

Procesy Stochastyczne 2016/2017
VI zestaw zadań, 1 grudnia 2016r.

1. Znajdź generator (łącznie z dziedziną) dla Poissonowskiej rodziny Markowa.

2. Generatorem infinitesimalnym procesu Markowa o przestrzeni stanów $E = \{1, 2\}$ jest

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Znajdź funkcję przejścia dla tego procesu i jego rozkład stacjonarny.

3. Rozważmy jednorodną rodzinę Markowa $(X_t, \mathbb{P}_i)_{t \geq 0, i=1,2,3}$ o generatorze infinitesimalnym

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Zakładamy, że trajektorie procesu X_t są prawostronnie ciągłe. Niech:

$$\tau_1 = \inf\{t \geq 0 : X_t \neq 1\}, \quad \sigma_1 = \inf\{t \geq \tau_1 : X_t = 1\}.$$

Oblicz $\mathbb{E}_1 \sigma_1$.

4. Wykaż, że proces Wienera nie posiada rozkładu stacjonarnego, natomiast miara Lebesgue'a jest jego miarą niezmienniczą. (*Uwaga. W definicji miary niezmienniczej nie trzeba zakładać, że jest ona unormowana, ani nawet, że jest skończona.*)

5. Załóżmy, że E jest zbiorem co najwyżej przeliczalnym z topologią dyskretną. Niech $(X_t, \mathbb{P}_x)_{t \geq 0, x \in E}$ będzie łańcuchem Markowa z czasem ciągłym o przestrzeni stanów E ; zakładamy prawostronną ciągłość trajektorii tego łańcucha. Dla $\Gamma \subset E$ definiujemy

$$\sigma_\Gamma = \inf\{t \geq 0 : X_t \in \Gamma\},$$

oraz $m_i(\Gamma) = \mathbb{E}_i \sigma_\Gamma$. Wykaż, że dla $i \in \Gamma$ mamy $m_i(\Gamma) = 0$ oraz, że dla $i \notin \Gamma$ takich, że $\lambda_i > 0$ zachodzi

$$m_i(\Gamma) = \frac{1}{\lambda_i} + \sum_{j \neq i} q_{ij} m_j(\Gamma).$$