przypadku ujemnego ilorazu ciąg geometryczny nie jest monotoniczny. Z tego twierdzenia wynika również, że dla każdej liczby rzeczywistej $x$ ciąg $\big((1 + \frac{x}{n})^n\big)$ ma granicę — nie zawsze jest on monotoniczny, ale zawsze jest monotoniczny *od pewnego momentu*, co w oczywisty sposób również wystarcza, bowiem zmiana skończenie wielu wyrazów ciągu nie ma wpływu na istnienie lub wartość granicy, bowiem w definicji granicy mowa jest jedynie o wyrazach ciągu, których numery są *dostatecznie duże*, zatem zmiana skończenie wielu wyrazów ciągu może jedynie mieć wpływ na znaczenie słów *dostatecznie duże*.

**Oznaczenie 4.8 (ważnej granicy)**
$\exp(x)$ oznaczać będzie w dalszym ciągu granicę ciągu $\left((1+\frac{x}{n})^n\right)$, tzn.
$$\exp(x)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$
Wobec tego symbol $\exp$ oznacza funkcję, która jest określona na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych, jej wartością w punkcie $x$ jest liczba dodatnia $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. ■

## Obliczanie granic i stwierdzanie zbieżności ciągu

Sformułujemy teraz kilka twierdzeń, które ułatwiają obliczanie granic, ich szacowanie lub stwierdzanie ich istnienia. Potem pokażemy jak można je stosować. W końcu udowodnimy część z nich, tak by wyjaśnić mechanizm dowodzenia. Najpierw zdefiniujemy niektóre działania z użyciem symboli $\pm\infty$. Przypominamy, że nie są to liczby rzeczywiste, lecz nowe obiekty.

**Definicja 4.9 (działań z użyciem $\pm\infty$)**
$-(+\infty)=-\infty$, $+(+\infty)=+\infty$, $-(-\infty)=+\infty$, $+(-\infty)=-\infty$.
$+\infty\pm a=\pm a+(+\infty)=+\infty$ $-\infty\pm a=\pm a+(-\infty)=-\infty$ dla każdej liczby rzeczywistej a.
$+\infty+(+\infty)=+\infty$, $-\infty+(-\infty)=-\infty$, $+\infty-(-\infty)=+\infty$, $-\infty-(+\infty)=-\infty$.
$+\infty\cdot a=+\infty$ i $-\infty\cdot a=-\infty$ dla każdego $a>0$.
$(+\infty)\cdot(+\infty)=(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty$.
$+\infty\cdot a=-\infty$ i $-\infty\cdot a=+\infty$ dla każdego $a<0$.
$\frac{a}{\pm\infty}=0$ dla dowolnej liczby rzeczywistej a.
$\frac{\pm\infty}{a}=\pm\infty\cdot\frac{1}{a}$ dla dowolnej liczby $a\neq 0$.
$a^{+\infty}=+\infty$, $a^{-\infty}=0$ dla dowolnej liczby $a>1$.
$a^{+\infty}=0$ i $a^{-\infty}=+\infty$ dla dowolnej liczby $0<a<1$.
$-\infty<a<+\infty$ dla dowolnej liczby rzeczywistej $a$.
$-\infty<+\infty$.
$\ln(+\infty)=+\infty$, $\ln 0=-\infty$. ■

**Twierdzenie 4.10 (o arytmetycznych własnościach granicy)**

**A1.** Jeśli istnieją granice $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ i określona jest ich suma, to istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ i zachodzi wzór: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

**A2.** Jeśli istnieją granice $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ i określona jest ich różnica, to istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)$ i zachodzi: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n-\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

**A3.** Jeśli istnieją granice $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ i określony jest ich iloczyn, to istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)$ i zachodzi: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

**A4.** Jeśli istnieją granice $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ i określony jest ich iloraz, to istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ i zachodzi wzór $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}$. ☒

Zanim udowodnimy to twierdzenie, sformułujemy następne.

**Twierdzenie 4.11 (o szacowaniu)**

**N1.** Jeśli $C<\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, to dla dostatecznie dużych numerów $n$ zachodzi nierówność $C<a_n$.

**N2.** Jeśli $C>\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, to dla dostatecznie dużych numerów $n$ zachodzi nierówność $C>a_n$.

**N3.** Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty}b_n<\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, to dla dostatecznie dużych numerów $n$ zachodzi nierówność $b_n<a_n$.

**N4.** Jeśli $b_n\le a_n$ dla dostatecznie dużych numerów $n$, to zachodzi nierówność $\lim\limits_{n\to\infty}b_n\le\lim\limits_{n\to\infty}a_n$. ☒

**Wniosek 4.12 (z twierdzenia o szacowaniu — jednoznaczność granicy)**

Ciąg ma co najwyżej jedną granicę.

**Dowód.** Gdyby miał dwie np. $g_1<g_2$, to wybrać moglibyśmy liczbę $C$ leżącą między $g_1$ i $g_2$: $g_1<C<g_2$. Wtedy dla dostatecznie dużych $n$ byłoby jednocześnie $a_n<C$ (zob. N2) oraz $a_n>C$ (zob. N1), co oczywiście nie jest możliwe. ■

**Wniosek 4.13 (z tw. o szacowaniu — ograniczoność ciągu o granicy skończonej)**

Jeśli granica $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ jest skończona, to istnieją liczby rzeczywiste $C,D$ takie, że dla **wszystkich** $n$ zachodzi nierówność $C<a_n<D$, czyli ciąg $(a_n)$ jest ograniczony z dołu liczbą $C$ zaś z góry liczbą $D$. ☒

**Twierdzenie 4.14 (o trzech ciągach)**

Jeśli $a_n\le b_n\le c_n$ dla dostatecznie dużych $n$ i ciągi $(a_n)$ oraz $(c_n)$ mają *równe* granice, to ciąg $(b_n)$ też ma granicę i zachodzi wzór

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}c_n.\ \boxtimes$$

**Definicja 4.15 (podciągu)**

Jeśli $(n_k)$ jest ściśle rosnącym ciągiem liczb naturalnych, to ciąg $(a_{n_k})$ nazywany jest podciągiem ciągu $(a_n)$. ■

Na przykład ciąg $a_2, a_4\, a_6,\ldots$, czyli ciąg $(a_{2k})$ jest podciągiem ciągu $(a_n)$ — w tym przypadku $n_k=2k$. Ciąg $a_2, a_3, a_5, a_7, a_{11},\ldots$ jest podciągiem ciągu

$(a_n)$ — w tym przypadku $n_k$ jest $k$–tą liczbą pierwszą. Przykłady można mnożyć, ale zapewne starczy powiedzieć, że chodzi o wybranie nieskończenie wielu wyrazów wyjściowego ciągu *bez zmiany kolejności w jakiej występowały.*

Jest jasne, że jeśli $g$ jest granicą ciągu, to jest również granicą każdego jego podciągu, wynika to od razu z definicji granicy i definicji podciągu. Łatwe w dowodzie jest też twierdzenie pozwalające na zbadanie skończenie wielu podciągów danego ciągu, *właściwie wybranych*, i wnioskowanie istnienia granicy z istnienia wspólnej granicy wybranych podciągów.

**Twierdzenie 4.16 (o scalaniu)** *

Załóżmy, że z ciągu $(a_n)$ można wybrać dwa podciągi $(a_{k_n})$ i $(a_{l_n})$ zbieżne do tej samej granicy $g$, przy czym każdy wyraz ciągu $(a_n)$ jest wyrazem co najmniej jednego z tych podciągów, tzn. dla każdego $n$ istnieje $m$, takie że $n = k_m$ lub $n = l_m$. Wtedy ta wspólna granica obu tych podciągów jest granicą ciągu $(a_n)$ : $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$. ☒

Sformułujemy teraz bardzo ważne twierdzenie, które będzie wielokrotnie stosowane w dowodach.

**Twierdzenie 4.17 (Bolzano – Weierstrassa)**

Z każdego ciągu można wybrać podciąg, który ma granicę (skończoną lub nie). ☒

**Wniosek 4.18 (z twierdzenia Bolzano – Weierstrassa)**

Ciąg ma granicę wtedy i tylko wtedy, gdy granice wszystkich tych jego podciągów, które mają granice, są równe. ☒

Następne twierdzenie, w zasadzie już częściowo udowodnione, wykazał A.Cauchy, jeden z twórców analizy matematycznej. ☒

**Twierdzenie 4.19 (Cauchy'ego)** Ciąg $(a_n)$ ma granicę skończoną wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest następujący warunek Cauchy'ego:

(wC) dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna $n_\varepsilon$,
że jeśli $k, l > n_\varepsilon$, to $|a_k - a_l| < \varepsilon$. ☒

Twierdzenie to, podobnie jak twierdzenie o istnieniu granicy ciągu monotonicznego, pozwala czasem stwierdzić istnienie granicy bez ustalania jej wartości, co jest bardzo ważne w licznych przypadkach. Pozwala ono też wykazywać nieistnienie granic — w istocie rzeczy wykazując, że ciąg geometryczny o ilorazie $q \le -1$ nie ma granicy, wykazywaliśmy, że nie spełnia on warunku Cauchy'ego, rolę $\varepsilon$ pełniła tam liczba $2$.

* Ta nazwa to pomysł autora, który ma nadzieję, że nie jest to całkiem głupi termin.

Teraz pokażemy jak można stosować twierdzenia, które sformułowaliśmy wcześniej. Przykłady **4.8** — **4.13** są ważne, wyniki tam opisane będą później wykorzystywane.

**Przykład 4.5** Rozpoczniemy od przykładu już omówionego, ale teraz ciąg zbadamy inaczej. Zajmiemy się mianowicie ciągiem $\left(\frac{2n+3}{4n-1}\right)$. Udowodniliśmy poprzednio, że granicą ciągu jest liczba $\frac{1}{2}$ nie wyjaśniając, skąd wiedzieliśmy, że akurat ta liczba ma być granicą. Zauważmy, że zarówno licznik jak i mianownik mają granice, mianowicie $+\infty$. Jesteśmy więc w sytuacji niedobrej: $\dfrac{+\infty}{+\infty}$. W tym przypadku można jednak bez trudu przekształcić wyrażenie określające wyraz ciągu: $\frac{2n+3}{4n-1} = \dfrac{2+\frac{3}{n}}{4-\frac{1}{n}}$. Teraz możemy zastosować twierdzenie o granicy sumy ciągów (A1), potem o granicy różnicy ciągów (A2), by stwierdzić, że $\lim\limits_{n\to\infty}(2+\frac{3}{n}) = 2 + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n} = 2+0 = 2$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty}(4-\frac{1}{n}) = 4 - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 4-0 = 4$ — wiemy już przecież, że $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, zatem $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n} = 3\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 3\cdot 0 = 0$. Teraz mamy do czynienia z ilorazem, którego licznik ma granicę $2$, zaś mianownik — granicę $4$, więc różną od $0$, co umożliwia skorzystanie z twierdzenia o granicy ilorazu (A4). Z niego wynika od razu, że granicą jest $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Oczywiście nic więcej już robić nie trzeba, bo twierdzenie o arytmetycznych własnościach granicy gwarantuje zarówno istnienie granic, jak i odpowiednie równości. ■

**Przykład 4.6** Rozważymy następny prosty przykład: $\lim\limits_{n\to\infty}(n^5 - 100n^4 - 333978)$. Wykażemy mianowicie, ze ciąg ten ma granicę $+\infty$. Czytelnik zechce zwrócić uwagę na to, że na pewno pierwszych $100$ wyrazów to liczby ujemne — nie twierdzimy wcale, że tylko $100$, ale $n^5 - 100n^4 = n^4(n-100) \le 0$ dla $n \le 100$, a od tej liczby odejmujemy jeszcze $333978$, więc te wyrazy są ujemne, a o znaku dalszych nic nie mówimy. Zapiszmy wyraz ciągu w postaci $n^5(1 - \frac{100}{n} - \frac{333978}{n^5})$. Oczywiście

$$\lim_{n\to\infty} n^5 = (\lim_{n\to\infty} n)\cdot(\lim_{n\to\infty} n)\cdot(\lim_{n\to\infty} n)\cdot(\lim_{n\to\infty} n)\cdot(\lim_{n\to\infty} n) = \\ = (+\infty)\cdot(+\infty)\cdot(+\infty)\cdot(+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$$

na mocy twierdzenia o granicy iloczynu (A3). Na mocy twierdzenia o granicy ilorazu (A4) stwierdzamy, że $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{100}{n} = 0$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{333978}{n^5} = 0$. Możemy więc zastosować twierdzenie o granicy różnicy (A2) dwukrotnie, by stwierdzić, że

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \tfrac{100}{n} - \tfrac{333978}{n^5}\right) = 1 - 0 - 0 = 1\,.$$

Nasz ciąg został więc przedstawiony jako iloczyn dwóch ciągów, z których pierwszy dąży do $+\infty$ a drugi do liczby dodatniej, do $1$. Z definicji mnożenia symboli nieskończonych przez liczby dodatnie i twierdzenia o granicy iloczynu wynika, że jego granicą jest $+\infty$.

