

Procesy Stochastyczne 2019/2020
I zestaw zadań

1. Niech $(W_t)_{t \geq 0}$ będzie procesem Wienera. Podaj przykład modyfikacji procesu W_t o nieciągłych trajektoriach.

2. Niech $Z_t = \frac{\ln(1+W_t^2)}{\ln t}$, $t \geq 1$. Zbadaj zbieżność $\lim_{t \rightarrow \infty} Z_t$ w sensie zbieżności:
a) według rozkładu, b) według prawdopodobieństwa, c) prawie na pewno.

3. Udowodnij lemat z wykładu: niech $X_1, X_2, \dots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o wspólnym rozkładzie $\text{Exp}(\lambda)$, gdzie $\lambda > 0$ jest dane. Dalej, niech $\tau_0 = 0$ i $\tau_k = X_1 + \dots + X_k$, dla $k = 1, 2, \dots$. Ponadto, niech $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ będzie taką funkcją mierzalną, że $\text{supp}(h - 1)$ jest ograniczony. Definiujemy $Y := \prod_{k=1}^{\infty} h(\tau_k)$. Wykaż, że

$$\mathbb{E}Y = e^{\lambda \int_0^{\infty} (h(u)-1)du}.$$

W kolejnych zadaniach N_t oznacza proces Poissona z intensywnością $\lambda > 0$.

4. Oblicz $\mathbb{P}(N_1 = 1, N_2 = 4, N_3 = 4)$, $\mathbb{P}(N_1 = N_2)$ oraz $\mathbb{P}(N_1 = N_3 < N_4)$.

5. Udowodnij, że z prawdopodobieństwem 1 trajektorie procesu Poissona są niemalejące, przyjmują wartości z $\mathbb{Z}_+$, mają wszystkie skoki równe 1 i dążą do nieskończoności gdy $t \rightarrow \infty$.

6. Wykaż, że moment pierwszego skoku procesu Poissona

$$\tau_1 := \inf\{t \geq 0 : N_t > 0\}$$

jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ .

7. Niech

$$\tau_k := \inf\{t \geq 0 : N_t = k\}$$

będzie momentem k -tego skoku procesu Poissona. Wykaż, że odstęp między kolejnymi skokami:

$$\rho_1 = \tau_1, \rho_2 = \tau_2 - \tau_1, \rho_3 = \tau_3 - \tau_2, \dots$$

są niezależnymi zmiennymi losowymi o wspólnym rozkładzie wykładniczym z parametrem λ .

Uwaga. Zadania 5–7 pokazują, że proces Poissona zdefiniowany aksjomatycznie ma w istocie reprezentację taką, jak w Twierdzeniu 1 z wykładu.

8. Oblicz (oznaczenia jak w zadaniu 4):

(a) $\mathbb{E}\tau_3$,

(b) $\mathbb{E}(\tau_6 | N_3 = 4)$,

- (c) $\mathbb{E}(N_5|N_2 = 2)$,
(d) $\mathbb{E}(N_3|N_5 = 4)$.

9. Udowodnij, że $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_t}{t} = \lambda$ prawie na pewno.

10. Niech $N_t^{(1)}$ i $N_t^{(2)}$ będą niezależnymi procesami Poissona. Wykaż, że

$$N_t := N_t^{(1)} + N_t^{(2)}$$

również jest procesem Poissona.

11. Niech $N_t^{(1)}$ i $N_t^{(2)}$ będą niezależnymi procesami Poissona z parametrem λ . Czy proces $X_t = \max\{N_t^{(1)}, N_t^{(2)}\}$ jest także procesem Poissona?

12. Liczba wyświetleń pewnej strony internetowej do chwili t , oznaczana N_t , jest procesem Poissona z intensywnością $\lambda > 0$. Każde wyświetlenie z prawdopodobieństwem p jest dokonywane spoza Polski (niezależnie od innych wyświetleń, i niezależnie od procesu N). Niech $N_t^{(1)}$ będzie liczbą wyświetleń strony spoza Polski, a $N_t^{(2)}$ – liczbą wyświetleń strony z Polski. Wykaż, że $N_t^{(1)}$ i $N_t^{(2)}$ są niezależnymi procesami Poissona.