

Procesy Stochastyczne 2016/2017
V zestaw zadań, 17 listopada 2016r.
Półgrupy związane z procesami Markowa i ich generatory

1. Niech X_t będzie rodziną Markowa na dwuelementowej przestrzeni stanów, o macierzy przejścia

$$P^t = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 + 2e^{-7t} & 2 - 2e^{-7t} \\ 3 - 3e^{-7t} & 2 + 3e^{-7t} \end{pmatrix}.$$

Znajdź generator półgrupy generowanej przez proces X_t .

2. **Generator procesu Wienera.** Niech A będzie generatorem półgrupy związanej z procesem Wienera w $\mathbb{R}^d$. Wykaż, że dla $f \in C_u^2(\mathbb{R}^d)$ mamy $f \in D_A$ oraz $Af = \frac{1}{2}\Delta f$.
Uwaga. $C_u^2(\mathbb{R}^d)$ oznacza funkcje klasy $C^2 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ograniczone i jednostajnie ciągle wraz ze swoimi pochodnymi do rzędu 2 włącznie. *Wskazówka:* wzór Taylora.

3. **Rezolwenta jednowymiarowego procesu Wienera.** Wykaż, że dla jednowymiarowego procesu Wienera

$$R_\lambda f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-\sqrt{2\lambda}|x-y|} dy, \quad \lambda > 0.$$

4. Wykaż, że dla jednowymiarowego procesu Wienera mamy $D_A = C_u^2(\mathbb{R})$.

5. **Generator procesu Ornsteina-Uhlenbecka.** Niech $X_t = e^{-t}W_{e^{2t}}$. Znajdź Af dla dostatecznie gładkiej funkcji f .

6. Niech $(W_t, \mathbb{P}_x)_{t \geq 0, x \in \mathbb{R}}$ będzie jednowymiarową rodziną Wienera. Znajdź generator infinitesimalny (wraz z dziedziną) rodzin Markowa:

- (a) $(|W_t|, \mathbb{P}_x)_{t \geq 0, x \geq 0}$ (proces odbity w zerze),
- (b) $(W_t^\tau, \mathbb{P}_x)_{t \geq 0, x \geq 0}$, gdzie $\tau = \inf\{t \geq 0 : W_t = 0\}$, oraz $W_t^\tau = W_{t \wedge \tau}$ (proces zabity w zerze).