Elementy geometrii analitycznej, c.d.

Poprawiłem 10 października 2012, godz 17:20

Znajdziemy teraz wzór na odległość punktu (x_0, y_0) od prostej ℓ opisanej równaniem $ax+by+c=0$. Oczywiście po to, by to równanie przedstawiało prostą trzeba założyć, że wektor $[a,b]$ ma co najmniej jedną współrzędną różną od 0. Oznacza to, że $a^2+b^2>0$.

Załóżmy, że ruszamy z punktu (x_0, y_0) i poruszamy się ze stałą prędkością **wektorową** $[a,b]$. Po czasie t przemieścimy się o wektor $t\cdot[a,b]$, znajdziemy się więc w punkcie $(x_0,y_0)+t\cdot[a,b]=(x_0+at, y_0+bt)$. Ponieważ poruszamy się w kierunku prostopadłym do prostej ℓ, więc prędzej czy później natrafimy na nią — w tym przypadku może zdarzyć się, że $t<0$, co oznaczałoby, że byliśmy już w przeszłości na prostej i oddalamy się od niej. Załóżmy, że po czasie t_1 trafiliśmy w punkt prostej ℓ. Mamy więc $0=a(x_0+t_1a)+b(y_0+t_1b)+c=ax_0+by_0+c+t_1(a^2+b^2)$, a stąd wnioskujemy, że $t_1=-\frac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}$. Wobec tego przemieszczenie równe jest $t_1\cdot[a,b]=-\frac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}\cdot[a,b]$, a to oznacza, że długość przebytej drogi, czyli odległość punktu (x_0,y_0) od prostej ℓ równa jest

$$\left|-\frac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}\right|\cdot\sqrt{a^2+b^2}=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\,.$$

Rozumując analogicznie możemy otrzymać wzór na odległość punktu od płaszczyzny, szczegóły dowodu pozostawiamy czytelnikom.

Twierdzenie 3.1 (o odległości punktu od płaszczyzny)
Odległość punktu (x_0,y_0,z_0) od płaszczyzny o równaniu $ax+by+cz+d=0$ równa jest

$$\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\,.\ \blacksquare$$

Wypada tu stwierdzić, że równanie

$$0=ax+by+cz+d=a\left(x+\tfrac{ad}{a^2+b^2+c^2}\right)+b\left(y+\tfrac{bd}{a^2+b^2+c^2}\right)+\left(z+\tfrac{cd}{a^2+b^2+c^2}\right),$$

czyli równanie

$$[a,b,c]\cdot\left[x-\frac{-ad}{a^2+b^2+c^2},\, y-\frac{-bd}{a^2+b^2+c^2},\, z-\frac{-cd}{a^2+b^2+c^2}\right]=0\,,$$

opisuje płaszczyznę, która przechodzi przez punkt $\left(\frac{-ad}{a^2+b^2+c^2}, \frac{-bd}{a^2+b^2+c^2}, \frac{-cd}{a^2+b^2+c^2}\right)$ i jest prostopadła do wektora $[a,b,c]$ — suma wszystkich prostych prostopadłych do prostej ℓ przechodzących przez ustalony punkt $P\in\ell$ jest płaszczyzną przechodzącą przez punkt P prostopadłą do prostej ℓ.

Zajmiemy się teraz wzorem na pole równoległoboku o wierzchołkach

$$(0,0)\,,\quad (x_1,y_1)\,,\quad (x_1+x_2,y_1+y_2)\,,\quad (x_2,y_2)\,,$$

więc równoległoboku rozpiętego przez wektory $\vec{\mathbf{v}}_1=[x_1,y_1]$ i $\vec{\mathbf{v}}_2=[x_2,y_2]$. Jak wiemy, jest ono równe