Oczywiście i w tym przypadku można postąpić nieco inaczej. Możemy napisać nierówność:

$$n^5 - 100n^4 - 333978 \geq n^5 - 334078n^4 = n^4(n - 334078)$$

— otrzymaliśmy ciąg, który jest iloczynem dwóch ciągów: $(n-334078)$ i $(n^4)$. Oba dążą do $+\infty$, więc ich iloczyn dąży do $+\infty \cdot +\infty = +\infty$. ■

**Przykład 4.7** Pokazaliśmy wcześniej, że wyraz ciągu geometrycznego o ilorazie z przedziału $(-1,1)$ jest zbieżny do $0$. Pokażemy jak można uzyskać ten sam rezultat bez szacowań stosując w zamian twierdzenie o istnieniu granic pewnych ciągów. Załóżmy na początek, że $0 \leq q < 1$. Wtedy oczywiście $q^{n+1} \leq q^n$, więc ciąg jest nierosnący, zatem ma granicę. Oznaczmy ją symbolem $g$. Ponieważ wszystkie wyrazy ciągu leżą w przedziale $(0,1)$, więc granica leży w przedziale $[0,1]$. Jest jasne, że jeśli granicą ciągu jest liczba $g$, to każdy jego podciąg jest też zbieżny do $g$. Wobec tego $g = \lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} (q \cdot q^n) = q \cdot \lim\limits_{n\to\infty} q^n = q \cdot g$, czyli $g = qg$. Stąd, ponieważ $q \neq 1$, natychmiast wynika, że $g = 0$. Załóżmy teraz, że $-1 < q < 0$. Wtedy $-|q|^n \leq q^n \leq |q|^n$. Z już udowodnionej części twierdzenia i z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że $0 = \lim\limits_{n\to\infty} (-|q|^n) = \lim\limits_{n\to\infty} q^n = \lim\limits_{n\to\infty} |q|^n = 0$.

W ten sam sposób można rozważyć przypadek $q > 1$. Ciąg $(q^n)$ jest ściśle rosnący, więc ma granicę $g$. Spełniona musi być równość $g = qg$, co jest możliwe jedynie wtedy, gdy $g = 0$ lub $g = \pm\infty$. Wiemy oczywiście, że $g > 0$ — granica *rosnącego* ciągu liczb dodatnich musi być większa niż $0$, wobec tego $g = +\infty$. W przypadku $q \leq -1$ ciąg nie ma granicy, bo możemy wybrać podciąg, który ma granicę $g_1 \leq -1$, np. $q^{2n-1} = q \cdot (q^2)^n$ oraz podciąg, który ma granicę $g_2 \geq 1$, np. $q^{2n} = (q^2)^n$, istnienie podciągów o różnych granicach przeczy istnieniu granicy ciągu, zarówno skończonej jak i nieskończonej. ■

**Przykład 4.8** Niech $a > 0$ będzie liczbą rzeczywistą. Wykażemy, że $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$. Podobnie jak w poprzednich przypadkach pokażemy dwie metody. Tym razem zaczniemy od sposobu z mniejszą liczbą rachunków, czyli ,,bardziej teoretycznego".

Załóżmy, że $a > 1$. Ciąg $\left(\sqrt[n]{a}\right)$ jest w tym przypadku ściśle malejący, jego wyrazy są większe niż $1$, więc ma granicę $g$, *skończoną*, która nie może być mniejsza niż $1$. Każdy podciąg tego ciągu jest zbieżny do $g$. Między innymi $g = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{a}$. Skorzystamy teraz z twierdzenia o iloczynie granic:

$$g^2 = g \cdot g = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{a} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{a} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[2n]{a}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = g\,,$$

zatem $g^2 = g$. Stąd wynika, że $g = 0 < 1$ lub $g = 1$ (już wiemy, że $g$ nie jest równe $\pm\infty$). Ponieważ pierwsza możliwość została wcześniej wykluczona, więc zostaje druga, czyli $g = 1$.

Dla $a = 1$ teza jest prawdziwa w oczywisty sposób. Załóżmy teraz, że $0 < a < 1$. Mamy $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{1/a}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/a}} = \dfrac{1}{1} = 1$ — skorzystaliśmy z twierdzenia o ilorazie granic oraz z już udowodnionej części tezy.

Teraz udowodnimy, że $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ w przypadku $a > 1$, za pomocą szacowań. Niech $\varepsilon$ będzie dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią. Chcemy wykazać, że dla dostatecznie dużych liczb naturalnych $n$ zachodzi nierówność $|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$, czyli że

$$1 - \varepsilon < \sqrt[n]{a} < 1 + \varepsilon .$$

Ponieważ $a > 1$, więc nierówność podwójna sprowadza się do nierówności $\sqrt[n]{a} < 1+\varepsilon$, czyli do nierówności $a < (1 + \varepsilon)^n$. Ta z kolei wynika z nierówności $a < 1 + n\varepsilon$, bo $1 + n\varepsilon < (1 + \varepsilon)^n$ — nierówność Bernoulli'ego. Wystarczy więc, by $n_\varepsilon > \dfrac{a-1}{\varepsilon}$. To kończy dowód. ■

**Uwaga 4.20** Nie rozwiązywaliśmy nierówności $\sqrt[n]{a} < 1 + \varepsilon$, bo wymagałoby to zastosowania logarytmów, $n > \dfrac{\log a}{\log(1+\varepsilon)}$ , wskazaliśmy jedynie moment, od którego nierówność jest prawdziwa, nie troszcząc się o to, co się dzieje w przypadku wcześniejszych $n$. ■

**Uwaga 4.21** Zauważmy, że w definiując potęgę o wykładniku rzeczywistym wykazaliśmy, że dla każdej liczby $a > 1$ i dowolnej liczby naturalnej $n$ zachodzi nierówność $\sqrt[2^m]{a} < 1 + \frac{a-1}{2^m}$. Stąd wynika, że jeżeli $n \geq 2^m$, to $1 < \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[2^m]{a} < 1 + \frac{a-1}{2^m}$. Mając dane $\varepsilon > 0$ dobieramy $m \in \mathbb{N}$ tak, że $1 + \frac{a-1}{2^m} < 1 + \varepsilon$, więc dla $n > 2^m$ mamy $\sqrt[n]{a} < 1 + \varepsilon$. Oznacza to, że $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$. ■

**Przykład 4.9** Teraz wykażemy, że granicą ciągu $\left(\sqrt[n]{n}\right)$ jest liczba $1$. Zacznijmy od wypisania kilku pierwszych wyrazów ciągu: $\sqrt[1]{1} = 1$, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$, .... Bez trudu można stwierdzić, że $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$ — można np. podnieść tę nierówność obustronnie do potęgi $6$. Oznacza to, że $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4}$. Wynika stąd, że ciąg ten nie jest malejący ani rosnący. Nie wyklucza to monotoniczności *od pewnego miejsca.* Udowodnimy więc , że $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ korzystając z definicji granicy ciągu, inny sposób pokażemy później.

Niech $\varepsilon$ będzie dodatnią liczbą dodatnią. Ponieważ wszystkie wyrazy ciągu są większe lub równe od $1$, więc wystarczy wykazać, że dla dostatecznie dużych $n$

zachodzi nierówność $\sqrt[n]{n} < 1+\varepsilon$, czyli $n < (1+\varepsilon)^n$. Tym razem nierówność Bernoulli' ego jest niewystarczająca, ale ponieważ $\varepsilon > 0$, więc dla $n \geq 2$ mamy $(1+\varepsilon)^n \geq 1 + \binom{n}{1}\varepsilon + \binom{n}{2}\varepsilon^2 > \binom{n}{2}\varepsilon^2$. Wystarczy więc, żeby $n < \binom{n}{2}\varepsilon^2 = \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2$, czyli $\frac{2}{\varepsilon^2} + 1 < n$, co kończy dowód.

Teraz pokażemy, jak można uzyskać ten sam wynik bez szacowań. Nierówność $\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n}$ jest równoważna nierówności $n > \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Otóż wykazaliśmy wcześniej, że ciąg $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ jest ograniczony. Wobec tego nierówność $n > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ zachodzi dla wszystkich *dostatecznie dużych* liczb naturalnych $n$ — nie mamy powodu ustalać w tej chwili, od którego momentu jest ona prawdziwa. Wobec tego ciąg $(\sqrt[n]{n})$ jest malejący od pewnego momentu, jest też ograniczony z dołu przez liczbę $1$, a co zatem idzie zbieżny. Oznaczmy przez $g$ jego granicę. Każdy podciąg tego ciągu, np. $\sqrt[2n]{2n}$ jest zbieżny do tej samej granicy $g$. Wobec tego

$$g^2 = g\cdot g = \lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{2n}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[2n]{2n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n}\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n} = 1\cdot g.$$

Otrzymaliśmy równość $g^2 = g$ a ponieważ $1 \leq g < +\infty$, więc $g = 1$, co kończy dowód. Okazało się, że również w tym przypadku można ominąć rachunki, wymagało to tylko nieco więcej zachodu niż poprzednio, bo ciąg nie jest monotoniczny, a tylko malejący od *pewnego momentu.* ■

**Przykład 4.10** Niech $k$ będzie dowolną liczbą całkowitą dodatnią, $q$ liczbą rzeczywistą większą od $1$. Wykażemy, że $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{q^n} = 0$. Niech $r = 1-q$. Oczywiście $r > 0$. Załóżmy, że $n > k+1$. Mamy wtedy

$$q^n = (1+r)^n =$$
$$= 1 + \binom{n}{1}r + \binom{n}{2}r^2 + \binom{n}{3}r^3 + \cdots + \binom{n}{k}r^k + \binom{n}{k+1}r^{k+1} + \cdots + \binom{n}{n}r^n > \binom{n}{k+1}r^{k+1}.$$

