

Wstęp do Analizy Stochastycznej 2016/2017l, V seria zadań

1. Niech $T = \mathbb{R}_+$ lub $T = \mathbb{Z}_+$, a $(X_t)_{t \in T}$ jest procesem adaptowanym do $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$, całkowalnym, prawostronnie ciągłym w przypadku czasu ciągłego. Pokazać, że

(a) $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t \in T}$ jest martyngałem względem $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $t \in T$ i dla każdego ograniczonego momentu zatrzymania τ takiego, że $\tau \geq t$ zachodzi $\mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_t$;

(b) $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t \in T}$ jest nadmartyngałem względem $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $t \in T$ i dla każdego momentu zatrzymania τ przyjmującego skończenie wiele wartości i takiego, że $\tau \geq t$ zachodzi $\mathbb{E}X_\tau \leq \mathbb{E}X_t$.

2. $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t \in T}$ jest martyngałem, zaś τ – momentem zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$. Pokazać, że $X^\tau := (X_{t \wedge \tau})_{t \in T}$ jest martyngałem względem tej samej filtracji.

Wskazówka: skorzystać z poprzedniego zadania.

3. (prawo iterowanego logarytmu dla procesu Wienera) Udowodnić, że p.n.

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = 1.$$

Sugerowany schemat dowodu. Dla $t > 10$ oznaczmy $h(t) = \sqrt{2t \ln \ln t}$.

1) Dla ustalonych $\theta > 1$ i $u^2 > \theta$ wykazać, że

$$\sum_n \mathbb{P} \left[\sup_{t \in [\theta^n, \theta^{n+1}]} W_t \geq u h(\theta^n) \right] < \infty.$$

2) Wywnioskować stąd, że $\limsup_{t \rightarrow \infty} W_t/h(t) \leq u$ p.n., a następnie że $\limsup_{t \rightarrow \infty} W_t/h(t) \leq 1$ p.n.

3) Wykorzystując oszacowanie dla całek: dla $a > 0$

$$\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a^3} \right) e^{-a^2/2} \leq \int_a^\infty e^{-t^2/2} dt \leq \frac{1}{a} e^{-a^2/2},$$

pokazać że dla $\theta > 1$ i $u < 1$

$$\sum_n \mathbb{P}[W_{\theta^n} - W_{\theta^{n-1}} \geq u \sqrt{1 - 1/\theta} \cdot h(\theta^n)] = \infty.$$

4) Używając 2) i 3) pokazać, że $\limsup_{t \rightarrow \infty} W_t/h(t) \geq u \sqrt{1 - 1/\theta} - (\sqrt{\theta})^{-1}$ p.n. i wywnioskować stąd tezę.

4. Pokazać, że jeżeli τ jest momentem zatrzymania względem $(\mathcal{F}_t^W)_{t \geq 0}$ takim, że $\mathbb{E}\tau < \infty$, to $\mathbb{E}W_\tau = 0$ oraz $\mathbb{E}W_\tau^2 = \mathbb{E}\tau$.

Wsk. Rozpatrzeć martyngał $W_t^2 - t$, zastosować twierdzenie Dooba o stopowaniu do $\tau \wedge n$, pokazać że $W_{\tau \wedge n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} W_\tau$ w L^2 .

5. Wykazać, że dla dowolnych dodatnich t, a, b

$$\mathbb{P} \left[\sup_{s \leq t} W_s > b + \frac{1}{2} at \right] \leq e^{-ab}.$$

Wskazówka. Skorzystać z tego, że $M_t^\lambda = \exp\left(\lambda W_t - \frac{\lambda^2 t}{2}\right)$ jest martyngałem i z nierówności Dooba.

6. Dla $a \neq 0$ niech $\tau_a = \inf\{t \geq 0 : W_t = a\}$. Wyznaczyć transformatę Laplace'a zmiennej losowej τ_a , czyli $\mathbb{E}e^{-\lambda\tau_a}$, $\lambda > 0$.

Wskazówka. Użyć martyngałów eksponencjalnych i twierdzenia o stopowaniu.

7. Niech $\alpha, \beta > 0$. Zdefiniujmy $\tau = \inf\{t \geq 0 : |W_t| = \alpha\sqrt{t + \beta}\}$. Pokazać, że $\mathbb{E}\tau < \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha < 1$, i że w tym przypadku $\mathbb{E}\tau = \frac{\alpha^2\beta}{1-\alpha^2}$.