$\sqrt{\|\vec{\mathbf{v}}_1\|^2\cdot\|\vec{\mathbf{v}}_2\|^2-(\vec{\mathbf{v}}_1\cdot\vec{\mathbf{v}}_2)^2}=\sqrt{(x_1^2+y_1^2)\cdot(x_2^2+y_2^2)-(x_1x_2+y_1y_2)^2}=$
$=\sqrt{x_1^2\cdot x_2^2+y_1^2\cdot x_2^2+x_1^2\cdot y_2^2+y_1^2\cdot y_2^2-(x_1^2x_2^2+2x_1x_2y_1y_2+y_1^2y_2^2)}=$
$=\sqrt{x_1^2\cdot y_2^2+y_1^2\cdot x_2^2-2x_1x_2y_1y_2}=\sqrt{(x_1\cdot y_2-y_1\cdot x_2)^2}=|x_1\cdot y_2-y_1\cdot x_2|=$
$=|\begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}|\,.$

Wykazaliśmy więc, że zachodzi następujące

Twierdzenie 3.2
Pole równoległoboku rozpiętego przez wektory $\vec{\mathbf{v}}_1=[x_1,y_1]$ i $\vec{\mathbf{v}}_2=[x_2,y_2]$ jest równe

$$|\begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}|\,.\ \blacksquare$$

Wniosek 3.3
Wektory $\vec{\mathbf{v}}_1=[x_1,y_1]$ i $\vec{\mathbf{v}}_2=[x_2,y_2]$ są współliniowe (czyli leżą na jednej prostej) wtedy i tylko wtedy, gdy $\begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}=0\,.$ $\blacksquare$
Przyjmujemy, że wektor zerowy jest współliniowy z każdym wektorem.

Znajdziemy teraz obraz punktu (x,y) w obrocie o kąt β wokół punktu $(0,0)$. Niech $r=\sqrt{x^2+y^2}$ i niech α oznacza taki kąt, że $x=r\cos\alpha$ i $y=r\sin\alpha$. Po obrocie o kąt β wokół punktu (0,0) punkt $(x,y)=(r\cos\alpha,r\sin\alpha)$ trafia w punkt
$(x',y')=\big(r\cos(\alpha+\beta),r\sin(\alpha+\beta)\big)=$

$$=\big(r\cos\alpha\cos\beta-r\sin\alpha\sin\beta,r\sin\alpha\cos\beta+r\cos\alpha\sin\beta\big)=$$
$$=(x\cos\beta-y\sin\beta,x\sin\beta+y\cos\beta)\,.$$

Udowodnimy teraz twierdzenie o zachowywaniu wartości wyznacznika $\begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}$ przy obrotach wokół punktu $(0,0)$.

Twierdzenie 3.4 (o zachowywaniu wartości wyznacznika pary wektorów)
Jeśli obrazem punktu (x_1,y_1) w obrocie o kąt β wokół punktu $(0,0)$ jest punkt (x_1',y_1'), a obrazem punktu (x_2,y_2) — punkt (x_2',y_2'), to

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1' & y_1'\\ x_2' & y_2'\end{vmatrix}\,.$$

Dowód. Mamy $x_1'=x_1\cos\beta-y_1\sin\beta$, $y_1'=x_1\sin\beta+y_1\cos\beta$,
$x_2'=x_2\cos\beta-y_2\sin\beta$, $y_2'=x_2\sin\beta+y_2\cos\beta$. Wynika stąd, że

$\begin{vmatrix} x_1' & y_1' \\ x_2' & y_2' \end{vmatrix} = x_1'y_2' - y_1'x_2' = (x_1\cos\beta - y_1\sin\beta)(x_2\sin\beta + y_2\cos\beta) -$

$-(x_1\sin\beta + y_1\cos\beta)(x_2\cos\beta - y_2\sin\beta) = x_1x_2(\cos\beta\sin\beta - \sin\beta\cos\beta) +$

$+ x_1y_2(\cos^2\beta + \sin^2\beta) - y_1x_2(\sin^2\beta + \cos^2\beta) + y_1y_2(\sin\beta\cos\beta - \cos\beta\sin\beta) =$

$= x_1y_2 - y_1x_2 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$. Dowód został zakończony. ■