Wobec tego

$$0 < \frac{n^k}{q^n} < \frac{n^k}{\binom{n}{k+1}r^{k+1}} = \frac{n^k(k+1)!}{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k)r^{k+1}} = \frac{(k+1)!}{n(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{k}{n})r^{k+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

a stąd i z twierdzenia o trzech ciągach teza wynika od razu.* ■

**Przykład 4.11** Niech $a_n = \frac{q^n}{n!}$ i niech $q$ oznacza dowolną liczbę rzeczywistą. Wykażemy, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Z definicji ciągu $(a_n)$ wynika, że $a_n = \frac{q\cdot q\cdot q\cdot\ldots\cdot q}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}$. Iloraz $\frac{|q|}{n}$ maleje wraz ze wzrostem liczby $n$. Jest nawet $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|q|}{n} = 0$. Oznacza, to że jeśli $n$ jest duże, to wyraz $a_{n+1}$

---

* Na przełomie XVIII i XIX w. angielski ekonomista Th.R.Malthus twierdził, że liczba ludności wzrasta jak ciąg geometryczny, zaś ilość żywności jak ciąg arytmetyczny, tzw. prawo Malthusa. Wynikałoby stąd i z tego, co właśnie wykazaliśmy, że ilość żywności przypadająca na jedną osobę maleje w czasie i to do $0$, co prawda w bardzo długim, bo w przypadku liczby ludności $q\approx 1$, ale to i tak nie wyglądało dobrze.

jest znikomo małą częścią wyrazu $a_n$. Stąd *powinna* wynikać zbieżność ciągu do $0$. Rzeczywiście, niech $m \ge 2|q|$ będzie liczbą naturalną i niech $n > m$. Wtedy

$$0 < \left|\frac{q^n}{n!}\right| = \frac{|q^m|}{m!} \cdot \frac{|q|}{m+1} \cdot \frac{|q|}{m+2} \cdot \ldots \cdot \frac{|q|}{n} < \frac{|q^m|}{m!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m}.$$

Ostatnie wyrażenie dąży do $0$, bo jest to wyraz ciągu geometrycznego o ilorazie $\frac{1}{2}$. Stosujemy twierdzenie o trzech ciągach. Z niego wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{q^n}{n!}\right| = 0$. Dowód został zakończony. ■

**Przykład 4.12** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$. Wynika to stąd, że $0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n} \le \frac{1}{n}$ i tego, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Dowód został zakończony. ■.

**Przykład 4.13** Jeżeli $k > 1$ jest liczbą naturalną, $x_1$, $x_2$, ... są liczbami nieujemnymi i $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = g$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{x_n} = \sqrt[k]{g}$. Jeśli bowiem $\left(\sqrt[k]{x_{l_n}}\right)$ jest podciągiem zbieżnym do granicy $x$ ciągu $\left(\sqrt[k]{x_n}\right)$, to na mocy twierdzenia o granicy iloczynu ciągów zachodzi $x^k = \left(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{x_{l_n}}\right)^k = \lim\limits_{n\to\infty} x_{l_n} = g$. Ponieważ $x \ge 0$, jako granica ciągu liczb nieujemnych, więc $x = \sqrt[k]{g}$. Wykazaliśmy więc, że wszystkie te podciągi ciągu $\left(\sqrt[k]{x_n}\right)$, które mają granice, są zbieżne do $\sqrt[k]{g}$. Z wniosku z twierdzenia Bolzano – Weierstrassa wynika, że granicą ciągu $\left(\sqrt[k]{x_n}\right)$ jest $\sqrt[k]{g}$. To twierdzenie z łatwością można rozszerzyć na przypadek ciągu liczb ujemnych i pierwiastka stopnia nieparzystego.
Można też wykazać to twierdzenie korzystając z łatwej do uzasadnienia nierówności $\left|\sqrt[k]{x} - \sqrt[k]{y}\right| \le \sqrt[k]{|x-y|}$ ■

**Przykład 4.14** Teraz kilka słów wyjaśniających dlaczego pewne działania z użyciem symboli nieskończonych są zdefiniowane, a inne — nie. Wypiszmy kilka równości łatwych do dowodu:
$\lim\limits_{n\to\infty} \left(n - (n - \frac{1}{n})\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, co sugeruje, że powinno być $+\infty - (+\infty) = 0$;
$\lim\limits_{n\to\infty} (n - (n-1)) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$, co sugeruje, że powinno być $+\infty - (+\infty) = 1$;
$\lim\limits_{n\to\infty} \left(n - (n - \frac{n}{2})\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2} = +\infty$, zatem powinno być $+\infty - (+\infty) = +\infty$;
$\lim\limits_{n\to\infty} (n - (2n)) = \lim\limits_{n\to\infty} (-n) = -\infty$, zatem powinno być $+\infty - (+\infty) = -\infty$.
Okazuje się więc, że z tego, że dwa ciągi dążą do $+\infty$, nic nie wynika na temat wartości granicy ich różnicy. Przyjąwszy $a_n = n$ i $b_n = n + (-1)^n$ przekonujemy się z łatwością, że może się też zdarzyć, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, natomiast różnica $(a_n - b_n)$ ciągów $(a_n)$ i $(b_n)$ granicy w ogóle nie ma, w tym przypadku jest ona ciągiem geometrycznym o ilorazie $-1$. Innymi słowy na podstawie tego, że dwa

ciągi mają granicę $+\infty$, nic o istnieniu granicy ich różnicy lub jej wartości w przypadku, gdy granica istnieje, powiedzieć nie można! To samo dotyczy innych symboli nieoznaczonych np. $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $1^{\pm\infty}$, $0^0$... Zachęcamy czytelnika do samodzielnego wymyślenia odpowiednich przykładów w celu lepszego zrozumienia tych kwestii. ■

**Uwaga 4.22 (o ciężkim życiu studenta)** Wielu studentów miewało w przeszłości — przyszłość nie jest autorowi znana — kłopoty z symbolami nieoznaczonymi; wg. autora samodzielne wymyślenie kilku przykładów ilustrujących niemożność rozszerzenia definicji działań z użyciem nieskończoności to jedna z najpewniejszych dróg uniknięcia tego rodzaju trudności. ■

Ostatnia rzecz, o której wspomnieć wypada przed przejściem do dowodów, to twierdzenie o przenoszeniu się nierówności na granicę (N4). Otóż można by pomyśleć, że jeśli dla wszystkich dostatecznie dużych liczb naturalnych $n$ zachodzi ostra nierówność $b_n < a_n$, to również w granicy nierówność jest ostra. Tak może być, ale nie musi. Świadczyć może o tym następujący przykład: $a_n = \frac{1}{2n}$, $b_n = \frac{1}{n}$ — wobec tego $a_n < b_n$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ i jednocześnie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

## Funkcja wykładnicza o podstawie $e$

**Definicja 4.23 (Liczby $e$)**
$e = \exp(1) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. ■

Udowodnimy, że dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $e^x = \exp(x)$. Wymagać to będzie trochę pracy, ale p drodze wykażemy ważne własności funkcji wykładniczej o podstawie $e$.

**Lemat 4.24 (o potęgach ciągów szybko zbieżnych do 1)**
Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + a_n)^n = 1$.

**Dowód.** Skorzystamy z nierówności Bernoulliego i twierdzenia o trzech ciągach. Z tego, że $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$ wynika, że istnieje taka liczba naturalna $\hat{n}$, że dla każdego naturalnego $n > \hat{n}$ zachodzi nierówność $|na_n| < \frac{1}{2}$, więc również $|a_n| \leq |na_n| < \frac{1}{2}$, zatem $-1 < -\frac{1}{2} < a_n$. Z nierówności Bernoulliego wynika więc, że dla każdego $n > \hat{n}$ zachodzi nierówność $(1 + a_n)^n \geq 1 + na_n$. Mamy też $\left|\frac{-na_n}{1+a_n}\right| \leq \frac{|-na_n|}{1-|a_n|} < \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$. Możemy więc skorzystać z nierówności Bernoulliego raz jeszcze:

$$(1 + a_n)^n = \left(\frac{1}{1 + \frac{-a_n}{1+a_n}}\right)^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{-a_n}{1+a_n}\right)^n} \leq \frac{1}{1 + \frac{-na_n}{1+a_n}}.$$

Wynika stąd następująca nierówność podwójna

$$1 + na_n \le (1 + a_n)^n \le \frac{1}{1 + \frac{-na_n}{1 + a_n}} .$$

Z tego, że $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$ wynika, że

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot n \cdot a_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} (na_n) = 0 \cdot 0 = 0$, zatem $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + na_n) = 1 + 0 = 1$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{-na_n}{1+a_n}} = \frac{1}{1+\frac{-0}{1+0}} = 1$. Z twierdzenia o trzech ciągach wynika więc, że $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + a_n)^n = 1$. Lemat został udowodniony. ■

**Lemat 4.25 (podstawowa nierówność dla funkcji wykładniczej)**
Dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $\exp(x) \ge 1 + x$.

**Dowód.** Jeśli $n > -x$, to $\frac{x}{n} > -1$, zatem $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \ge 1 + n \cdot \frac{x}{n} = 1 + x$. Wobec tego $\exp(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \ge 1 + x$. Lemat został udowodniony. ■

**Lemat 4.26 (podstawowa własność funkcji** $\exp$**)**
Dla każdej pary liczb rzeczywistych $x, y$ zachodzi równość

$$\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y) .$$

**Dowód.** Ponieważ dla $m > -x \ne 0$ zachodzą nierówności

$$1 + \tfrac{x}{m} > 0 \text{ oraz } \left(1 + \tfrac{x}{m}\right)^m < \left(1 + \tfrac{x}{m+1}\right)^{m+1}$$

— przykład 4.4, więc $\exp(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n > \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m > 0$. Dowodzona równość jest więc równoważna następującej $\frac{\exp(x)\cdot\exp(y)}{\exp(x+y)} = 1$. Wykażemy, że

$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\frac{xy}{n^2}}{1 + \frac{x+y}{n}}\right)^n .$$

Równość wynika od razu z lematu o potęgach ciągów szybko zbieżnych do $1$: przyjmujemy $a_n = \frac{\frac{xy}{n^2}}{1+\frac{x+y}{n}}$. Oczywiście wtedy $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{xy}{n}}{1+\frac{x+y}{n}} = \frac{0}{1+0} = 0$. ■

**Lemat 4.27 (o monotoniczności funkcji** $\exp$**)**
Jeśli $y > x$, to $\exp(y) > \exp(x)$.

**Dowód.** Mamy

$$\exp(y) = \exp(y - x + x) = \exp(y - x)\exp(x) \ge (1 + y - x)\exp(x) > \exp(x)$$

— skorzystaliśmy z dodatniości liczby $\exp(x)$ i z nierówności podstawowej. ■

**Twierdzenie 4.28 (o ciągłości funkcji** $\exp$**)**
Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \exp(x_n) = \exp(x)$.

**Dowód.** Jeśli $h < 1$, to $\exp(h) = \frac{1}{\exp(-h)} \leq \frac{1}{1+(-h)} = \frac{1}{1-h}$. Wynika stąd, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$, to dla dostatecznie dużych $n$ zachodzi nierówność $|h_n| < 1$, zatem $1 + h_n \leq \exp(h_n) \leq \frac{1}{1-h_n}$, a ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty}(1+h_n) = 1+0 = 1$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1-h_n} = \frac{1}{1-0} = 1$, więc $\lim\limits_{n\to\infty} \exp(h_n) = 1$. Stąd i z równania podstawowego wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} \exp(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (\exp(x_n - x)\exp(x)) = \lim\limits_{n\to\infty} \exp(x_n - x) \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \exp(x)) =$
$$= 1 \cdot \exp(x) = \exp(x)\,. \ ■$$

**Lemat 4.29**

Jeśli $k, n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$, to $\exp(\frac{k}{n}) = e^{k/n}$.

