

Procesy Stochastyczne 2016/2017
IX zestaw zadań, 19 stycznia 2017r.

1. (nierówność Lévy'ego) Niech $(X_t, \mathbb{P}_x)_{t \geq 0, x \in E}$ będzie jednorodną rodziną Markowa o wartościach w przestrzeni polskiej (E, ρ) . Wykaż, że dla dowolnych $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq t$ i dla $\epsilon > 0$ zachodzi

$$\mathbb{P}_x \left(\max_k \rho(x, X_{t_k}) > 2\epsilon \right) \leq 2\alpha_\epsilon(t) \left(:= 2 \sup_{s \in [0, t]} \sup_{y \in E} \mathbb{P}_y(\rho(y, X_s) > \epsilon) \right).$$

Wynioskuj stąd, że jeżeli X jest prawostronnie ciągły, to

$$\mathbb{P}_x \left(\sup_{s \leq t} \rho(x, X_s) > 2\epsilon \right) \leq 2\alpha_\epsilon(t).$$

2. Niech $f \in C_c^2(\mathbb{R}^d)$ oraz $\rho \in \mathbb{R}$. Znajdź rozwiązanie $u(t, x)$ równania

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \rho u + \frac{1}{2} \Delta u, \\ u(0, x) &= f(x). \end{aligned}$$

3. Niech $(X_t, \mathbb{P}_x)_{x \in \{1, 2\}}$ będzie prawostronnie ciągłą jednorodną rodziną Markowa o generatorze

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Znajdź funkcję charakterystyczną zmiennej losowej $Y = \int_0^t \mathbf{1}_{\{1\}}(X_s) ds$, przy $\mathbb{P}_1$ i $\mathbb{P}_2$.
Wskazówka: użyj wzoru Feynmana-Kaca.

4. Niech (T_t) będzie półgrupą kontrakcji na $B(E)$, gdzie (E, ρ) – przestrzeń polska. Wykaż, że dla $g \in B_0$ funkcja $v(t, x) = \int_0^t T_s g(x) ds$ jest jedynym rozwiązaniem o wzroście co najwyżej liniowym równania

$$\frac{\partial v}{\partial t} = Av(t, x) + g(x), \quad v(0, x) = 0$$

i takim, że v oraz $\frac{\partial v}{\partial t}$ są ciągłe jako odwzorowania z $\mathbb{R}_+$ w $B(E)$.

5. (prawo arcusa sinusa) Niech W będzie jednowymiarowym procesem Wienera startującym z zera. Oznaczmy przez ξ_t czas przebywania W na półprostej dodatniej do chwili t , tzn. $\xi_t = \int_0^t \mathbf{1}_{(0, \infty)}(W_s) ds = |\{0 \leq s \leq t : W_s > 0\}|$. Udowodnij, że dla $0 \leq x \leq t$ zachodzi $\mathbb{P}[\xi_t \leq x] = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{x}{t}}$.

Wskazówki. Dla dowolnych ustalonych $\lambda > 0$, $\beta > 0$ i jednostajnie ciągłej, nieujemnej funkcji c niech $\tilde{T}_t$ będzie półgrupą zdefiniowaną przez $\tilde{T}_t f(x) = \mathbb{E}_x \left[e^{-\beta \int_0^t c(W_s) ds} f(W_t) \right]$.

Pokaż, że funkcja $r(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \tilde{T}_t \mathbf{1}(x) dt$ spełnia

$$\lambda r(x) - \frac{1}{2} r''(x) + \beta c(x) r(x) = 1. \quad (1)$$

Następnie pokaż, że gdy c zastąpić przez funkcję $\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$, to odpowiednia funkcja r jest klasy C^1 na $\mathbb{R}$, dwukrotnie różniczkowalną na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, a ponadto dla $x \neq 0$ zachodzi odpowiednik równania (1). Rozwiąż to równanie. Aby otrzymać rozkład ξ_t skorzystaj z jednoznaczności transformaty Laplace'a.