Definicja 3.5 (dodatnio zorientowanej pary wektorów)
Uporządkowana para wektorów niewspółliniowych $\vec{\mathbf{v}}_1 = [x_1, y_1]$, $\vec{\mathbf{v}}_2 = [x_2, y_2]$ jest dodatnio zorientowana wtedy i tylko wtedy, gdy $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} > 0$, w przypadku przeciwnym para ta jest zorientowana ujemnie. ■

Załóżmy, że uporządkowana para wektorów niewspółliniowych $\vec{\mathbf{v}}_1 = [x_1, y_1]$, $\vec{\mathbf{v}}_2 = [x_2, y_2]$ jest dodatnio zorientowana. Możemy założyć, że wektor $\vec{\mathbf{v}}_1 = [x_1, y_1]$ jest zaczepiony w punkcie $(0,0)$, tzn. ten wektor zaczyna się w punkcie $\mathbf{0} = (0,0)$, a kończy się w punkcie (x_1, y_1). Analogicznie wektor $\vec{\mathbf{v}}_2 = [x_2, y_2]$ zaczyna się w punkcie $\mathbf{0} = (0,0)$, a kończy w punkcie (x_2, y_2). Obróćmy oba o kąt β wokół punktu $\mathbf{0}$ tak, by obraz (x_1', y_1') punktu (x_1, y_1) znalazł się na dodatniej półosi OX. Oznacza to, że $x_1' > 0$ i $y_1' = 0$. Niech (x_2', y_2') będzie obrazem punktu (x_2, y_2) w tym obrocie. Mamy $0 < \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1' & y_1' \\ x_2' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1' & 0 \\ x_2' & y_2' \end{vmatrix} = x_1'y_2'$, więc $y_2' > 0$. Wynika stąd, że jeśli para wektorów $\vec{\mathbf{v}}_1$, $\vec{\mathbf{v}}_2$ jest dodatnio zorientowana, to pierwszy należy obracać w kierunku **przeciwnym** do ruchu wskazówek zegara, by trafić na półprostą, na której leży drugi (oczywiście mowa o obrocie o kąt mniejszy niż π radianów). Oczywiście w przypadku pary zorientowanej ujemnie należy pierwszy wektor obracać **zgodnie** z ruchem wskazówek zegara, by trafić na półprostą, na której leży drugi wektor.

Twierdzenie 3.6 (o objętości równoległościanu rozpiętego przez wektory $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^3$)
Niech $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{\mathbf{w}} = (w_1, w_2, w_3)$. Wtedy objętość równoległościanu rozpiętego przez wektory $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}$ (zaczepione w punkcie $\mathbf{0}$) równa jest

$$|(\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}) \cdot \vec{\mathbf{w}}| = \left| \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \right|,$$

a jej kwadrat równy jest

$$\begin{vmatrix} \vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{u}} & \vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}} & \vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{w}} \\ \vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{u}} & \vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{v}} & \vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{w}} \\ \vec{\mathbf{w}}\cdot\vec{\mathbf{u}} & \vec{\mathbf{w}}\cdot\vec{\mathbf{v}} & \vec{\mathbf{w}}\cdot\vec{\mathbf{w}} \end{vmatrix}.$$

Dowód. Objętość równoległościanu równa jest iloczynowi pola podstawy przez jego wysokość. Niech podstawą będzie równoległobok rozpięty przez wektory $\vec{\mathbf{u}}$ i $\vec{\mathbf{v}}$. Pole tego równoległoboku to $\|\vec{\mathbf{u}}\times\vec{\mathbf{v}}\|$. Trzeba więc znaleźć wysokość. Wektor $\vec{\mathbf{u}}\times\vec{\mathbf{v}}$ jest prostopadły do każdego z wektorów $\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}}$, więc wysokość jest odcinkien równoległym do wektora $\vec{\mathbf{u}}\times\vec{\mathbf{v}}$. Innymi słowy należy zrzutować prostopadle wektor $\vec{\mathbf{w}}$ na prostą wyznaczoną przez wektor $\vec{\mathbf{u}}\times\vec{\mathbf{v}}$. Ten rzut to wektor $\frac{\vec{\mathbf{w}}\cdot(\vec{\mathbf{u}}\times\vec{\mathbf{v}})}{\|\vec{\mathbf{u}}\times\vec{\mathbf{v}}\|^2}\vec{\mathbf{u}}\times\vec{\mathbf{v}}$. Jego długość, czyli wysokość równoległościanu, to $\left|\frac{\vec{\mathbf{w}}\cdot(\vec{\mathbf{u}}\times\vec{\mathbf{v}})}{\|\vec{\mathbf{u}}\times\vec{\mathbf{v}}\|}\right|$. Wobec tego objętość równa jest