**Dowód.** Dla każdej liczby naturalnej $n$ i każdej liczby rzeczywistej $x$ zachodzi równość $\exp(nx) = (\exp(x))^n$ — wynika ona od razu z podstawowej własności funkcji $\exp$. Przyjmując w ostatniej równości $x = \frac{y}{n}$ otrzymujemy $\exp(y) = (\exp\frac{y}{n})^n$, więc $\exp\frac{y}{n} = \sqrt[n]{\exp(y)} = (\exp(y))^{1/n}$. Dla każdej naturalnej liczby $k$ mamy więc $\exp(\frac{k}{n}) = (\exp(\frac{1}{n}))^k = (e^{1/n})^k = e^{k/n}$. Pozostały jeszcze liczby ujemne. Jeśli $k < 0$, to $1 = \exp(0) = \exp(-\frac{k}{n} + \frac{k}{n}) = \exp(-\frac{k}{n}) \cdot \exp(\frac{k}{n})$, zatem
$$\exp(\tfrac{k}{n}) = \frac{1}{\exp(-\frac{k}{n})} = \frac{1}{\exp(\frac{-k}{n})} = \frac{1}{e^{-k/n}} = e^{k/n}\,. \ ■$$

**Twierdzenie 4.30**

Dla każdej liczby rzeczywistej $x$ zachodzi równość $\exp(x) = e^x$.

**Dowód.** Wiemy, że funkcje $x \mapsto \exp(x)$ i $x \mapsto e^x$ są rosnące i pokrywają się na zbiorze liczb wymiernych. Wiemy też, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $u, v$ i dowolnej liczby naturalnej $n$ z nierówności $0 < u - v < \frac{1}{2^n}$ wynika
$$0 < e^v - e^u < e^u \cdot \tfrac{e-1}{2^n}\,.$$
Jeśli $x$ jest dowolną liczbą rzeczywistą, $n$ — dowolną liczbą naturalną a $u, v$ są takimi liczbami wymiernymi, że $u < x < v$, $v - u < \frac{1}{2^n}$, to spełnione są nierówności $e^u = \exp(u) < \exp(x) < \exp(v) = e^v$, $e^u < e^x < e^v$ i wobec tego
$$|e^x - \exp(x)| < e^v - e^u < e^u \cdot \tfrac{e-1}{2^n} < e^x \cdot \tfrac{e-1}{2^n}\,.$$
Wynika stąd, że różnica między liczbami $e^x$ i $\exp(x)$ jest równa $0$, bo jest mniejsza od dowolnej liczby dodatniej ($n$ to **dowolna** liczba naturalna!). ■

**Definicja 4.31 (logarytmu naturalnego)**

Logarytmem naturalnym liczby $x > 0$ nazywamy liczbę $\log_e x$. Oznaczamy ją symbolem $\ln x$. ■

**Lemat 4.32**

Dla każdej liczby rzeczywistej $x > -1$ zachodzą nierówności
$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x\,.$$

**Dowód.** Nierówność $\ln(1+x) \le x$ wynika od razu z nierówności $1+x \le e^x$ — logarytm naturalny większej liczby jest większy, bo $e > 1$.

Mamy $1 - \frac{x}{1+x} = \frac{1}{1+x}$, zatem z nierówności $x > -1$ wynika, że $\frac{x}{1+x} < 1$. Z tej nierówności wynika, że $e^{x/(1+x)} \le \frac{1}{1-\frac{x}{1+x}} = 1+x$, zatem

$$\frac{x}{1+x} = \ln\left(e^{x/(1+x)}\right) \le \ln(1+x),$$

co dowodzi lewej nierówności. ■

**Uwaga 4.33** Logarytmy naturalne były pierwszymi, które obliczano. Później przekonamy się, że pojawiają się one w wielu sytuacjach. ■

Zakończymy rozważania o funkcji wykładniczej o podstawie $e$ jeszcze jednym wzorem.

**Twierdzenie 4.34**
Dla każdej liczby rzeczywistej $x$ zachodzi równość*

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right) =: \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

**Dowód.** Niech $k > 0$ będzie dowolną liczbą naturalną. Przypominam, że dla $n \ge k$ zachodzi wzór $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n-k+1}{k}$ oraz $\frac{n-j}{n} = 1-\frac{j}{n}$. Jeśli $n \ge k$, to

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1+\binom{n}{1}\frac{x}{n}+\binom{n}{2}(\tfrac{x}{n})^2+\ldots+\binom{n}{k}(\tfrac{x}{n})^k+\ldots+\binom{n}{n}(\tfrac{x}{n})^n =$$
$$= 1+\frac{x}{1!}+(1-\tfrac{1}{n})\frac{x^2}{2!}+(1-\tfrac{1}{n})(1-\tfrac{2}{n})\frac{x^3}{3!}+\ldots+(1-\tfrac{1}{n})(1-\tfrac{2}{n})\ldots(1-\tfrac{n-1}{n})\frac{x^n}{n!}.$$

Mamy zatem $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - \left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^k}{k!}\right) =$

$$= \left(1+\frac{x}{1!}+(1-\tfrac{1}{n})\frac{x^2}{2!}+\ldots+(1-\tfrac{1}{n})(1-\tfrac{2}{n})\ldots(1-\tfrac{n-1}{n})\frac{x^n}{n!}\right) -$$
$$-\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^k}{k!}\right) =$$
$$= \left((1-\tfrac{1}{n})-1\right)\frac{x^2}{2!}+\ldots+\left((1-\tfrac{1}{n})(1-\tfrac{2}{n})\ldots(1-\tfrac{k-1}{n})-1\right)\frac{x^k}{k!}+$$
$$+(1-\tfrac{1}{n})(1-\tfrac{2}{n})\ldots(1-\tfrac{k}{n})\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}+\ldots+(1-\tfrac{1}{n})(1-\tfrac{2}{n})\ldots(1-\tfrac{n-1}{n})\frac{x^n}{(n)!}.$$

Stąd wynika, że (przyp. $|a+b| \le |a|+|b|$, $1-\frac{1}{n} < 1$, $1-\frac{2}{n} < 1$, itd.)

$$\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - \left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^k}{k!}\right)\right| \le$$
$$\le \left|\left((1-\tfrac{1}{n})-1\right)\frac{x^2}{2!}+\ldots+\left((1-\tfrac{1}{n})(1-\tfrac{2}{n})\ldots(1-\tfrac{k-1}{n})-1\right)\frac{x^k}{k!}\right|+$$
$$+\frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}+\ldots+\frac{|x|^n}{(n)!}$$

Załóżmy teraz, że $k > 2|x|$. Wtedy

$$\frac{|x|^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}\cdot\frac{|x|}{k+2} \le \frac{1}{2}\cdot\frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!},\quad \frac{|x|^{k+3}}{(k+3)!} = \frac{|x|^{k+2}}{(k+2)!}\cdot\frac{|x|}{k+3} \le \frac{1}{2}\cdot\frac{|x|^{k+2}}{(k+2)!} \le \frac{1}{2^2}\cdot\frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!},$$

*Znak =: oznacza symbol następujący po dwukropku jest zdefiniowany za p[omocą wyrażenia znajdującego się po lewej stronie równości.

$\frac{|x|^{k+4}}{(k+4)!} = \frac{|x|^{k+3}}{(k+3)!} \cdot \frac{|x|}{k+4} \le \frac{1}{2} \cdot \frac{|x|^{k+3}}{(k+3)!} \le \frac{1}{2^3} \cdot \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}$, ... , $\frac{|x|^n}{(n)!} \le \frac{1}{2^{n-k-1}} \cdot \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}$.

Stąd $\frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!} + \ldots + \frac{|x|^n}{(n)!} \le \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-k-1}}) = \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}(2 - \frac{1}{2^{n-k-1}}) \le \frac{2|x|^{k+1}}{(k+1)!}$.
Wobec tego

$$\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^k}{k!}\right)\right| \le$$

$$\le \left|\left((1-\tfrac{1}{n})-1\right)\frac{x^2}{2!} + \ldots + \left((1-\tfrac{1}{n})(1-\tfrac{2}{n})\ldots(1-\tfrac{k-1}{n})-1\right)\frac{x^k}{k!}\right| + \frac{2|x|^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Mamy zatem (przyp. $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{j}{n}) = 1$)

$$\left|e^x - \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^k}{k!}\right)\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^k}{k!}\right)\right| \le$$

$$\le \lim_{n\to\infty}\left(\left|\left((1-\tfrac{1}{n})-1\right)\frac{x^2}{2!} + \ldots + \left((1-\tfrac{1}{n})(1-\tfrac{2}{n})\ldots(1-\tfrac{k-1}{n})-1\right)\frac{x^k}{k!}\right| + \frac{2|x|^{k+1}}{(k+1)!}\right) =$$

$$= \frac{2|x|^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Udowodniliśmy, że $\left|e^x - \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^k}{k!}\right)\right| \le \frac{2|x|^{k+1}}{(k+1)!}$.
Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, więc $\lim\limits_{n\to\infty}\left|e^x - \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right)\right| = 0$, a co za tym idzie $e^x = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right)$. Zakończyliśmy dowód twierdzenia. ■

**Wniosek 4.35**

$$\left|e - \frac{1957}{720}\right| = \left|e - \frac{1440+360+120+30+6+1}{720}\right| = \left|e - (1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!})\right| <$$

$$< \frac{2}{7!} = \frac{1}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} = \frac{1}{2520}, \quad e \approx \frac{1957}{720} \approx 2{,}718.$$ ■

Wypada dodać, że po rozwinięciu teorii ten dowód można będzie zastąpić znacznie krótszym. W tym miejscu podaliśmy go jedynie po to, by studenci mogli prześledzić rozumowanie, które wyda im się długie, choć to tylko jedna strona, co jest dobrym ćwiczeniem w szacowaniu (ocenie błędu przybliżenia). Jednocześnie warto napisać, ze dla osób, które w zasadzie nie spotykały się z dowodami, może ono być trudnawe. Jednak prześledzenie kilku takich rozumowań z pewnością ułatwi zrozumienie materiału.

## Opuszczone dowody

Przejdziemy teraz do dowodów twierdzeń sformułowanych na początku tego rozdziału. Zaczniemy od nierówności. Zachęcamy studentów do przejrzenia przynajmniej części dowodów i dołożenia starań w celu zrozumienia wnioskowania. Wnioskowanie to jedna z najważniejszych rzeczy w matematyce. Rozpowszechniany pogląd, że jest to potrzebne tylko matematykom, jest tylko w pewnym sensie prawdziwy. Bez zapoznania się z metodami stosowanymi w matematyce nie sposób zapewne zrozumieć sformułowań wielu twierdzeń i wobec tego trudno je stosować, na pewno grozi to błędami i zmusza studentów do zbędnego zapamiętywania jakichś szczegółów, które z punktu widzenia osób, które zrozumiały podstawowe kwestie są po prostu oczywiste i w ogóle o nich nie warto wspominać. Poza tym część dowodów mówi o tym, jak należy postępować w różnych sytuacjach: dowód twierdzenia o granicy iloczynu lub ilorazu ciągów to po prostu opis podstawowej (i najprostszej) metody szacowania iloczynu lub ilorazu.

