

Wstęp do Analizy Stochastycznej 2016/2017l, VI seria zadań

0. Zadania 6, 7 z serii nr 5.

1. (a) Jeżeli $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna oraz f, f', f'' są ograniczone, to

$$M_t = f(W_t) - f(W_0) - \frac{1}{2} \int_0^t f''(W_u) du$$

jest martyngałem względem filtracji $(\mathcal{F}_t^W)$.

(b) Niech teraz (W_t) oznacza d -wymiarowy proces Wienera. Jeśli $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ jest ograniczona, dwukrotnie różniczkowalna i ma wszystkie pochodne cząstkowe stopnia mniejszego lub równego 2 ograniczone, to

$$M_t = f(W_t) - f(W_0^d) - \frac{1}{2} \int_0^t \Delta f(W_u^d) du$$

jest martyngałem względem filtracji $(\mathcal{F}_t^W)$.

2. Pokaż, że martyngał eksponencjalny $M_t^\lambda := \exp(\lambda W_t - \frac{1}{2} \lambda^2 t)$ jest zbieżny p.n., gdy $t \rightarrow \infty$. Czy jest on zbieżny w L^1 ?

3. **(martyngałowy dowód mocnego prawa wielkich liczb)** Zmienne losowe $(\xi_i)_{i=1,2,\dots}$ są i.i.d, o skończonej wartości oczekiwanej. Definiujemy:

$$X_{-n} = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n}, \quad \mathcal{F}_{-n} = \sigma(X_{-n}, X_{-n-1}, X_{-n-2}, \dots).$$

Pokazać, że $(X_{-n}, \mathcal{F}_{-n})_{n=-1,-2,\dots}$ jest martyngałem (jest to tzw. “martyngał z czasem odwróconym”). Wyprowadzić stąd mocne prawo wielkich liczb.

Wskazówka. W zbiorze indeksów T dla tego martyngału występuje element największy.

4. Niech $(W_t)_{t \geq 0}$ będzie procesem Wienera w $\mathbb{R}$ oraz

$$\tau_a := \inf\{t > 0 : W_t = a\}, \quad \hat{\tau}_a = \inf\{t > 0 : |W_t| = a\}.$$

Używając martyngałów $W_t, W_t^2 - t$ udowodnij, że:

- (a) $\tau_a < \infty$, p.n., $a \in \mathbb{R}$;
- (b) $\mathbb{P}(\tau_a < \tau_{-b}) = \frac{b}{a+b}$, $a, b > 0$;
- (c) $\mathbb{E}\tau_a = a^2$ dla $a \geq 0$;
- (d) $\mathbb{E}\tau_a \wedge \tau_{-b} = ab$, dla $a, b > 0$;
- (e) $\mathbb{E}\tau_a = \infty$, dla $a \neq 0$.