$$\|\vec{\mathbf{u}}\times\vec{\mathbf{v}}\|\cdot\left|\frac{\vec{\mathbf{w}}\cdot(\vec{\mathbf{u}}\times\vec{\mathbf{v}})}{\|\vec{\mathbf{u}}\times\vec{\mathbf{v}}\|}\right| = \left|\vec{\mathbf{w}}\cdot(\vec{\mathbf{u}}\times\vec{\mathbf{v}})\right|,$$

co mieliśmy udowodnić. Równość $(\vec{\mathbf{u}}\times\vec{\mathbf{v}})\cdot\vec{\mathbf{w}} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$ wykazujemy bez trudu rozwijając wyznacznik względem trzeciego wiersza (po przypomnieniu sobie definicji iloczynu wektorowego).

Równość $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{u}} & \vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}} & \vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{w}} \\ \vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{u}} & \vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{v}} & \vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{w}} \\ \vec{\mathbf{w}}\cdot\vec{\mathbf{u}} & \vec{\mathbf{w}}\cdot\vec{\mathbf{v}} & \vec{\mathbf{w}}\cdot\vec{\mathbf{w}} \end{vmatrix}$ wykażemy później, gdy poznamy więcej własności wyznaczników. ■

Wniosek 3.7

Trzy wektory $\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{w}}\in\mathbb{R}^3$, zaczepione w punkcie $\vec{\mathbf{0}}=(0,0,0)$ leżą w jednej płaszczyźnie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{u}} & \vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}} & \vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{w}} \\ \vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{u}} & \vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{v}} & \vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{w}} \\ \vec{\mathbf{w}}\cdot\vec{\mathbf{u}} & \vec{\mathbf{w}}\cdot\vec{\mathbf{v}} & \vec{\mathbf{w}}\cdot\vec{\mathbf{w}} \end{vmatrix} = 0\,. \ ■$$

Opisaliśmy poprzednio obrót na płaszczyźnie wokół punktu $(0,0)$. To pozwala opisać natychmiast obrót w przestrzeni wokół osi OZ o kąt β: obrazem punktu (x,y,z) jest punkt (x',y',z') przy czym $x'=x\cos\beta-y\sin\beta$, $y'=x\sin\beta+y\cos\beta$, $z'=z$. Obrazem punktu (x,y,z) w obrocie o kąt β wokół osi OY jest punkt $(x\cos\beta-z\sin\beta,y,x\sin\beta+z\cos\beta)$. Wreszcie obrazem punktu (x,y,z) w obrocie o kąt β wokół osi OX jest punkt $(x,y\cos\beta-z\sin\beta,y\sin\beta+z\cos\beta)$.

Możemy teraz udowodnić (ale na wykładzie ten dowód pominąłem)

Twierdzenie 3.8 (o zachowaniu wartości wyznacznika trójki wektorów)

Jeśli w obrocie wokół jednej z osi obrazem wektora $\vec{\mathbf{v}}_1=[x_1,y_1,z_1]$ jest wektor $\vec{\mathbf{v}}_1'=[x_1',y_1',z_1']$, obrazem wektora $\vec{\mathbf{v}}_2=[x_2,y_2,z_2]$ — wektor $\vec{\mathbf{v}}_2'=[x_2',y_2',z_2']$, a wektora $\vec{\mathbf{v}}_3 = [x_3, y_3, z_3]$ — wektor $\vec{\mathbf{v}}'_3 = [x'_3, y'_3, z'_3]$, to