**Dowód twierdzenia o szacowaniu** Zaczniemy od N1. Przypomnijmy, że liczba $C$ jest mniejsza od granicy ciągu $(a_n)$. Mamy wykazać, że dla dostatecznie dużych $n$ zachodzi nierówność $C < a_n$. Załóżmy najpierw, że granica $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ jest nieskończona. Jest ona większa od liczby rzeczywistej $C$, więc $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ (bo $-\infty < C$). Z definicji od razu wynika, że dla każdej liczby rzeczywistej $M$, np. dla $M = C$, począwszy od pewnego momentu, zachodzi nierówność $a_n > M = C$.

Przejdźmy do następnego przypadku: granica $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ jest skończona. Niech $\varepsilon = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - C$. Z definicji od razu wynika, że dla dostatecznie dużych $n$ zachodzi nierówność $|a_n - \lim\limits_{n\to\infty} a_n| < \varepsilon$, więc $a_n > \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \varepsilon = C$.

W taki sam sposób udowodnić można N2 — trzeba jedynie zmienić kierunki niektórych nierówności i zastąpić $+\infty$ przez $-\infty$.

Teraz załóżmy, że $\lim\limits_{n\to\infty} b_n < \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Niezależnie od tego, czy granice są skończone czy nie, istnieje liczba $C$ taka, że $\lim\limits_{n\to\infty} b_n < C < \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Na mocy już udowodnionej części twierdzenia dla dostatecznie dużych $n$ zachodzą nierówności $b_n < C$ oraz $C < a_n$. Z nich wynika od razu, że dla dostatecznie dużych liczb naturalnych $n$ mamy $b_n < a_n$, co kończy dowód części N3.

Załóżmy, że od pewnego momentu zachodzi nierówność $b_n \leq a_n$, chcemy natomiast wykazać, że $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Jeśli tak nie jest, to $\lim\limits_{n\to\infty} b_n > \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Stąd jednak wynika, że dla dostatecznie dużych liczb naturalnych $n$ zachodzi nierówność

$b_n > a_n$ sprzeczna z założeniem. Zakończyliśmy dowód twierdzenia o szacowaniu. ■

Z udowodnionego właśnie twierdzenia już wcześniej wywnioskowaliśmy, że jeśli ciąg ma granicę, to tylko jedną.

Teraz udowodnimy, że ciąg zbieżny do granicy skończonej jest ograniczony zarówno z góry jak i z dołu. Niech $c$ i $d$ będą takimi liczbami rzeczywistymi, że $c < \lim\limits_{n\to\infty} a_n < d$. Z twierdzenia o szacowaniu wynika, że dla dostatecznie dużych liczb naturalnych $n$, powiedzmy większych od odpowiednio dobranej liczby $m$, zachodzi nierówność $c < a_n < d$. Wystarczy teraz przyjąć, że $C$ jest najmniejszą z liczb $a_0$, $a_1$, ... , $a_m$, $c$, by dla *wszystkich* liczb naturalnych $n$ było $C \leq a_n$. Analogicznie przyjmujemy, że $D$ jest największą z liczb $a_0$, $a_1$, ..., $a_m$, $d$ — wtedy $a_n \leq D$ dla *wszystkich* liczb naturalnych $n$. Dowód tego wniosku został zakończony. ■

**Uwaga 4.36** Ten dowód jest bardzo prosty. Proszę jednak zwrócić uwagę na to, że *spośród skończenie wielu liczb można zawsze wybrać najmniejszą* a spośród nieskończenie wielu niekoniecznie, np. wśród liczb $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ najmniejszej nie ma!

**Uwaga 4.37 (o zbieżności ciągu przeciwnego)**
Zauważmy teraz, że ciąg $(c_n)$ ma granicę wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $(-c_n)$ ma granicę, niezależnie od tego, czy granica ta jest skończona, czy nieskończona oraz że zachodzi wtedy równość

$$\lim_{n\to\infty} (-c_n) = -\lim_{n\to\infty} c_n\,. \quad ■$$

Ta bardzo prosta uwaga wielokrotnie pozwoli nam na zmniejszenie liczby przypadków rozważanych w dowodach.

Teraz zajmiemy się twierdzeniem o arytmetycznych własnościach granicy ciągu. Udowodnimy, że suma granic dwóch ciągów jest granicą sumy tych ciągów. Załóżmy, że $g_a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ i $g_b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Należy rozważyć trzy przypadki: $g_a$, $g_b$ są liczbami rzeczywistymi, $g_a$ jest liczbą rzeczywistą zaś $g_b$ jest symbolem nieskończonym, $g_a$, $g_b$ są symbolami nieskończonymi tego samego znaku.

Rozpoczniemy od granic skończonych, przypadku znanego pewnej części studentów ze szkoły. Niech $\varepsilon$ będzie dodatnią liczbą rzeczywistą i niech $n'_\varepsilon$ będzie taką liczbą naturalną, że dla $n > n'_\varepsilon$ zachodzi nierówność $|a_n - g_a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Niech $|b_n - g_b| < \frac{\varepsilon}{2}$ dla $n > n''_\varepsilon$, gdzie $n_\varepsilon$ jest odpowiednio dobraną liczbą naturalną. Wtedy dla $n > n_\varepsilon := \max(n'_\varepsilon, n''_\varepsilon)$ zachodzą obydwie nierówności, zatem

$$|a_n + b_n - (g_a + g_b)| \leq |a_n - g_a| + |b_n - g_b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Oznacza to, że dla dostatecznie dużych numerów $n$ różnica $(a_n + b_n) - (g_a + g_b)$ ma wartość bezwzględną mniejszą niż $\varepsilon$, więc $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = g_a + g_b$. Dowód twierdzenia o granicy sumy ciągów w tym przypadku został zakończony.

Zajmiemy się teraz następnym przypadkiem: niech liczba $g$ będzie granicą ciągu $(a_n)$, czyli $g = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ i niech $+\infty = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Wykażemy, że $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = +\infty$. Niech $M$ będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Istnieje liczba naturalna $n''_{M-g+1}$ taka, że dla $n > n''_{M-g+1}$ zachodzi nierówność $b_n > M-g+1$. Istnieje też liczba naturalna $n'_1$ taka, że dla $n > n'_1$ zachodzi nierówność $|a_n - g| < 1$. Niech $n_M$ będzie większą z liczb $n''_{M-g+1}$ i $n'_1$. Dla $n > n_M$ obie nierówności zachodzą, więc

$$a_n + b_n = b_n + g + (a_n - g) \geq b_n + g - |a_n - g| > (M - g + 1) + g - 1 = M\,.$$

Wykazaliśmy , że dla dostatecznie dużych liczb naturalnych $n$ zachodzi nierówność $a_n + b_n > M$, więc $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$. Dowód został zakończony.

Jeśli więc ciąg $(a_n)$ ma granicę skończoną i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, to na mocy poprzednio wykazanej części twierdzenia o granicy sumy ciąg $\big(-a_n + (-b_n)\big)$ ma granicę i zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty}(-a_n - b_n) = -\lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty}(-b_n) = +\infty$, co w świetle uwagi poprzedzającej to zdanie oznacza, że granica $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ istnieje i jest równa $-\infty$. Dowód został zakończony.

Kolej na ostatni przypadek: obie granice są równe $+\infty$ lub obie są równe $-\infty$. Z uwagi o zbieżności ciągu przeciwnego wynika, że dowód przeprowadzić wystarczy zakładając, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Jeśli $M$ jest dowolną liczbą rzeczywistą, to istnieją takie liczby naturalne $n'_{M/2}$ oraz $n''_{M/2}$, że jeśli $n > n'_{M/2}$, to $a_n > \frac{M}{2}$, zaś jeśli $n > n''_{M/2}$, to $b_n > \frac{M}{2}$. Przyjmijmy, że $n_M$ jest większą z liczb $n > n'_{M/2}$, $n > n''_{M/2}$. Wtedy zachodzą obie nierówności i wobec tego $a_n + b_n > \frac{M}{2} + \frac{M}{2} = M$, więc dla dostatecznie dużych liczb naturalnych $n$ zachodzi nierówność $a_n + b_n > M$, a to oznacza, że $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$. Dowód został zakończony.

Z uwagi o zbieżności ciągu przeciwnego i twierdzenia o granicy sumy (A1) wynika od razu twierdzenie o granicy różnicy (A2).

Zajmiemy się teraz iloczynem. Podobnie jak poprzednio jest wiele przypadków, których liczbę można zredukować stosując uwagę o zbieżności ciągu przeciwnego do następujących: obie granice są skończone, obie granice są równe $+\infty$, jedna granica jest dodatnią liczbą rzeczywistą a druga jest nieskończona, np. $+\infty$.

Rozpoczniemy od rozpatrzenia granicy iloczynu dwóch ciągów, których granice są skończone. Z twierdzenia o szacowaniu wynika, że każdy z tych ciągów jest ograniczony, więc istnieje liczba $K' > 0$ taka, że $|a_n| \leq K'$ i istnieje też liczba $K''$ taka, że $|b_n| < K''$ dla każdej liczby naturalnej $n$. Przyjmując, że $K$ to większa z liczb $K'$, $K''$ znajdujemy liczbę, której nie przekracza wartość bezwzględna żadnego wyrazu któregokolwiek z dwóch rozpatrywanych ciągów: $|a_n|, |b_n| \le K$. Niech $g_a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $g_b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Z twierdzenia o szacowaniu wnioskujemy, że również $|g_a|$, $|g_b| \le K$. Niech $\varepsilon$ oznacza dowolną liczbę dodatnią. Istnieje wtedy liczba naturalna $n_\varepsilon$, taka że jeśli $n > n_\varepsilon$, to $|a_n - g_a| < \frac{\varepsilon}{2K}$ i jednocześnie $|b_n - g_b| < \frac{\varepsilon}{2K}$. Wtedy

$$|a_nb_n - g_ag_b| = |(a_n - g_a)b_n + g_a(b_n - g_b)| \le |a_n - g_a| \cdot |b_n| + |g_a| \cdot |b_n - g_b| <$$
$$< \tfrac{\varepsilon}{2K} \cdot K + K \cdot \tfrac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon.$$

Udowodniliśmy więc, że dla dostatecznie dużych $n$ odległość liczby $a_nb_n$ od liczby $g_ag_b$ jest mniejsza niż $\varepsilon$, co oznacza, że $g_ag_b = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, a to właśnie było naszym celem.

Teraz zajmiemy się granicą iloczynu ciągów, z których jeden ma granicę skończoną i dodatnią, a granicą drugiego jest $+\infty$. Niech $g_a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ będzie liczbą dodatnią i niech $+\infty = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Niech $M$ będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Z twierdzenia o szacowaniu wynika, że istnieje liczba naturalna $n_M$ taka, że jeśli $n > n_M$, to $a_n > \frac{1}{2}g_a > 0$ i $b_n > \frac{2|M|}{g_a} > 0$. Wtedy $a_nb_n > \frac{1}{2}g_a\frac{2|M|}{g_a} = |M| \ge M$. Dowód w tym przypadku został zakończony. Rozpatrzymy teraz iloczyn ciągów $(a_n)$ i $(b_n)$ przy założeniu, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Jeśli $M$ jest dowolną liczbą rzeczywistą, to istnieje liczba naturalna $n_M$, taka że dla $n > n_M$ zachodzą nierówności $a_n > 1 + |M|$ i $b_M > 1 + |M|$. Dla $n > n_M$ prawdą jest wtedy: $a_nb_n > (1 + |M|)^2 > 2 \cdot |M| \ge |M| \ge M$, co dowodzi równości $+\infty = \lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n$. Twierdzenie o granicy iloczynu ciągów zostało w ten sposób udowodnione.

