

Wstęp do Analizy Stochastycznej 2016/2017l, IX seria zadań

1. Korzystając bezpośrednio z definicji całki stochastycznej pokazać, że

$$\int_0^t W_s^2 dW_s = \frac{1}{3} W_t^3 - \int_0^t W_s ds.$$

2. Niech $M, M_1, N \in \mathcal{M}^{2,c}$, τ -moment zatrzymania. Pokazać, że:

(a)

$$\langle (M + M_1), N \rangle = \langle M, N \rangle + \langle M_1, N \rangle,$$

(b)

$$\langle M^\tau, N \rangle = \langle M, N^\tau \rangle = \langle M^\tau, N^\tau \rangle = \langle M, N \rangle^\tau.$$

(c) Jeżeli $X, Y \in \mathcal{L}_T^2$ to $\langle \int X dW, \int Y dW \rangle_t = \int_0^t X_s Y_s ds$.

(d) Uogólnić powyższe do: dla $M \in \mathcal{M}_T^{2,c}$ oraz $X, Y \in \mathcal{L}_{T,M}^2$ zachodzi:

$$\langle \int X dM, \int Y dN \rangle_t = \int_0^t X_s Y_s d\langle M \rangle_s.$$

Wskazówka. W zadaniu tym można skorzystać z zadania 7, seria IV.

3. Niech τ będzie momentem zatrzymania takim, że $\mathbb{E}\tau < \infty$. Pokazać, że $\mathbf{1}_{[0,\tau]} \in \mathcal{L}_\infty^2$ oraz $\int_0^\infty \mathbf{1}_{[0,\tau]}(s) dW_s = W_\tau$. Wywnioskować stąd, że $\mathbb{E}W_\tau = 0$ oraz $\mathbb{E}W_\tau^2 = \mathbb{E}\tau$.

4. (a) Pokazać, że jeżeli $X, Y \in \mathcal{M}_T^{2,c}$ są niezależnymi martynałami, to $\langle M, N \rangle = 0$.

(b) Czy implikacja przeciwna jest prawdziwa? *Wskazówka do (b): rozpatrzeć M^τ i $M - M^\tau$.*

5. Niech $M \in \mathcal{M}_\infty^{2,c}$.

(a) Niech τ będzie momentem zatrzymania, skończonym prawie na pewno. Pokazać, że $\mathbb{E}(M_\tau^2) \leq \mathbb{E}(\langle M \rangle_\tau)$.

(b) Dla $a > 0$ niech $\tau_a = \inf\{t \geq 0 : |M_t| > a\}$. Pokazać, że dla każdego $t > 0$ zachodzi $\mathbb{E}(\langle M \rangle_{\tau_a \wedge t}) \geq a^2 \mathbb{P}(\tau_a \leq t)$.

(c) Pokazać, że $\mathbb{P}(\sup_{s \in [0,t]} |M_s| > a) \leq a^{-2} \mathbb{E}(\langle M \rangle_t)$.

6. [nierówność Kunita-Watanabe] Udowodnić, że jeżeli X, Y są procesami prognozowalnymi, natomiast $M, N \in \mathcal{M}_T^{2,c}$ to dla $0 < t < T$ zachodzi:

$$\left| \int_0^t X_s Y_s d\langle M, N \rangle_s \right| \leq \int_0^t |X_s| |Y_s| d\langle M, N \rangle_s \leq \sqrt{\int_0^t X_s^2 d\langle M \rangle_s} \sqrt{\int_0^t Y_s^2 d\langle N \rangle_s}.$$