

Wstęp do Analizy Stochastycznej 2016/2017I, VII seria zadań

1. Niech $\mathcal{F}_t = \overline{\mathcal{F}_t^W}$, $M_t = W_t^2 - t$. Pokazać, że

$$Z_t = M_t^2 - 4 \int_0^t W_s^2 ds$$

jest martyngałem względem $\mathcal{F}_t$.

Uwaga. Dla danego martyngału Y_t proces rosnący, adaptowany i taki, że $Y_t^2 - Z_t$ jest martyngałem nazywa się procesem nawiasu skośnego dla Y_t . Mamy więc, że $\langle M \rangle_t = 4 \int_0^t W_s^2 ds$.

2. Pokazać, że jeżeli $F \in [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest klasy C^1 , to ma wahanie ograniczone oraz dla każdej funkcji ciągłej $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zachodzi

$$\int_a^b g(t) dF(t) = \int_a^b g(t) F'(t) dt.$$

3. Pokazać, że dla funkcji ciągłej, o wahanu skończonym $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zachodzi

$$(F(b))^2 - (F(a))^2 = 2 \int_a^b F(t) dF(t).$$

4. Dla $h \in C^1([0, t])$ wykazać (wzór na całkowanie przez części dla całki Paleya-Wienera):

$$\int_0^t h(s) dW_s = h(t)W_t - \int_0^t h'(s) W_s ds.$$

5. Niech $h \in L^2([0, T])$, niech $X_t = \int_0^t h(s) dW_s$. Pokazać, że X_t jest procesem gaussowskim, znaleźć jego funkcję średnich i funkcję kowariancji.

6. Wykazać, że proces

$$X_t = \begin{cases} (1-t) \int_0^t \frac{1}{1-s} dW_s, & \text{dla } 0 \leq t < 1, \\ 0 & \text{dla } t = 1 \end{cases}$$

ma takie same rozkłady skończeniowymiarowe jak most Browna, czyli proces $Y_t = W_t - tW_1$.

7. Niech $\alpha > 0$ będzie dane. Niech $Y_t = \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s$.

(a) Wyznaczyć funkcję kowariancji oraz rozkłady skończeniowymiarowe procesu Y .

(c) Pokazać, że Y_t jest zbieżny według rozkładu gdy $t \rightarrow \infty$. Znaleźć rozkład graniczny.

(d) Niech ξ będzie zmienną losową o rozkładzie granicznym dla Y_t , niezależną od procesu Wienera W_t . Znaleźć rozkłady skończeniowymiarowe procesu $X_t := e^{-\alpha t} \xi + Y_t$ i pokazać, że są one niezmiennicze w czasie. Jest to proces *Ornsteina-Uhlenbecka*.

(e) Pokazać, że proces ten spełnia następujące równanie (równanie Langevina):

$$X_t = \xi - \alpha \int_0^t X_s ds + W_t.$$