

Procesy Stochastyczne 2016/2017

10 listopada 2016

Mocna własność Markowa

1. Dla ułatwienia przyjmijmy, że $\Omega = E^T$ albo $\Omega = C(T, E)$ i zdefiniujmy, dla $h > 0$, operator przesunięcia $\theta_h : \Omega \rightarrow \Omega$ ($\theta_h \omega(t) = \omega(t+h)$) oraz, dla $A \in \mathcal{F}$, $\theta_h^{-1}A = \{\omega \in \Omega : \theta_h \omega \in A\}$, zaś dla $\xi : \Omega \rightarrow E_1$, $\theta_h \xi(\omega) = \xi(\theta_h \omega)$. Pokaż, że:

- (a) $\{\theta_h^{-1}A : A \in \mathcal{F}_\infty^X\} = \mathcal{F}_{\geq t}^X$;
- (b) jeżeli $\xi : \Omega \rightarrow E'$ jest zmienną losową $\mathcal{F}_\infty^X$ -mierzalną, to $\theta_h \xi$ jest zmienną losową $\mathcal{F}_{\geq t}^X$ -mierzalną.

2. Niech τ będzie momentem zatrzymania względem $\mathcal{F}_t^W$, który jest skończony prawie na pewno. Pokaż, że proces $(W_{t+\tau} - W_\tau)_{t \geq 0}$ jest procesem Wienera niezależnym od $\mathcal{F}_\tau^W$.

3. **Zasada odbicia dla procesu Wienera.** Niech W_t będzie procesem Wienera startującym z zera. Zdefiniujmy, dla $a \neq 0$,

$$\tau_a := \inf\{t \geq 0 : W_t = a\}.$$

Wykaż, że dla $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

- (a) $\mathbb{P}(\tau_a \leq u, W_u \in \Gamma) = \mathbb{P}(\tau_a \leq u, W_t \in 2a - \Gamma)$,
- (b) $\mathbb{P}(\tau_a \leq u) = 2\mathbb{P}(W_t \geq a)$ dla $a \geq 0$.
- (c) Znajdź rozkład zmiennej losowej $\sup_{0 \leq t \leq u} W_t$.

4. Przy oznaczeniach jak wyżej udowodnij, że:

- (d) $\tau_a \sim a^2 \tau_1$,
- (e) dla $a, b > 0$ zachodzi $\tau_{a+b} \sim \tau_a + \tilde{\tau}_b$, gdzie $\tilde{\tau}_b$ to niezależna kopia zmiennej τ_b ,
- (f) $s\tau_1 + t\tilde{\tau}_1 \sim (\sqrt{s} + \sqrt{t})^2 \tau_1$, dla $s, t > 0$.

5. Załóżmy, że proces Markowa $(X_t)_{t \in T}$, z funkcją przejścia P ma mocną własność Markowa względem $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$. Niech τ będzie momentem zatrzymania względem $(\mathcal{F}_t)$, który jest skończony prawie na pewno. Wykaż, że $(X_{t+\tau})_{t \in T}$ jest procesem Markowa względem $(\mathcal{F}_{t+\tau})_{t \in T}$. Wyznacz jego funkcję przejścia.

6. $(W_t, \mathbb{P}_x)_{t \geq 0, x \in \mathbb{R}}$ jest Wienerowską rodziną Markowa. Niech

$$\tau := \inf\{t \geq 0 : W_t = 0\},$$

ponadto oznaczamy $W_t^\tau = W_{t \wedge \tau}$. Udowodnij, że $(W_t^\tau, \mathbb{P}_x)_{t \geq 0, x \in \mathbb{R}}$ jest jednorodną rodziną Markowa. Znajdź jej funkcję przejścia.

7. Załóżmy, że rodzina Markowa $(X_t, \mathbb{P}_x)$ ma mocną własność Markowa względem $(\mathcal{F}_t)$, zaś θ_s są jej operatorami przesunięcia. Wykaż, że dla dowolnego $A \in \mathcal{F}_\infty^X$ i dla dowolnego momentu zatrzymania τ , który jest $\mathcal{F}_\infty^X$ -mierzalny zachodzi

$$\mathbb{P}_x(\theta_\tau^{-1}A | \mathcal{F}_\tau) = \mathbb{P}_{X_\tau}(A), \quad \text{p.n. na zbiorze } \tau < \infty.$$