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 & z'_1 \\ x'_2 & y'_2 & z'_2 \\ x'_3 & y'_3 & z'_3 \end{vmatrix}$$

Dowód. We wszystkich trzech przypadkach jest taki sam. Przeprowadzimy go dla obrotu wokól osi OZ korzystając z łatwych do wykazania własności wyznaczników, które jednak uzasadnimy później. Mamy

$$\begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 & z'_1 \\ x'_2 & y'_2 & z'_2 \\ x'_3 & y'_3 & z'_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1\cos\beta - y_1\sin\beta & x_1\sin\beta + y_1\cos\beta & z_1 \\ x_2\cos\beta - y_2\sin\beta & x_2\sin\beta + y_2\cos\beta & z_2 \\ x_3\cos\beta - y_3\sin\beta & x_3\sin\beta + y_3\cos\beta & z_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \cos\beta \begin{vmatrix} x_1 & x_1\sin\beta + y_1\cos\beta & z_1 \\ x_2 & x_2\sin\beta + y_2\cos\beta & z_2 \\ x_3 & x_3\sin\beta + y_3\cos\beta & z_3 \end{vmatrix} - \sin\beta \begin{vmatrix} y_1 & x_1\sin\beta + y_1\cos\beta & z_1 \\ y_2 & x_2\sin\beta + y_2\cos\beta & z_2 \\ y_3 & x_3\sin\beta + y_3\cos\beta & z_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \cos\beta\sin\beta \begin{vmatrix} x_1 & x_1 & z_1 \\ x_2 & x_2 & z_2 \\ x_3 & x_3 & z_3 \end{vmatrix} + \cos^2\beta \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} -$$

$$- \sin^2\beta \begin{vmatrix} y_1 & x_1 & z_1 \\ y_2 & x_2 & z_2 \\ y_3 & x_3 & z_3 \end{vmatrix} - \sin\beta\cos\beta \begin{vmatrix} y_1 & y_1 & z_1 \\ y_2 & y_2 & z_2 \\ y_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{\text{powtórzone}}{\underset{\text{kolumny}}{=\!=\!=}} \cos^2\beta \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} - \sin^2\beta \begin{vmatrix} y_1 & x_1 & z_1 \\ y_2 & x_2 & z_2 \\ y_3 & x_3 & z_3 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{\text{przestawiamy}}{\underset{\text{kolumny}}{=\!=\!=}} \cos^2\beta \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} + \sin^2\beta \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \blacksquare$$

Definicja 3.9 (trójki wektorów dodatnio zorientowanej)
Uporządkowana trójka niewspółpłaszczyznowych (tj. nieleżących w jednej płaszczyźnie) wektorów $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \vec{\mathbf{v}}_3 \in \mathbb{R}^3$ jest dodatnio zorientowana w przestrzeni trójwymiarowej wtedy i tylko wtedy, gdy $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} > 0$. $\blacksquare$

Z definicji wynika łatwo, że jeśli trójka $(\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \vec{\mathbf{v}}_3)$ jest układem dodatnio zorientowanym, to trójka $(\vec{\mathbf{v}}_2, \vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_3)$ układem dodatnio zorientowanym nie jest — zmiana kolejności wierszy powoduje zmianę znaku wyznacznika.

Można i należy sobie wyobrażać, że układ trzech wzajemnie prostopadłych wektorów jest dodatnio zorientowany, gdy można ten układ obrócić (kilka razy, np. trzy wokół różnych osi) wokół osi układu współrzędnych tak, by po tych obrotach wektor $\vec{\mathbf{v}}'_1$ był *zgodnie równoległy* (czyli równoległy i skierowany w tę samą stronę) do wektora $\vec{i} = (1,0,0)$, wektor $\vec{\mathbf{v}}'_2$ — do wektora $\vec{j} = (0,1,0)$ i wektor $\vec{\mathbf{v}}'_3$ — do wektora

$\vec{k} = (0,0,1)$. Temu stwierdzeniu można nadać bardzo precyzyjne znaczenie i wtedy je udowodnić.

