

**Procesy Stochastyczne 2016/2017**  
**III zestaw zadań, 27 października 2016**  
**Procesy Markowa II**

1. Proces  $(X_t)_{t \geq 0}$  jest procesem Markowa o gęstości przejścia  $p(t, x, y)$ ;  $X_0 = 0$  p.n. Wyraż następujące prawdopodobieństwa za pomocą funkcji przejścia:

- (a)  $\mathbb{P}(X_t \geq 0)$ ,
- (b)  $\mathbb{P}(0 < X_s < X_t)$ , gdzie  $0 < s < t$  są dane.

2. Załóżmy, że przestrzeń stanów  $E = \{1, 2\}$ . Czy tożsamość Chapmana-Kołmogorowa jest spełniona dla

$$P^t = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 + 2e^{-7t} & 2 - 2e^{-7t} \\ 3 - 3e^{-7t} & 2 + 3e^{-7t} \end{pmatrix}?$$

3. Czy istnieją takie funkcje  $a(t), b(t)$ , że

$$P^t = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} a(t) & 3 - 3e^{-2t} \\ 4 - 4e^{-2t} & b(t) \end{pmatrix}$$

jest macierzą przejścia dla pewnego jednorodnego procesu Markowa na dwuelementowej przestrzeni stanów?

4. (a) Niech dla  $0 \leq s \leq t$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  funkcja  $P$  będzie dana wzorem:

$$P(s, t, x, \Gamma) = \int_{\Gamma} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{s,t}^2}} \exp\left(-\frac{(y - m_{s,t}x)^2}{2\sigma_{s,t}^2}\right) dy,$$

o ile  $\sigma_{s,t}^2 \neq 0$ , oraz  $P(s, t, x, \cdot) = \delta_{xm_{s,t}}(\cdot)$  gdy  $\sigma_{s,t}^2 = 0$ . Jakie warunki muszą spełniać  $\sigma_{s,t}$  i  $m_{s,t}$ , by istniała rodzina Markowa o funkcji przejścia  $P$ ? (zob. definicję poniżej)

(b) Jakie dodatkowe warunki muszą spełniać  $\sigma_{s,t}$  i  $m_{s,t}$ , by ta rodzina była jednorodna?

5. Sprawdź, że procesy Wienera i Poissona są procesami fellerowskimi.

6. **Proces Markowa niebędący mocno Markowa.** Niech  $(W_t, \mathbb{P}_x)_{t \geq 0, x \in \mathbb{R}}$  będzie jednorodną rodziną Wienera, natomiast  $P^W$  – funkcją przejścia dla tej rodziny. Niech:

$$X_t(\omega) = \begin{cases} W_t(\omega) & \text{jeśli } W_0(\omega) \neq 0, \\ 0 & \text{jeśli } W_0(\omega) = 0 \end{cases}$$

oraz

$$P(t, x, \Gamma) = \begin{cases} P^W(t, x, \Gamma) & \text{jeśli } x \neq 0, \\ \delta_0(\Gamma) & \text{jeśli } x = 0. \end{cases}$$

Wykaż, że rodzina  $(X_t, \mathbb{P}_x)_{t \geq 0, x \in \mathbb{R}}$  z powyższą funkcją przejścia jest jednorodną rodziną Markowa, która nie jest mocno Markowa.

### Definicja rodziny Markowa w przypadku niejednorodnym

Niech  $T \subset \mathbb{R}_+$ ,  $(E, \mathcal{B})$  – przestrzeń polska. Niech  $P(s, t, x, \Gamma)$  będzie funkcją przejścia, w/g definicji z wykładu. Ponadto dla każdego  $s \in T$ , niech  $X_s$  będzie zmienną losową o wartościach w  $(E, \mathcal{B})$ . Zakładamy ponadto, że dla każdego  $s \in T$  i  $x \in E$  na  $(\Omega, \mathcal{F}_{\geq s}^X)$  określona jest miara probabilistyczna  $\mathbb{P}_{s,x}$ .

Rodzinę  $(X_t, \mathbb{P}_{s,x})_{s,t \in T, 0 \leq s \leq t, x \in E}$  nazywamy mocno Markowa, jeżeli:

- (1) dla każdych  $s \in T$ ,  $x \in E$  proces stochastyczny  $(X_t)_{t \in T, t \geq s}$  jest procesem Markowa na  $(\Omega, \mathcal{F}_{\geq s}^X, \mathbb{P}_{s,x})$ ,
- (2) proces ten ma funkcję przejścia  $P(s, t, x, \Gamma)$ ,
- (3) dla każdych  $s \in T$ ,  $x \in E$  zachodzi  $\mathbb{P}_{s,x}(X_s = x) = 1$ .