Pozostała ostatnia część — twierdzenie o granicy ilorazu. Znów rozpoczniemy od granic skończonych. Niech $g_a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ i niech $0 \ne g_b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Wykażemy, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{g_a}{g_b}$. Niech $\varepsilon$ będzie dowolną liczbą dodatnią. Z poczynionych założeń wynika, że istnieje taka liczba naturalna $n_\varepsilon$, że jeśli $n > n_\varepsilon$, to

$$|b_n| > \tfrac{|g_b|}{2}, \quad |a_n - g_a| < \tfrac{\varepsilon\cdot|g_b|}{4}, \quad |b_n - g_b| < \tfrac{\varepsilon\cdot|g_b|^2}{4(|g_a|+1)}.^*$$

Dla $n > n_\varepsilon$ mamy więc

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{g_a}{g_b}\right| = \frac{|a_ng_b - g_ab_n|}{|g_bb_n|} \le \frac{|a_ng_b - g_ag_b| + |g_ag_b - g_ab_n|}{|g_b|^2/2} = \frac{2}{|g_b|}|a_n - g_a| + \frac{2|g_a|}{|g_b|^2}|g_b - b_n| < \varepsilon.$$

Twierdzenie zostało udowodnione w przypadku granic skończonych.

Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ a ciąg $(b_n)$ ma granicę skończoną i różną od $0$, to ciąg $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ ma granicę skończoną i różną od $0$ – wynika to z już udowodnionej części

* Nie założyliśmy, że $g_a \ne 0$, więc w mianowniku umieściliśmy $|g_a|+1$, by na pewno mianownik był różny od $0$.

twierdzenia o granicy ilorazu. Można zastosować twierdzenie o granicy iloczynu ciągów: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(a_n \cdot \frac{1}{b_n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = +\infty \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n}$. Ten ostatni iloczyn jest oczywiście dobrze określony.

Ostatni przypadek: granica ciągu $(a_n)$ jest skończona a granica ciągu $(b_n)$ jest nieskończona. W tym przypadku ciąg $(a_n)$ jest ograniczony, tzn. istnieje liczba $K > 0$, taka że dla każdego $n$ zachodzi nierówność $|a_n| < K$. Jeśli $\varepsilon > 0$, to istnieje liczba naturalna $n_\varepsilon$, taka że jeśli $n > n_\varepsilon$, to $|b_n| > \frac{K}{\varepsilon}$. Wtedy $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| < K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$. Wykazaliśmy więc, że dla dostatecznie dużych $n$ iloraz $\frac{a_n}{b_n}$ ma wartość bezwzględną mniejszą niż $\varepsilon$, a to oznacza, że $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$. Dowód został zakończony. ■

**Uwaga 4.38 (o ilorazie z ograniczonym licznikiem)**
Z dowodu twierdzenia o granicy ilorazu wynika natychmiast, że jeśli ciąg $(a_n)$ jest ograniczony i $\lim\limits_{n\to\infty} |b_n| = +\infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ — nie zakłada się tu, że ciąg $(b_n)$ w ogóle ma granicę, starczy założyć, że ciąg jego wartości bezwzględnych ma granicę nieskończoną, o ciągu $(a_n)$ też nie trzeba zakładać, że jest zbieżny — wystarcza ograniczoność. ■

Teraz zajmiemy się twierdzeniem o trzech ciągach. Wiemy, że dla dostatecznie dużych $n$ zachodzi nierówność podwójna $a_n \le b_n \le c_n$ oraz że ciągi $a_n$ i $c_n$ mają wspólną granicę $g$. Mamy dowieść, że ta wspólna granice jest również granicą ciągu $(b_n)$. Załóżmy najpierw, że granica $g$ jest skończona. Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolną liczbą. Istnieje taka liczba naturalna $n_\varepsilon$, że $|a_n - g| < \varepsilon$ i $|c_n - g| < \varepsilon$ dla $n > n_\varepsilon$. Wynika stąd, że $g - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < g + \varepsilon$, zatem $|b_n - g| < \varepsilon$. Udowodniliśmy więc, że $g = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Teraz możemy się zająć przypadkiem granicy nieskończonej. Jak zwykle wystarczy zająć się jedną z dwu nieskończoności, tym razem dla odmiany $g = -\infty$. Niech $M$ będzie liczbą rzeczywistą. Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = -\infty$, więc istnieje liczba naturalna $n_M$, taka że dla $n > n_M$ zachodzi nierówność $b_n \le c_n < M$, więc w szczególności $b_n < M$. Dowód został zakończony. ■

**Uwaga 4.39 (o trzech ciągach w przypadku granic nieskończonych)**
Z dowodu wynika, że w przypadku granicy nieskończonej, np. równej $-\infty$, użycie jednego z dwóch zewnętrznych ciągów, w tym przypadku ciągu $(a_n)$, jest zbędne. Prawdziwe jest więc twierdzenie: *jeśli dla dostatecznie dużych liczb $n$ zachodzi nierówność $b_n \le c_n$ i ciąg $(c_n)$ ma granicę $-\infty$, to również ciąg $(b_n)$ ma granicę $-\infty$ i — analogicznie — jeśli dla dostatecznie dużych $n$ zachodzi nierówność $a_n \le b_n$ i granicą ciągu $(a_n)$ jest $+\infty$, to również $+\infty = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$* . ■

**Dowód twierdzenia o scalaniu.** Ten dowód jest bardzo prosty. Załóżmy, że granica $g$ jest skończona i niech $\varepsilon > 0$. Istnieją liczby $n'_\varepsilon$ i $n''_\varepsilon$, takie że dla $n > n'_\varepsilon$ zachodzi nierówność $|a_{k_n} - g| < \varepsilon$, dla $n > n''_\varepsilon$ zachodzi nierówność $|a_{l_n} - g| < \varepsilon$. Ponieważ $k_n \to \infty$ i $l_n \to_\infty$, więc istnieje $n_\varepsilon$, takie że jeśli $n > n_\varepsilon$ i $m$ jest tak dobrane, że $a_n = a_{k_m}$ lub $a_n = a_{l_m}$, to $m > n'_\varepsilon$ oraz $m > n''_\varepsilon$ i wobec tego $|a_n - g| < \varepsilon$. To oznacza, że $g = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Nieznaczne modyfikacje tego rozumowania dadzą dowód w przypadku granicy nieskończonej. ■

**Dowód twierdzenia Bolzano – Weierstrassa**. Jeśli ciąg $(a_n)$ nie jest ograniczony z góry, to można z niego wybrać podciąg ściśle rosnący: niech $n_1 = 1$; ponieważ ciąg jest nieograniczony z góry, więc wśród wyrazów następujących po $a_{n_1}$ są większe od $a_{n_1}$; niech $n_2$ będzie numerem jednego z nich — mamy więc $n_2 > n_1$ oraz $a_{n_2} > a_{n_1}$; ponieważ ciąg $(a_n)$ jest nieograniczony z góry, więc wśród wyrazów, które następują po $a_{n_2}$ jest wyraz większy niż $a_{n_2}$, wybierzmy jeden z nich i przyjmijmy, że $n_3$ jest jego numerem; mamy więc $n_3 > n_2$ oraz $a_{n_3} > a_{n_2}$; proces ten można kontynuować nieograniczenie. Całkowicie analogicznie postępujemy w przypadku ciągu nieograniczonego z dołu z tym, że teraz wybieramy podciąg ściśle malejący. Ciąg monotoniczny ma, jak wiemy, granicę. Pozostał do rozpatrzenia przypadek ciągu ograniczonego (z góry i z dołu).

Niech $c, d$ będą takimi liczbami rzeczywistymi, że dla każdego liczby naturalnej $n$ zachodzi nierówność $c \leq a_n \leq d$, $c$ jest ograniczeniem dolnym ciągu $(a_n)$ a liczba $d$ — górnym. Bez straty ogólności rozważań można przyjąć, że ciąg $(a_n)$ nie zawiera podciągu stałego — jeśli zawiera, to ten właśnie podciąg jest zbieżny. Dalej zakładamy, że $(a_n)$ nie zawiera podciągu stałego, więc że każda liczba może wystąpić jako wyraz ciągu jedynie skończenie wiele razy. Zresztą to założenie nie jest istotne dla rozumowania przeprowadzanego poniżej, jednak pozwala uniknąć pytań o szczegółową interpretację używanych sformułowań. Niech $n_1 = 1$, $c_1 = c$, $d_1 = d$. Jedna z połówek przedziału $[c, d]$ (lub obie) zawiera nieskończenie wiele wyrazów ciągu $a_n$, niech $[c_2, d_2]$ będzie tą właśnie połówką (jeśli np. w przedziale $\left[c, \frac{c+d}{2}\right]$ jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu $(a_n)$, to przyjmujemy $c_2 = c_1 = c$ i $d_2 = \frac{c+d}{2}$, jeśli w przedziale $\left[c, \frac{c+d}{2}\right]$ jest skończenie wiele wyrazów ciągu $(a_n)$, to w przedziale $\left[\frac{c+d}{2}, d\right]$ musi być ich nieskończenie wiele, w tym przypadku przyjmujemy $c_2 = \frac{c+d}{2}$ i $d_2 = d_1 = d$) i niech $n_2 > n_1$ będzie takim numerem, że $a_{n_2} \in [c_2, d_2]$. Powtarzamy przeprowadzone rozumowanie w odniesieniu do przedziału $[c_2, d_2]$ i wyrazów ciągu następujących po $a_{n_2}$. W wyniku tego otrzymujemy liczbę naturalną $n_3 > n_2$ oraz liczby rzeczywiste $c_3$, $d_3$ takie, że $c_3 \leq a_{n_3} \leq d_3$. Dla $j = 1, 2, 3$ mamy wobec tego $c_j \leq a_{n_j} \leq d_j$ i $d_j - c_j = \frac{d-c}{2^j}$ oraz $c_1 \leq c_2 \leq c_3$ i $d_1 \geq d_2 \geq d_3$. Kontynuując to postępowanie otrzymujemy niemalejący ciąg $(c_j)$ oraz nierosnący ciąg $(d_j)$, przy czym $d_j - c_j = \frac{d-c}{2^j}$. Ciągi te mają granice, bo są monotoniczne. Granice te są równe, bo $\lim\limits_{n\to\infty}(d_j - c_j) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^j}\cdot(d-c) = 0$. Ponieważ $c_j \le a_{n_j} \le d_j$ dla każdej liczby naturalnej $j$, więc — na mocy twierdzenia o trzech ciągach — ciąg $(a_{n_j})$ też ma tę samą granicę. Dowód został zakończony. ■

