

Wstęp do Analizy Stochastycznej 2016/2017l, VIII seria zadań

0. Zadanie nr 7 z zestawu VII.

1. Proszę wykazać, że jeżeli $0 < t_1 < \dots < t_m < T$, ξ_j jest zmienną losową $\mathcal{F}_{t_j}$ -mierzalną i całkowalną z kwadratem, to proces $X = \sum_{j=1}^{m-1} \xi_j \mathbf{1}_{(t_j, t_{j+1}]}$ należy do $\mathcal{L}_T^2$, a ponadto

$$\int_0^t X dW = \sum_{j=1}^{m-1} \xi_j (W_{t_{j+1} \wedge t} - W_{t_j \wedge t}).$$

2. Proszę wykazać, że jeżeli $X \in \mathcal{L}_T^2$, $0 \leq s \leq t \leq T$ oraz ξ jest ograniczoną zmienną losową $\mathcal{F}_s$ -mierzalną, to $\xi X \mathbf{1}_{(s,t]} \in \mathcal{L}_T^2$ oraz $\int_s^t \xi X dW = \xi \int_s^t X dW$, gdzie $\int_s^t X dW$ definiujemy jako $\int_0^T \mathbf{1}_{(s,t]} X dW$.

3. Niech $T < \infty$. Załóżmy, że proces X należy do $\mathcal{L}_T^2$ i jest ciągły w $L^2(\Omega)$. Proszę wykazać, że dla dowolnego ciągu podziałów $\pi_n = \{t_0^{(n)}, \dots, t_{k_n}^{(n)}\}$ odcinka $[0, T)$ takiego, że $\text{diam}(\pi_n) \rightarrow 0$ zachodzi

$$\sum_{j=0}^{k_n-1} X_{t_j} \left(W_{t_{j+1}^{(n)} \wedge t} - W_{t_j^{(n)} \wedge t} \right) \rightarrow \int_0^t X_s dW_s$$

w przestrzeni $\mathcal{M}_T^{2,c}$.

4. Proszę wykazać, że dla $X \in \mathcal{L}_T^2$ proces $M_t = \left(\int_0^t X_s dW_s \right)^2 - \int_0^t X_s^2 ds$ jest martyngałem.

5. Niech $X, Y \in \mathcal{L}_T^2$. Dla $s, t \leq T$ proszę wyznaczyć $\text{Cov} \left(\int_0^t X_u dW_u, \int_0^s X_u dW_u \right)$.

6. Bezpośrednio z definicji proszę wyznaczyć $\int_0^t W_s dW_s$.