

Procesy Stochastyczne 2019/2020
II zestaw zadań
Procesy Markowa I

1. Wykaż, że jeżeli $P_{X|\mathcal{G}}$ jest regularnym rozkładem warunkowym X względem $\mathcal{G}$, to dla dowolnej funkcji $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ takiej, że $\mathbb{E}|\varphi(X)| < \infty$ zachodzi

$$\mathbb{E}(\varphi(X)|\mathcal{G})(\omega) = \int_E \varphi(x) P_{X|\mathcal{G}}(\omega, dx), \quad \text{p.n.}$$

2. Znajdź regularny rozkład warunkowy X względem Y , jeżeli:

(a) Y jest zmienną dyskretną, tzn. dla pewnego przeliczalnego zbioru S mamy $\mathbb{P}(Y \in S) = 1$.

(b) zmienne X, Y są rzeczywiste, a rozkład pary (X, Y) ma gęstość $g(x, y)$.

3. Niech $T = \mathbb{N}$, oraz niech (E, ρ) niech będzie przestrzenią stanów (niekoniecznie dyskretną). Wykaż, że $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest łańcuchem Markowa o wartościach w E wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego n i dowolnego zbioru mierzalnego $\Gamma \in \mathcal{B}(E)$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} \in \Gamma | \mathcal{F}_n^X) = \mathbb{P}(X_{n+1} \in \Gamma | X_n).$$

Uwaga. Proszę rozwiązać to zadanie bezpośrednio, bez odwoływania się do ogólnego twierdzenia z wykładu.

4. Niech $X_0, Y_0, Y_1, \dots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym X_0 ma wartości w przestrzeni E , zaś zmienne Y_k – w przestrzeni E' . Niech dla $n = 1, 2, \dots$, h_n będzie funkcją mierzalną z $E \times E'$ w E . Ciąg X_n określony jest indukcyjnie w sposób następujący: dla $n = 0, 1, \dots$, $X_{n+1} = h(X_n, Y_{n+1})$. Wykaż, że X_n jest łańcuchem Markowa.

5. Przy założeniu, że przestrzeń stanów E jest przeliczalna, natomiast $T \subset \mathbb{R}_+$ jest przedziałem (nie zakładamy, że czas jest dyskretny) wykaż że

(a) $(X_t)_{t \in T}$ jest procesem Markowa wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $n \geq 2$ i dla dowolnych $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, $k_1, k_2, \dots, k_n \in E$ takich, że $\mathbb{P}(X_{t_1} = k_1, X_{t_2} = k_2, \dots, X_{t_{n-1}} = k_{n-1}) \neq 0$ zachodzi

$$\mathbb{P}(X_{t_n} = k_n | X_{t_1} = k_1, X_{t_2} = k_2, \dots, X_{t_{n-1}} = k_{n-1}) = \mathbb{P}(X_{t_n} = k_n | X_{t_{n-1}} = k_{n-1}).$$

(b) $(X_t)_{t \in T}$ jest procesem Markowa z macierzą przejścia $(p_{s,t}(k, l))$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $n \geq 1$ i dla dowolnych $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, $k_1, k_2, \dots, k_n \in E$

$$\mathbb{P}(X_{t_1} = k_1, X_{t_2} = k_2, \dots, X_{t_n} = k_n) = \mathbb{P}(X_{t_1} = k_1) p_{t_1, t_2}(k_1, k_2) \dots p_{t_{n-1}, t_n}(k_{n-1}, k_n).$$

6. Wykaż, że proces Poissona N_t jest procesem Markowa i znajdź jego funkcję (macierz) przejścia.

7. Wykaż, że proces $(-1)^{N_t}$ jest procesem Markowa i znajdź jego macierz przejścia.

8. Zmienne losowe $X_1, X_2, \dots$ są iid o wspólnym rozkładzie μ , $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$. Czy następujące ciągi tworzą łańcuchy Markowa:

- (a) $X_1, X_2, \dots$;
- (b) $S_0, S_1, S_2, \dots$ (przyjmujemy $S_0 = 0$);
- (c) $S_0^+, S_1^+, S_2^+, \dots$;
- (d) $M_1, M_2, \dots$;
- (e) $S_0, \max(S_0, S_1), \max(S_0, S_1, S_2), \dots$;
- (f) $(S_n, M_n)_{n=1}^\infty$.

W tych przypadkach, gdzie odpowiedź jest twierdząca, wyznacz odpowiednią funkcję przejścia.

9. (**przypomnienie zadania z RP2**) Niech $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ będzie σ -ciałem, X zmienną losową $\mathcal{G}$ -mierzalną, natomiast Y – zmienną losową niezależną od $\mathcal{G}$. Wykaż, że dla dowolnej funkcji $f(x, y)$ mierzalnej i ograniczonej zachodzi

$$\mathbb{E}(f(X, Y)|\mathcal{G}) = \varphi(X),$$

gdzie $\varphi(x) = \mathbb{E}f(x, Y)$.

10. Korzystając z zadania poprzedniego wykaż, że jeżeli $X = (X_t)_{t \in T}$ jest procesem o przyrostach niezależnych, to X jest procesem Markowa z funkcją przejścia

$$P(s, t, x, \Gamma) = \mathbb{P}(X_t - X_s \in \Gamma - x).$$

11. Wyznacz funkcję przejścia dla procesu $(W_{-t})_{t \leq 0}$ (jest to proces Markowa, bo jest inwersją procesu Wienera).

12. Czy procesy $(|W_t|)$, (tW_{t^2}) są procesami Markowa? Jeżeli tak, wyznacz ich funkcje przejścia.