**Dowód wniosku z twierdzenia Bolzano – Weierstrassa** Udowodnimy teraz, że z ciągu $(a_n)$, który nie ma granicy można wybrać dwa podciągi mające różne granice. Załóżmy,że ciąg $(a_n)$ zawiera podciąg o granicy $+\infty$. Ponieważ $+\infty$ nie jest granicą ciągu $(a_n)$, więc istnieje liczba rzeczywista $B$, taka że dla nieskończenie wielu $n$ zachodzi nierówność $a_n < B$. Niech $a_{k_n}$ oznacza podciąg ciągu $(a_n)$ złożony z tych wszystkich wyrazów ciągu $a_n$, które są mniejsze niż $B$. Na mocy twierdzenia Bolzano–Weierstrassa można z ciągu $(a_{k_n})$ wybrać podciąg który ma granicę $g$. Oczywiście $g \le B$. Wobec tego w tym przypadku istnieją dwa podciągi: jeden o granicy $+\infty$, drugi o granicy $g \le B < +\infty$, co kończy dowód w tym przypadku. Jeśli ciąg $(a_n)$ zawiera podciąg o granicy $-\infty$, to teza wynika z poprzednio udowodnionego fragmentu: ciąg $(-a_n)$ zawiera dwa podciągi o różnych granicach. Pozostał do rozpatrzenia przypadek ciągu $(a_n)$, który nie zawiera podciągów o granicach nieskończonych. Ponieważ ciąg $(a_n)$ nie zawiera podciągu o granicy $+\infty$, więc jest ograniczony z góry, a ponieważ nie zawiera podciągów zbieżnych do $-\infty$, więc jest ograniczony również z dołu. Mamy więc do czynienia z ciągiem ograniczonym. Można zeń wybrać podciąg zbieżny do granicy $g$. Ponieważ $g$ nie jest granicą ciągu $(a_n)$, więc istnieje $\varepsilon > 0$, takie że poza przedziałem $(g-\varepsilon, g+\varepsilon)$ znajduje się nieskończenie wiele wyrazów ciągu. Wybieramy z tych właśnie wyrazów podciąg zbieżny. Ma on oczywiście granicę $\neq g$, dokładniej odległość między granicami tych podciągów nie może być mniejsza niż $\varepsilon$. Dowód został zakończony. ■

**Uwaga 4.40 (o odległości do $\pm\infty$)** Z punktu widzenia zbieżności wyróżnianie granic nieskończonych jest nieco sztuczne, związane głównie z tym, że nie wprowadziliśmy pojęcia odległości od $\pm\infty$. To można zrobić i to w ten sposób, by ciąg zbieżny wg. definicji podanych przez nas poprzednio do pewnej granicy, był takim ciągiem, że odległość jego wyrazu od granicy dąży do $0$. Niech $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x$ oraz $f(+\infty) = 1$ i $f(-\infty) = -1$. Można bez trudu wykazać, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = g$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(g)$, a to ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x_n) - f(g)| = 0$. Widać więc, że po przyjęciu, że odległością punktów $x$ i $y$ prostej uzupełnionej nieskończonościami jest $|f(x)-f(y)|$, będzie można rozpatrywać wyłącznie ciągi o wyrazach z przedziału $[-1,1]$ — zamiast ciągu $(x_n)$ można rozważać ciąg $(f(x_n))$. Wadą tego podejścia jest np. to, że przy przejściu od $x$ do $f(x)$ liczbie $x+y$ odpowiada $f(x+y) \neq f(x)+f(y)$. ■

**Dowód. (twierdzenia Cauchy'ego)** Zajmiemy się warunkiem Cauchy'ego. Jeżeli ciąg ma granicę skończoną $g$ i $\varepsilon > 0$, to dla dostatecznie dużych liczb naturalnych $n$ zachodzi nierówność $|a_n - g| < \frac{\varepsilon}{2}$. Jeśli więc liczby naturalne $k$ i $l$ są dostatecznie duże, to

$$|a_k - a_l| = |a_k - g + g - a_l| \leq |a_k - g| + |g - a_l| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Wykazaliśmy więc, że z istnienia granicy skończonej wynika warunek Cauchy'ego. Załóżmy teraz, że ciąg spełnia warunek Cauchy'ego. Istnieje wtedy $n_1$, takie że dla $k,l > n_1$ mamy $|a_k - a_l| < 1$. Niech $l = n_1 + 1$ i niech $k > l$. Wtedy zachodzi nierówność $|a_k| - |a_l| \leq |a_k - a_l| < 1$, zatem $|a_k| < |a_l| + 1$ . Znaczy to, że ciąg $(a_n)$ jest ograniczony. Wybierzmy z ciągu $(a_n)$ podciąg zbieżny $(a_{n_m})$. Niech $g$ oznacza jego granicę. Wykażemy, że $g$ jest granicą całego ciągu. Jeśli $\varepsilon > 0$, to dla dostatecznie dużych $k,l,m$ zachodzą nierówności $|a_k - a_l| < \frac{\varepsilon}{2}$ oraz $|a_{n_m} - g| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ponieważ $m,l$ są wybierane dowolnie, byle były dostatecznie duże, i $n_m \geq m$, więc można wybrać je tak, by $l = n_m$. Wtedy dla dostatecznie dużego $k$ zachodzi nierówność $|a_k - g| \leq |a_k - a_l| + |a_{n_m} - g| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, co oznacza, że $g = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Dowód został zakończony. ■

## Trochę zadań do domu i na ćwiczenia

**4.01** Czy prawdą jest, że nierówność $3^n - 2{,}999^n < 10000$ zachodzi dla wszystkich liczb $n \in \mathbb{N}$?

**4.02** Oblicz sześć początkowych wyrazów ciągu, którego wyraz ogólny wyraża się wzorem:

a) $a_n = \frac{n^2+2n+1}{n}$, b) $b_n = 1 - \frac{1}{10^n}$, c) $c_n = \cos(n \cdot 90°)$,

d) $d_n = (-1)^n \cdot \frac{3-n}{n}$, e) $u_n = [\sin(n \cdot 45°)]^n$, f) $v_n = \frac{n^2}{n+2}$.

**4.03** Które wyrazy ciągu $(a_n)$ są równe zeru

a) $a_n = n^2 - 5n - 6$, b) $a_n = \frac{n^2-30n+200}{n^2+n-1}$, c) $a_n = n^2 - n - 20$?

**4.04** Które wyrazy ciągu $(a_n)$ są równe liczbie: 1, $-2$, 0, jeżeli:

$a_n = \frac{n}{2}$, $a_n = 3n - 5$, $a_n = n - n^2$?

**4.05** Które wyrazy ciągu $(a_n)$ są równe liczbie: $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{4}$, jeżeli

$a_n = \frac{2n-1}{5}$, $a_n = \frac{7}{n}$, $a_n = \frac{3n-2}{n+1}$?

**4.06** Ciąg $(a_n)$ jest określony wzorem rekurencyjnym: $a_{n+1} = a_n + 8n$, przy czym $a_1 = 1$. Wykazać, że $a_n = (2n-1)^2$.

**4.07** Ciąg $(b_n)$ jest określony wzorem rekurencyjnym: $b_{n+1} = b_n + 2n + 1$, przy czym $b_1 = 1$. Wykazać, że $b_n = n^2$.

**4.08** Ciąg $(x_n)$ określony jest wzorem rekurencyjnym:

a) $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_{n+1} = x_n + \frac{1}{3} \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = 2x_n \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ x_{n+1} = \frac{4}{3}x_n \end{cases}$ d) $\begin{cases} x_1 = 0; \quad x_2 = -\frac{1}{2} \\ x_{n+2} = (x_n)^2 \cdot x_{n+1} \end{cases}$

W każdym z tych przypadków podać wzór ogólny na jego wyraz i uzasadnić jego poprawność.

**4.09** Zbadać, które wyrazy podanych ciągów są większe od danej liczby $M$:

a) $a_n = 3n + 4$, $M = 1000$; b) $b_n = n^2 - 1$, $M = 730$;

c) $c_n = \frac{10n}{n^2+1}$, $M = 4$; d) $d_n = \frac{2n+5}{2n+3}$, $M = \frac{3}{4}$.

**4.10** Zbadać, które wyrazy podanych ciągów są mniejsze od danej liczby $m$:

a) $a_n = \frac{1}{n}$, $m = \frac{1}{100}$; b) $b_n = \frac{3n}{n^2+1}$, $m = 0{,}001$, c) $c_n = \frac{100n}{100+n^2}$, $m = \frac{23}{53}$.

**4.11** Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej $n$ i dowolnych liczb rzeczywistych $a$, $b$ zachodzą równości:

(i) $(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-2}a^2b^{n-2} + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$,

gdzie

$\binom{c}{k} = \frac{c(c-1)(c-2)\ldots\big(c-(k-1)\big)}{k!}$ dla każdego $c \in \mathbb{R}$ i każdego $k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$,

(ii) $a^n - b^n = (a-b)\big(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\big)$.

(iii) $a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)\cdot\big(a^{2n}-a^{2n-1}b+a^{2n-2}b^2-a^{2n-3}b^3+ +\cdots+a^2b^{2n-2}-ab^{2n-1}+b^{2n}\big)$.

**4. 12** Niech wyrazy ciągu $(a_n)$ spełniają równanie: $a_{n+1}=qa_n$. Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej $n$ zachodzi równość $a_n=a_1q^{n-1}$. Udowodnić, że wzór

$$a_1+a_2+...+a_n=a_1\frac{1-q^n}{1-q}$$

zachodzi dla dowolnej liczby $q\neq 1$ i dowolnej liczby naturalnej $n\geq 1$.

**4. 13** Zapisać liczbę $0{,}12345123451234512345\ldots=0,(12345)$ jako iloraz dwu liczb całkowitych.

**4. 14** Co jest większe: liczba 1 czy liczba $0{,}99999\ldots=0{,}(9)$ ? — odpowiedź dokładnie uzasadnić.

**4. 15** Dowieść, że jeśli dla każdej liczby naturalnej $n$ zachodzi równość $a_{n+1}=qa_n+p$, gdzie $p$ oraz $q$ są dowolnymi, niezależnymi od $n$ liczbami rzeczywistymi, to dla każdej liczby naturalnej $n$ zachodzi równość $a_n=\frac{p}{1-q}+(a_1-\frac{p}{1-q})q^{n-1}$. W szczególności, jeśli $a_1=\frac{p}{1-q}$ , to wyraz ciągu $(a_n)$ jest niezależny od $n$.

**4. 16** Wykazać, że ciąg $(a_n)$ jest zbieżny do $0$ wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $(|a_n|)$ jest zbieżny do $0$.

**4. 17** Wykazać, że iloczyn $(a_nb_n)$ ciągu $(a_n)$ zbieżnego do $0$ i ciągu ograniczonego $(b_n)$ jest ciągiem zbieżnym do liczby $0$.

**4. 18** Znaleźć wszystkie takie liczby naturalne $n$, że $\frac{n}{n^2+1}<\frac{1}{7}$.

**4. 19** Wskazać jakąkolwiek liczbę naturalną $k$ taką, że jeśli $n>k$, to $\frac{n+666}{7n^2-13}<\frac{1}{33}$.

**4. 20** Znaleźć wszystkie takie liczby naturalne $n$, że $\sqrt{n^2+1}-n<\frac{1}{7}$.

**4. 21** Wskazać jakąkolwiek liczbę naturalną $k$ taką, że jeśli $n\geq k$, to zachodzi nierówność $\left|\frac{2n^2+15n+2007}{n^2-2006n+13}-2\right|<\frac{1}{4}$ lub wykazać, że taka liczba nie istnieje.

**4. 22** Wskazać jakąkolwiek liczbę naturalną $k$ taką, że jeśli $n\geq k$, to zachodzi nierówność $\frac{n^2+5n}{1{,}2^n}<\frac{1}{10}$ lub wykazać, że taka liczba nie istnieje.

**4. 23** Wskazać jakąkolwiek liczbę naturalną $k$ taką, że jeśli $n\geq k$, to zachodzi nierówność $\frac{\sin n}{\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ lub wykazać, że taka liczba nie istnieje.