Gdy wektory nie są prostopadłe, to za pomocą kilku obrotów przekształcamy pierwszy z trójki w półprostą wyznaczoną przez $\vec{i} = (1,0,0)$, drugi trafia w półpłaszczyznę $\{(x,y,z)\colon \quad y>0, z=0\}$. Wyznacznik ma wtedy postać $\begin{vmatrix} x_1' & 0 & 0 \\ x_2' & y_2' & 0 \\ x_3' & y_3' & z_3' \end{vmatrix}$, jest więc dodatni, gdy $z_3 > 0$.

Dodajmy, że iloczyn wektorowy wektorów $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2 \in \mathbb{R}^3$ można zdefiniować geometrycznie. Oczywiście mimo użycia innych słów definiujemy dokładnie ten sam wektor. Iloczyn wektorowy $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ jest **wektorem**

prostopadłym do obu wektorów $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2$,

o długości równej polu równoległoboku rozpiętego przez te wektory,

o takim zwrocie, że trójka $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \vec{\mathbf{v}}_1 \times \vec{\mathbf{v}}_2$ *jest dodatnio zorientowana.*

Zadania

1. Na paraboli $y = x^2$ znaleźć punkt leżący najbliżej punktu $(0,2)$. Znaleźć kosinus kąta między wektorem $[1,0]$ i wektorem łączącym punkt $(0,2)$ ze znalezionym punktem.

2. Niech $A = (-3,-3)$, $B = (5,-1)$, $C = (1,5)$. Znaleźć środek okręgu opisanego na trójkącie ABC i pole tego trójkąta. Wyjaśnić, czy trójkąt jest ostrokątny, prostokątny czy rozwartokątny.

3. Niech $A = (1,2)$, $B = (5,4)$, $C = (3,8)$. Znaleźć środek okręgu opisanego na trójkącie ABC i pole tego trójkąta. Wyjaśnić, czy trójkąt jest ostrokątny, prostokątny czy rozwartokątny.

4. Obliczyć wyznaczniki $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ -1 & 3 & 9 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & -5 \\ 2 & 111 & -1 \end{vmatrix}$.

5. (1) Niech $\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ i $\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$. Znaleźć współrzędne wektora $\vec{\mathbf{w}} := \frac{1}{9}\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}$.

Znaleźć długości $\|\vec{\mathbf{u}}\|$ i $\|\vec{\mathbf{v}}\|$ wektorów $\vec{\mathbf{u}}$ i $\vec{\mathbf{v}}$.

(2) Znaleźć kosinusy obu kątów, które tworzą płaszczyzny o równaniach: $6x + 6y + 3z = 15$ i $x + 4y + 8z = 13$.

(3) Niech $A = (1,1,1)$, $B = A + \frac{1}{3}\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{w}}$, $C = A + \frac{1}{3}\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{w}} + \frac{1}{3}\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}$, $D = A + \frac{1}{3}\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}$.

Znaleźć pole czworokąta $ABCD$ i jego środek symetrii, jeśli ten czworokąt jest środkowosymetryczny.

6. (1) Niech $\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ i $\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Znaleźć współrzędne wektora $\vec{\mathbf{w}} := -\frac{1}{4}\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}$.

Znaleźć długości $\|\vec{\mathbf{u}}\|$ i $\|\vec{\mathbf{v}}\|$ wektorów $\vec{\mathbf{u}}$ i $\vec{\mathbf{v}}$.

(2) Znaleźć kosinusy obu kątów, które tworzą płaszczyzny o równaniach:

$$x + 2y + 3z = 0 \quad \text{i} \quad 3x + 2y + z = 0\,.$$

(3) Niech $A = (1, -2, 1)$, $B = A + \vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{w}}$, $C = A + \vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{w}} + \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}$, $D = A + \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}$.

Znaleźć pole czworokąta $ABCD$ i jego środek symetrii, jeśli ten czworokąt jest środkowosymetryczny.

