

**Procesy Stochastyczne 2016/2017**  
**X zestaw zadań, 26 stycznia 2017r.**

1. Niech  $f \in C_c^2(\mathbb{R})$ ,  $\rho > 0$  – pewna stała rzeczywista. Znajdź rozwiązanie  $u(t, x)$  problemu Cauchy’ego

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha x \frac{\partial u}{\partial x}, \quad t > 0, x \in \mathbb{R},$$
$$u(0, x) = f(x).$$

2. Niech  $(W_t, \mathbb{P}_x)_{x \in \mathbb{R}^2, t \geq 0}$  będzie rodziną Wienera w  $\mathbb{R}^2$ , zaś  $D$  wnętrzem kąta w  $\mathbb{R}^2$  o rozwartości  $\alpha$ . Przez  $\tau = \tau_D$  oznaczamy pierwszy moment wyjścia ze zbioru  $D$ . Udowodnij, że:

- (a) jeżeli  $\alpha < \frac{\pi}{2}$ , to  $\mathbb{E}_x \tau < \infty$  dla dowolnego  $x \in D$ ,
- (b) jeżeli  $\alpha \geq \frac{\pi}{2}$ , to  $\mathbb{E}_x \tau = \infty$  dla dowolnego  $x \in D$ .

*Wskazówki.* (a) Rozpatrzyc funkcję  $h(r, \varphi) = r^2 \sin(\rho(\alpha + \epsilon - \varphi))$  we współrzędnych biegunowych. (b) Przyjąć  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  i z zasady odbicia oszacować ogon  $\tau$ .

3. Niech  $(X_t, \mathbb{P}_x)_{x \in \mathbb{R}, t \geq 0}$  będzie jednowymiarowym procesem dyfuzji, ze współczynnikiem dyfuzji  $a$  i współczynnikiem dryfu  $b$  (obie funkcje ciągłe), przy czym  $a(x) > 0$  dla każdego  $x \in \mathbb{R}$ . Niech  $D = (\alpha, \beta)$ ,  $\tau$  – pierwszy moment wyjścia z  $D$ . Wykaż, że  $\mathbb{E}_x \tau < \infty$  i oblicz  $\mathbb{P}_x[X_\tau = \alpha]$  dla  $x \in D$ .

4. Niech  $(W_t, \mathbb{P}_x)_{x \in \mathbb{R}^d, t \geq 0}$  będzie rodziną Wienera w  $\mathbb{R}^d$ . Niech  $D$  będzie kulą o środku w zerze i promieniu  $R$ ,  $\tau$  – pierwszym momentem wyjścia z  $D$ . Dla  $x \in D$  oblicz  $\mathbb{E}_x \tau$ .

5. (**jądro Poissona dla półprzestrzeni**) Niech  $D = \{(x_1, \dots, x_d) : x_d > 0\}$  będzie półprzestrzenią w  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$ . Wyznacz jądro Poissona dla  $D$ , tzn. taką funkcję  $h(x, y)$ ,  $x \in D, y \in \partial D$ , że każde ograniczone rozwiązanie  $u$  zagadnienia Dirichleta

$$\frac{1}{2} \Delta u(x) = 0, \quad x \in D,$$
$$u(x) = f(x), \quad x \in \partial D$$

jest postaci  $u(x) = \int_{\partial D} f(y) h(x, y) dy$ , gdzie  $f : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$  jest dowolną funkcją ciągłą i ograniczoną.