

Procesy Stochastyczne 2016/2017
VIII zestaw zadań, 12 stycznia 2017r.

1. Załóżmy, że $b, \sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ są funkcjami mierzalnymi, ograniczonymi, a ponadto istnieją: stała $L > 0$ i funkcja niemalejąca $\rho : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ takie, że przy każdym $\epsilon > 0$ zachodzi $\int_0^\epsilon (\rho(x))^{-2} dx = \infty$, dla których:

(1) $|b(t, x) - b(t, y)| \leq L|x - y|$,

(2) $|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq \rho(x - y)$, dla $x, y \in \mathbb{R}$, $t \in [0, T]$.

Udowodnij, że rozwiązanie równania

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad X_0 = x, \quad t \in [0, T]$$

jest jednoznaczne w sensie trajektorii.

Wskazówka. Rozważ dwa rozwiązania $X, \tilde{X}$, z tym samym procesem Wienera. Używając wzoru Itô oszacuj $\mathbb{E}f(X_t - \tilde{X}_t)$ dla $f \in C^2$ o ograniczonych pochodnych. Następnie pokaż, przybliżając odpowiednio funkcję $|x|$, że $\mathbb{E}|X_t - \tilde{X}_t| \leq C \int_0^t \mathbb{E}|X_s - \tilde{X}_s| ds$. Zakończ rozumowanie podobnie, jak przy dowodzie jednoznaczności rozwiązania dla ciągłych, globalnie lipschitzowskich funkcji b, σ .

2. Udowodnij, że dla $\alpha \geq \frac{1}{2}$ równanie

$$dX_t = |X_t|^\alpha dW_t, \quad X_0 = 0 \tag{1}$$

ma rozwiązanie jednoznaczne w sensie trajektorii.

3. (**tw. Dambisa-Dubinsa-Schwarza**) Niech M będzie ciągłym rzeczywistym martyngałem lokalnym względem pewnej prawostronnie ciągłej filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Załóżmy $M_0 = 0$ oraz $\lim_{t \rightarrow \infty} \langle M \rangle_t = \infty$ p.n. Dla $t \geq 0$ niech

$$\tau_t = \inf\{s \geq 0 : \langle M \rangle_s > t\}.$$

Udowodnij, że proces $B_t := M_{\tau_t}$ jest standardowym procesem Wienera względem filtracji $(\mathcal{G}_t)_t = (\mathcal{F}_{\tau_t})_t$.

4. Udowodnij, że dla $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ równanie (1) ma niezerowe słabe rozwiązanie, a zatem nie zachodzi jednoznaczność, ani w sensie trajektorii, ani w sensie rozkładu.

Wskazówka. Niech V_s będzie procesem Wienera oraz $M_t = \int_0^t |V_s|^{-\alpha} dV_s$. Niech τ_t będzie zmianą czasu z poprzedniego zadania, wtedy $W_t = M_{\tau_t}$ jest procesem Wienera, zaś (W, X) , gdzie $X_t = V_{\tau_t}$, jest słabym rozwiązaniem.

5. Niech $a : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ oraz $b : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ będą funkcjami ciągłymi, przy czym dla każdego $x \in \mathbb{R}^d$, $a(x)$ jest macierzą symetryczną i nieujemnie określoną. L oznacza operator dyfuzji z współczynnikami a, b . Niech $(X_t, \mathbb{P}_x)_{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d}$ będzie jednorodną rodziną

Markowa o funkcji przejścia $P(t, x, \Gamma)$. Przez $B_\delta(x)$ oznaczamy kulę $\{y : |y - x| < \delta\}$. Załóżmy, że dla każdego $\delta > 0$, przy $t \rightarrow 0$, jednostajnie względem $x \in \mathbb{R}^d$:

$$(1) P(t, x, (\overline{B_\delta(x)})^c) = o(t),$$

$$(2) \int_{\overline{B_\delta(x)}} (y_i - x_i) P(t, x, dy) = b_i(x)t + o(t), \text{ dla } i = 1, 2, \dots, d;$$

$$(3) \int_{\overline{B_\delta(x)}} (y_i - x_i)(y_j - x_j) P(t, x, dy) = a_{i,j}(x)t + o(t), \text{ dla } i, j = 1, 2, \dots, d;$$

ponadto załóżmy, że $\text{Tr } a(x) (= \sum a_{ii}(x))$ jest ograniczone. Wtedy $C_u^2(\mathbb{R}^d) \subset D_A$ oraz dla $f \in C_u^2(\mathbb{R}^d)$ zachodzi $Af = Lf$. A zatem X jest procesem dyfuzji z operatorem tworzącym L .