(4) Znaleźć punkt symetryczny do punktu $E = (3, 0, 4)$ względem płaszczyzny

$$x + 2y + 3z = 0\,.$$

7. Niech $\mathbf{A} = (1, 1, 2)$, $\mathbf{B} = (9, 1, 1)$, $\mathbf{C} = (1, 3, 1)$, $\mathbf{O} = (0, 0, 0)$.

Znaleźć objętość czworościanu $\mathbf{OABC}$.

Znaleźć jakikolwiek wektor $\vec{\mathbf{v}} \neq \vec{\mathbf{0}} = [0, 0, 0]$ prostopadły do płaszczyzny ABC.

Znaleźć pole trójkąta $\mathbf{ABC}$.

Znaleźć równanie płaszczyzny $\mathbf{ABC}$.

Znaleźć kosinusy obu kątów utworzonych przez płaszczyznę $\mathbf{ABC}$ i płaszczyznę o równaniu $x + y + z = 1$.

8. Niech $\mathbf{A} = (1, 1, 3)$, $\mathbf{B} = (4, 1, 1)$, $\mathbf{C} = (5, 2, 0)$, $\mathbf{O} = (0, 0, 0)$.

Znaleźć objętość czworościanu $\mathbf{OABC}$.

Znaleźć jakikolwiek wektor $\vec{\mathbf{v}} \neq \vec{\mathbf{0}} = [0, 0, 0]$ prostopadły do płaszczyzny ABC.

Znaleźć pole trójkąta $\mathbf{ABC}$.

Znaleźć równanie płaszczyzny zawierającej punkt $\mathbf{O}$, która jest równoległa do płaszczyzny $\mathbf{ABC}$.

Znaleźć kosinus kąta między płaszczyzną $\mathbf{ABC}$ i osią OX.

9. Niech $A = (16, 38, 55)$, $B = (-8, -10, -5)$, $C = (1, 2, 3)$.

Znaleźć jakiś (niezerowy) wektor prostopadły do płaszczyzny ABC.

Znaleźć pole trójkąta ABC.

10. Niech $A = (16, 38, 55)$, $B = (-8, -10, -5)$, $C = (1, 2, 3)$.

Znaleźć środek M_C odcinka AB.

Znaleźć punkt X na odcinku CM_C, który dzieli ten odcinek w stosunku $2:1$, tzn. odległość punktu X od wierzchołka C ma być dwukrotnie większa od jego odległości od punktu M_C.

Znaleźć dowolny punkt $Y = (y_1, y_2, y_3)$, który leży na dwusiecznej (to **pół**prosta) kąta ACB.

Informacja: długości odcinków AC i BC są liczbami całkowitymi.

11. Niech $A=(4,8,9)$, $B=(4,8,25)$, $C=(1,2,3)$.

Znaleźć wektory CB , CA , $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{AB}$ oraz ich długości.

Znaleźć kosinus największego z kątów trójkąta ABC.

Znaleźć jakiś (niezerowy) wektor prostopadły do płaszczyzny ABC.

Znaleźć pole trójkąta ABC.

Znaleźć środek M_C odcinka AB.

Znaleźć punkt X na odcinku CM_C, który dzieli ten odcinek w stosunku $2:1$, tzn. odległość punktu X od wierzchołka C ma być dwukrotnie większa od jego odległości od punktu M_C.

12. Niech $\mathbf{A}=(1,0,0)$, $\mathbf{B}=(0,2,2)$, $\mathbf{C}=(15,5,2)$, $\mathbf{O}=(0,0,0)$.

Znaleźć objętość czworościanu **OABC**.

Znaleźć jakikolwiek wektor $\vec{\mathbf{v}}\neq\vec{\mathbf{0}}=[0,0,0]$ prostopadły do płaszczyzny ABC.

Znaleźć pole trójkąta **ABC** i wyjaśnić, czy ten trójkąt jest ostrokątny, prostokątny czy rozwartokątny.

Znaleźć równanie płaszczyzny **ABC**.

Znaleźć kosinusy obu kątów utworzonych przez płaszczyznę **ABC** i płaszczyznę o równaniu $x+y+z=1$.

13. Niech $A=(1,1,1)$, $B=(7,4,3)$, $C=(3,2,3)$.

Znaleźć wektory $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{AB}$ oraz ich długości.

