

Procesy Stochastyczne 2019/2020
III zestaw zadań
Procesy Markowa II

1. Niech $U_t = e^{-t}W_{e^{2t}}$ $t \geq 0$ (jest to proces Ornsteina-Uhlenbecka). Proszę udowodnić, że jest to proces Markowa i wyznaczyć funkcję przejścia dla tego procesu.

2. Proces $(X_t)_{t \geq 0}$ jest procesem Markowa o gęstości przejścia $p(t, x, y)$; $X_0 = 0$ p.n. Wyraż następujące prawdopodobieństwa za pomocą funkcji przejścia:

- (a) $\mathbb{P}(X_t \geq 0)$,
- (b) $\mathbb{P}(0 < X_s < X_t)$, gdzie $0 < s < t$ są dane.

3. Załóżmy, że przestrzeń stanów $E = \{1, 2\}$. Czy tożsamość Chapmana-Kołmogorowa jest spełniona dla

$$P^t = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 + 2e^{-7t} & 2 - 2e^{-7t} \\ 3 - 3e^{-7t} & 2 + 3e^{-7t} \end{pmatrix}?$$

4. Czy istnieją takie funkcje $a(t), b(t)$, że

$$P^t = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} a(t) & 3 - 3e^{-2t} \\ 4 - 4e^{-2t} & b(t) \end{pmatrix}$$

jest macierzą przejścia dla pewnego jednorodnego procesu Markowa na dwuelementowej przestrzeni stanów?

5. (a) Niech dla $0 \leq s \leq t$, $x \in \mathbb{R}$, $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ funkcja P będzie dana wzorem:

$$P(s, t, x, \Gamma) = \int_{\Gamma} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{s,t}^2}} \exp\left(-\frac{(y - m_{s,t}x)^2}{2\sigma_{s,t}^2}\right) dy,$$

o ile $\sigma_{s,t}^2 \neq 0$, oraz $P(s, t, x, \cdot) = \delta_{xm_{s,t}}(\cdot)$ gdy $\sigma_{s,t}^2 = 0$. Jakie warunki muszą spełniać $\sigma_{s,t}$ i $m_{s,t}$, by istniała rodzina Markowa o funkcji przejścia P ? (zob. definicję poniżej)

(b) Jakie dodatkowe warunki muszą spełniać $\sigma_{s,t}$ i $m_{s,t}$, by ta rodzina była jednorodna?

6. Sprawdź, że procesy Wienera i Poissona są procesami fellerowskimi.

7. **Proces Markowa niebędący mocno Markowa.** Niech $(W_t, \mathbb{P}_x)_{t \geq 0, x \in \mathbb{R}}$ będzie jednorodną rodziną Wienera, natomiast P^W – funkcją przejścia dla tej rodziny. Niech:

$$X_t(\omega) = \begin{cases} W_t(\omega) & \text{jeśli } W_0(\omega) \neq 0, \\ 0 & \text{jeśli } W_0(\omega) = 0 \end{cases}$$

oraz

$$P(t, x, \Gamma) = \begin{cases} P^W(t, x, \Gamma) & \text{jeśli } x \neq 0, \\ \delta_0(\Gamma) & \text{jeśli } x = 0. \end{cases}$$

Wykaż, że rodzina $(X_t, \mathbb{P}_x)_{t \geq 0, x \in \mathbb{R}}$ z powyższą funkcją przejścia jest jednorodną rodziną Markowa, która nie jest mocno Markowa.

8. Niech $(X_t)_{t \in T}$ będzie jednorodnym procesem Markowa względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$, z funkcją przejścia $P(t, x, \Gamma)$. Przypuśćmy, że τ jest momentem zatrzymania względem $(\mathcal{F}_t)$, natomiast $\eta : \{\tau < \infty\} \rightarrow T \cup \{\infty\}$ – zmienną losową $\mathcal{F}_\tau$ –mierzalną, przy czym τ oraz η przyjmują przeliczalnie wiele (lub skończenie wiele) wartości. Pokazać, że wtedy spełniony jest warunek z definicji mocnej własności Markowa, tzn. dla każdego zbioru $\Gamma \in \mathcal{B}$ zachodzi

$$\mathbb{P}(X_{\tau+\eta} \in \Gamma | \mathcal{F}_\tau) = P(\eta, X_\tau, \Gamma),$$

prawie na pewno na zbiorze $\{\tau, \eta < \infty\}$.

Uwaga. Wynika stąd w szczególności, że gdy czas T jest dyskretny, to każdy proces Markowa jest procesem mocno Markowa.

Definicja rodziny Markowa w przypadku niejednorodnym

Niech $T \subset \mathbb{R}_+$, $(E, \mathcal{B})$ – przestrzeń polska. Niech $P(s, t, x, \Gamma)$ będzie funkcją przejścia, w/g definicji z wykładu. Ponadto dla każdego $s \in T$, niech X_s będzie zmienną losową o wartościach w $(E, \mathcal{B})$. Zakładamy ponadto, że dla każdego $s \in T$ i $x \in E$ na $(\Omega, \mathcal{F}_{\geq s}^X)$ określona jest miara probabilistyczna $\mathbb{P}_{s,x}$.

Rodzinę $(X_t, \mathbb{P}_{s,x})_{s,t \in T, 0 \leq s \leq t, x \in \mathbb{R}}$ nazywamy mocno Markowa, jeżeli:

- (1) dla każdych $s \in T$, $x \in E$ proces stochastyczny $(X_t)_{t \in T, t \geq s}$ jest procesem Markowa na $(\Omega, \mathcal{F}_{\geq s}^X, \mathbb{P}_{s,x})$,
- (2) proces ten ma funkcję przejścia $P(s, t, x, \Gamma)$,
- (3) dla każdych $s \in T$, $x \in E$ zachodzi $\mathbb{P}_{s,x}(X_s = x) = 1$.