

Procesy Stochastyczne 2016/2017
VII zestaw zadań, 15 grudnia 2016r.

1. Wykaż, że równanie

$$dX_t = 3X_t^{1/3}dt + 3X_t^{2/3}dW_t, \quad X_0 = 0$$

ma nieskończenie wiele mocnych rozwiązań postaci

$$X_t^\theta = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < \beta_\theta, \\ W_t^3 & \beta_\theta \leq t < \infty, \end{cases}$$

gdzie $0 \leq \theta < \infty$ oraz $\beta_\theta = \inf\{s \geq \theta : W_s = 0\}$.

2. Korzystając z twierdzenia Girsanowa, przeprowadź konstrukcję jakiegoś słabego rozwiązania równania

$$dX_t = (2 + \operatorname{sgn}(X_t))dt + dW_t, \quad X_0 = 0.$$

3. **Czas lokalny procesu Wienera w zerze.**

(a) Wykaż, że istnieje ciągły, niemalejący proces $(L_t)_{t \geq 0}$, dla którego

$$|W_t| = \int_0^t \operatorname{sgn}(W_s) dW_s + L_t.$$

Wskazówka. Funkcję $x \mapsto |x|$ przybliżać za pomocą funkcji $f_n \in C^2$, których II pochodna ma postać

$$f_n''(x) = \begin{cases} n & \text{dla } |x| \leq \frac{1}{n} - \epsilon_n, \\ 0 & \text{dla } |x| \leq \frac{1}{n}, \\ f_n'' \text{ liniowa} & \text{na pozostałych przedziałach,} \end{cases}$$

i jest ona ciągła na całej prostej; ponadto liczby ϵ_n są takie, że $\lim_{n \rightarrow \infty} n\epsilon_n = 0$.

(b) Wykaż, że istnieje taki ciąg $\delta_k \rightarrow 0$, że

$$L_t = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2\delta_k} |\{0 \leq s \leq t : |W_s| \leq \delta_k\}|, \quad \text{p.n.}$$

Wskazówka. Teraz przybliż odpowiednio $x \mapsto |x|$ od góry.

Proces (L_t) nazywa się czasem lokalnym procesu Wienera w zerze.

(c) Wywnioskuj stąd, że jeżeli $\sigma(x) = 1$ dla $x \geq 0$ oraz $\sigma(x) = -1$ dla $x < 0$, to proces $X_t = \int_0^t \sigma(W_s) dW_s$ jest adaptowany do filtracji $\left(\overline{\mathcal{F}_t^{|W|}}\right)_{t \geq 0}$.

Uwaga. Dla $a \in \mathbb{R}$ identycznie pokazuje się istnienie czasu lokalnego w a : ciągłego, niemalejącego procesu $(L_t^a)_{t \geq 0}$, spełniającego

$$|W_t - a| = |a| + \int_0^t \operatorname{sgn}(W_s - a) dW_s + L_t^a.$$

4. Niech $(L_t^a)_{t \geq 0}$ będzie jak w uwadze z poprzedniego zadania. Wykaż, że L_t^a rośnie tylko w punktach t takich, że $W_t = a$.

Wskazówka. Zastosuj wzór Itô do funkcji $f(x) = x^2$ i semimartingałów $|W_t - a|$ oraz $W_t - a$.