**4. 24** Wskazać jakąkolwiek liczbę naturalną $k$ taką, że jeśli $n\geq k$, to zachodzi nierówność $\frac{\sin n}{\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$ lub wykazać, że taka liczba nie istnieje.

**4. 25** Wskazać jakąkolwiek liczbę naturalną $k$ taką, że jeśli $n\geq k$, to zachodzi nierówność $\frac{\sin(1/n)}{\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ lub wykazać, że taka liczba nie istnieje.

**4. 26** Wskazać jakąkolwiek liczbę naturalną $k$ taką, że jeśli $n\geq k$, to zachodzi nierówność $\frac{\sin(1/n)}{\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$ lub wykazać, że taka liczba nie istnieje.

**4. 27** Wskazać jakąkolwiek liczbę naturalną $k$ taką, że jeśli $n \geq k$, to zachodzi nierówność $\sin\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n^2}$ lub wykazać, że taka liczba nie istnieje.

**4. 28** Wskazać jakąkolwiek liczbę naturalną $k$ taką, że jeśli $n \geq k$, to zachodzi nierówność $\sin\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n+1} > \frac{1}{n^3}$; lub wykazać, że taka liczba nie istnieje.

**4. 29** Wskazać jakąkolwiek liczbę naturalną $k$ taką, że jeśli $n \geq k$, to zachodzi nierówność $\sqrt{n+2} - \sqrt{n} < \frac{1}{n}$ lub wykazać, że taka liczba nie istnieje.

**4. 30** Wskazać jakąkolwiek liczbę naturalną $k$ taką, że jeśli $n \geq k$, to zachodzi nierówność $\sqrt{n+2} - \sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$ lub wykazać, że taka liczba nie istnieje.

**4. 31** Wskazać jakąkolwiek liczbę naturalną $k$ taką, że jeśli $n \geq k$, to zachodzi nierówność $\binom{2n}{n} > n^2$ lub wykazać, że taka liczba nie istnieje.

**4. 32** Wskazać jakąkolwiek liczbę naturalną $k$ taką, że jeśli $n \geq k$, to zachodzi nierówność $\binom{2n}{n} < n^2$ lub wykazać, że taka liczba nie istnieje.

**4. 33** Wskazać jakąkolwiek liczbę naturalną $k$ taką, że jeśli $n \geq k$, to zachodzi nierówność $\binom{n}{2} < \frac{1}{3}n^2$ lub wykazać, że taka liczba nie istnieje.

**4. 34** Wskazać jakąkolwiek liczbę naturalną $k$ taką, że jeśli $n \geq k$, to zachodzi nierówność $\binom{n}{2} > \frac{1}{3}n^2$ lub wykazać, że taka liczba nie istnieje.

**4. 35** Wskazać jakąkolwiek liczbę naturalną $k$ taką, że jeśli $n \geq k$, to zachodzi nierówność $\binom{n}{2} < \sqrt{2^n}$ lub wykazać, że taka liczba nie istnieje.

**4. 36** Wskazać jakąkolwiek liczbę naturalną $k$ taką, że jeśli $n \geq k$, to zachodzi nierówność $n! < \sqrt{n^n}$ lub wykazać, że taka liczba nie istnieje.

**4. 37** Wskazać jakąkolwiek liczbę naturalną $k$ taką, że jeśli $n \geq k$, to zachodzi nierówność $n! > \sqrt{n^n}$ lub wykazać, że taka liczba nie istnieje.

**4. 38** Wskazać jakąkolwiek liczbę naturalną $k$ taką, że jeśli $n \geq k$, to zachodzi nierówność $n! < 100^n$ lub wykazać, że taka liczba nie istnieje.

**4. 39** Wskazać jakąkolwiek liczbę naturalną $k$ taką, że jeśli $n \geq k$, to zachodzi nierówność $n! > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ lub wykazać, że taka liczba nie istnieje.

**4. 40** Wskazać jakąkolwiek liczbę naturalną $k$ taką, że jeśli $n \geq k$, to zachodzi nierówność $\ln n < \sqrt[10]{n}$ lub wykazać, że taka liczba nie istnieje.

**4. 41** Wykazać, że dla $n > 1000000$ zachodzi nierówność $\sqrt[n]{2} < 1.000001$.

**4. 42** Wykazać, że dla dostatecznie dużych liczb naturalnych $n$ zachodzą nierówności: $n! > 1000000^n$ oraz $1.000001^n > n^{1000000}$. W obu przypadkach sprawdzić, że dla $n = 2, 3, 4, 5$ zachodzi nierówność przeciwna i wskazać liczbę $n_0$ (nie szukać najmniejszej!) taką, że dla $n > n_0$ zachodzą nierówności wypisane w pierwszym zdaniu.

**4. 43** W kraju dotkniętym ostrym kryzysem inflacja wynosi 5% miesięcznie. Oblicz wskaźnik inflacji rocznej z dokładnością do 1%. Do oszacowania można użyć dwumian Newtona.

**4. 44** Zakładając, że średni przyrost naturalny na Ziemi równy jest 1,3% rocznie obliczyć po jakim czasie liczba ludzi na planecie się podwoi.

**4. 45** Wypisać trzy pierwsze wyrazy ciągu $(a_n)$. Obliczyć granicę ciągu $(a_n)$, o ile istnieje, jeśli $a_n =$

$\alpha$. $\frac{1+n+3n^7+n^2}{n^2-n+13}$;

$\beta$. $\frac{1+n+3n+n^2}{n^2-n+13}$;

$\gamma$. $\frac{1+n+3n^7+n^2}{n^2-n^8+13}$;

$\delta$. $\sqrt{n+13}-\sqrt{n}$;

a. $\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}$;

b. $\sqrt{n+\sqrt[3]{n}}-\sqrt{n}$;

c. $\sqrt[n]{3^n+\sin n}$;

d. $\sqrt[n]{3^n-2^n}$;

e. $1+\dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$;

f. $\sin n$;

g. $\dfrac{n^2+n+1000}{n^{1000}+999n-1}$;

h. $\dfrac{\ln\left(n^2+n+1000\right)}{\ln\left(n^{1000}+999n-1\right)}$;

i. $\dfrac{3^n-2^n}{3^n+n^2\cdot 2^n}$;

j. $\dfrac{3^n+2^n\cdot\sin n}{3^{n+1}+n^{2002}}$

k. $\dfrac{10\cdot 11\cdot 12\cdot\ldots\cdot(n+9)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}$;

l. $\sqrt[n]{n!}$;

m. $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n}\right)$;

n. $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

o. $\frac{n}{2^n}$;

p. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{13}}{2^n}$;

q. $\sqrt{1+2^{(-1)^n}}$;

r. $\sqrt[n]{1^k+2^k+\cdots+n^k}$;

s. $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$;

t. $\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3-n+13}$

u. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[k]{1+\frac{1}{n}}-1\right)$, tu $k\in\mathbb{N}$;

v. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$

**4. 46** Znaleźć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ciągu $(a_n)$, o ile istnieje, jeśli $a_n =$

(1) $\left(1+\frac{2}{n+2}\right)^n$,

(2) $\left(0.999999+\frac{1}{n}\right)^n$,

(3) $\left(\frac{n^2+5n-3}{n^2+13}\right)^n$,

(4) $\left(1.000001+\frac{1}{n}\right)^n$,

(5) $\frac{1000000^n}{n!}$,

(6) $\frac{n^{100000}}{1.000001^n}$.

(7) $\left(1+\sin\dfrac{1}{n^2}\right)^n$;

(8) $\left(1+\dfrac{\sin n}{n}\right)^n$.

**4. 47** Wykazać, że ciąg $(a_n)$ ma granicę i zbadać, czy jest ona skończona, czy jest równa $0$, jeśli ciąg $(a_n)$ zdefiniowany jest wzorem $a_n =$

(a) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}$.

(b) $1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$.

(c) $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$.

(d) $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$.

(e) $\sqrt{6+a_{n-1}}$ dla $n=1,2,3,\ldots$ przy czym $a_0$ jest tu dowolną liczbą rzeczywistą nieujemną, znaleźć $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(e) $\frac{1}{2}\left(a_{n-1}+\frac{5}{a_{n-1}}\right)$ dla $n=1,2,3,\ldots$ przy czym $a_0$ jest tu dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią, znaleźć $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

*Wskazówka:* wykazać, że $a_{n+1} \geq \sqrt{5}$ oraz $a_{n+1} \geq a_{n+2}$ dla $n = 0, 1, 2 \ldots$.

(g)* $\left(1+\frac{1}{1^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$.

*Wskazówka:* skorzystać z tego, że $1 + x \leq e^x$ dla każdej liczby $x$.

(h)* $\left(1-\frac{1}{2^1}\right)\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{2^3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$, czy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$?

*Wskazówka:* wykazać, że dla $x < 1$ zachodzi nierówność

$$1 - x = \frac{1}{1+\frac{x}{1-x}} \geq e^{-x/(1-x)}.$$

**4. 48** Znaleźć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ciągu $(a_n)$, jeśli $a_n =$

(1) $\left(1+\sqrt[n]{2}\right)^n$; (2) $\left(1+\frac{\sqrt[n]{2}}{n}\right)^n$; (3) $\frac{\ln n}{n}$;

(10) $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$; (11) $\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{n^5}}\right)^n$; (12) $\left(1+\frac{2n}{n^2-n+1}\right)^n$;

(4) $\frac{e^{b_n}-1}{b_n}$, gdzie $b_n$ oznacza $n-ty$ wyraz pewnego ciągu zbieżnego do $0$, przy czym $b_n \neq 0$ dla $n = 1, 2, \ldots$

*Wskazówka:* dla $x < 1$ zachodzi nierówność $1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}$;

(5) $\frac{\sqrt[n]{2}-1}{1/n}$; (6) $\left(\frac{1+\sqrt[n]{2}}{2}\right)^n$; (7) $n - \ln n$;

(8) $\frac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3-\frac{1}{4}n^4}{n^3}$; (9) $\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}$;

**4. 49** Znaleźć granicę ciągu $(a_n)$, jeśli $a_0 = \frac{1}{10}$ oraz $a_{n+1} =$

(1) $\sin a_n$; (2) $-a_n + \frac{1}{2}a_n^3$; (3) $2^{a_n} - 1$

– istnienie poszukiwanej granicy należy oczywiście wykazać!

**4. 50** Czy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ istnieje? Jeśli ta granica istnieje, to czy jest skończona?

(1) $a_n = \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\frac{1}{\sqrt[4]{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$; (2) $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^4}+\cdots+\frac{1}{n^n}$;

(3) $a_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot n^n}$; (4) $a_n = \frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}$;

(5) $a_n = 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n}$.

**4. 51** Znaleźć $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n$ dla $q \in (-1, 1)$, jeśli ta granica istnieje.

**4. 52** Znaleźć $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}\right)$ dla $q \in (-1, 1)$, jeśli ta granica istnieje.

**4. 53** Znaleźć $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+2q+3q^2+\cdots+nq^{n-1}\right)$ dla $q \in (-1, 1)$, jeśli ta granica istnieje.

**4. 54** Niech $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$, $a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, … Wykazać, że ciąg $(a_n)$ ma skończoną granicę.

**4. 55** Niech $x \in \mathbb{R}$ będzie liczbą dodatnią. W zależności od $x$ znaleźć

$$\lim_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdot\ldots\cdot(1+x^{2^n}).$$