Znaleźć kosinus największego z kątów trójkąta ABC.

Znaleźć $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$.

Znaleźć pole trójkąta ABC.

Znaleźć środek M_A odcinka BC.

Znaleźć punkt X na odcinku AM_A, który dzieli ten odcinek w stosunku $3:1$, tzn. odległość punktu X od wierzchołka A ma być trzykrotnie większa od jego odległości od punktu M_A.

14. Obliczyć wyznacznik $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 7 \end{vmatrix}$.

Znaleźć iloczyn wektorowy i skalarny wektorów $[1,2,-2]$ i $[14,5,-2]$ oraz kosinus i sinus kąta między tymi wektorami.

Znaleźć pole trójkąta o wierzchołkach $(0,0,0,)$, $(1,2,-2)$ i $(14,5,-2)$. Czy wszystkie trzy kąty tego trójkąta są ostre?

15. Niech $O=(1,0,1)$, $A=(2,2,3)$, $B=(4,2,7)$, $C=(2,4,9)$.

Znaleźć wektory $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$ i $\overrightarrow{OB}$ oraz ich długości.

Znaleźć kosinus największego z kątów trójkąta ABO.

Znaleźć $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}$.

Znaleźć pole trójkąta ABO.

Znaleźć objętość czworościanu $ABCO$.

Znaleźć odległość punktu C od płaszczyzny OAB.

16. Dla jakich liczb rzeczywistych x zachodzi równość $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 4\sqrt{2} \\ 1 & x & x^2 \end{vmatrix}=0$?

Dla jakich liczb rzeczywistych x wektor $[1,x,x^2]$ jest prostopadły do iloczynu wektorowego $[1,2,4]\times[1,-2,4]$?

Znaleźć punkt X, który dzieli odcinek o końcach $(1,2,4)$, $(4,0,-1)$, w stosunku $3:2$.

17. Niech $O=(0,0,0)$, $A=(-2,2,3)$, $B=(-3,2,6)$, $C=(2,-1,2)$.

Znaleźć iloczyn $[O,A]\times[O,B]$ i obliczyć pole trójkąta OAB.

Obliczyć odległość punktu A od prostej OB.

Obliczyć objętość czworościanu $OABC$.

Obliczyć odległość punktu C od płaszczyzny OAB.

Znaleźć sinus kąta jaki tworzy wektor $[OC]$ z płaszczyzną OAB.

18. Niech $O=(0,0,0)$, $A=(2,-6,9)$, $B=(12,-3,-4)$, $C=(2,-1,2)$.

Znaleźć iloczyn $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}$ i obliczyć pole trójkąta OAB.

Obliczyć odległość punktu A od prostej OB.

Obliczyć objętość czworościanu $OABC$.

Znaleźć kosinus kąta między wektorami $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$.

Napisać równanie płaszczyzny OAB.

19. Obliczyć objętość czworościanu, którego wierzchołkami są punkty:

$O=(0,0,0)$, $A=(1,2,2)$, $B=(6,4,-2)$ oraz $C=(6,11,-6)$.

Znaleźć $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$.

Obliczyć pole trójkąta ABC.

Obliczyć odległość punktu C od prostej AB.

Znaleźć punkt X, który dzieli odcinek AB w stosunku $2:3$, tzn. $\frac{AX}{XB}=\frac{2}{3}$.

Znaleźć iloraz objętości czworościanów $OAXC$ i $OABC$.

20. Niech $A=(0,0,0)$, $B=(7,4,4)$, $D=(9,6,2)$, $A_1=(1,4,8)$, $C=B+D$.

Znaleźć pozostałe trzy wierzchołki równoległościanu $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Znaleźć pole równoległoboku $ABCD$.

Znaleźć równanie płaszczyzny $A_1B_1C_1$.

Znaleźć objętość równoległościanu $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Znaleźć kosinus kąta między prostymi AD i AA_1.

Znaleźć najmniejszą z liczb $\|X-Y\|$, gdzie X oznacza punkt prostej AC, a Y — prostej B_1D_1.