

**Procesy Stochastyczne 2016/2017**  
**I zestaw zadań, 6 października 2016**  
**Proces Poissona**

W poniższych zadaniach  $N_t$  oznacza proces Poissona z intensywnością  $\lambda > 0$ .

1. Oblicz  $\mathbb{P}(N_1 = 1, N_2 = 4, N_3 = 4)$ ,  $\mathbb{P}(N_1 = N_2)$  oraz  $\mathbb{P}(N_1 = N_3 < N_4)$ .

2. Udowodnij, że z prawdopodobieństwem 1 trajektorie procesu Poissona są niemalejące, przyjmują wartości z  $\mathbb{Z}_+$ , mają wszystkie skoki równe 1 i dążą do nieskończoności gdy  $t \rightarrow \infty$ .

3. Wykaż, że moment pierwszego skoku procesu Poissona

$$\tau_1 := \inf\{t \geq 0 : N_t > 0\}$$

jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem  $\lambda$ .

4. Niech

$$\tau_k := \inf\{t \geq 0 : N_t = k\}$$

będzie momentem  $k$ -tego skoku procesu Poissona. Wykaż, że odstęp między kolejnymi skokami:

$$\rho_1 = \tau_1, \rho_2 = \tau_2 - \tau_1, \rho_3 = \tau_3 - \tau_2, \dots$$

są niezależnymi zmiennymi losowymi o wspólnym rozkładzie wykładniczym z parametrem  $\lambda$ .

*Uwaga. Zadania 3–5 pokazują, że proces Poissona zdefiniowany aksjomatycznie ma w istocie reprezentację taką, jak w Twierdzeniu 1 z wykładu.*

5. Oblicz (oznaczenia jak w zadaniu 4):

- (a)  $\mathbb{E}\tau_3$ ,
- (b)  $\mathbb{E}(\tau_6 | N_3 = 4)$ ,
- (c)  $\mathbb{E}(N_5 | N_2 = 2)$ ,
- (d)  $\mathbb{E}(N_3 | N_5 = 4)$ .

6. Udowodnij, że  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_t}{t} = \lambda$  prawie na pewno.

7. Niech  $N_t^{(1)}$  i  $N_t^{(2)}$  będą niezależnymi procesami Poissona. Wykaż, że

$$N_t := N_t^{(1)} + N_t^{(2)}$$

również jest procesem Poissona.

8. Niech  $N_t^{(1)}$  i  $N_t^{(2)}$  będą niezależnymi procesami Poissona z parametrem  $\lambda$ . Czy proces  $X_t = \max\{N_t^{(1)}, N_t^{(2)}\}$  jest także procesem Poissona?

9. Liczba wyświetleń pewnej strony internetowej do chwili  $t$ , oznaczana  $N_t$ , jest procesem Poissona z intensywnością  $\lambda > 0$ . Każde wyświetlenie z prawdopodobieństwem  $p$  jest dokonywane spoza Polski (niezależnie od innych wyświetleń, i niezależnie od procesu  $N$ ). Niech  $N_t^{(1)}$  będzie liczbą wyświetleń strony spoza Polski, a  $N_t^{(2)}$  – liczbą wyświetleń strony z Polski. Wykaż, że  $N_t^{(1)}$  i  $N_t^{(2)}$  są niezależnymi procesami Poissona.