

Wstęp do Analizy Stochastycznej 2016/2017l, IV seria zadań

1. τ, σ są momentami zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$. Które z poniższych funkcji są momentami zatrzymania (względem tej samej filtracji): $\tau \wedge \sigma$, $\tau \vee \sigma$, $\tau + \sigma$, τ^2 , $\tau - \sigma$?

2. Niech $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ będzie filtracją, τ momentem zatrzymania względem $(\mathcal{F}_t)$ przyjmującym przeliczalnie wiele wartości, a X – procesem adaptowanym do $\mathcal{F}_t$ (o wartościach w $\mathbb{R}$ albo w $\mathbb{R}^d$). Oznaczmy przez $(t_k)_{k=1,2,\dots}$ wszystkie skończone wartości τ i przyjmijmy

$$X_\tau(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} X_{t_k}(\omega) \cdot \mathbf{1}_{\{\tau=t_k\}}(\omega).$$

Sprawdzić bezpośrednio, że X_τ jest $\mathcal{F}_\tau$ –mierzalna (tzn. wykazać, że zbiory $X_\tau^{-1}(B)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (albo $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$) należą do σ –ciała $\mathcal{F}_\tau$).

3. Niech $(X_t)_{t \geq 0}$ będzie procesem adaptowanym do $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, prawostronnie ciągłym. Udowodnić, że X jest progresywnie mierzalny (to samo jest prawdą dla procesu lewostronnie ciągłego).

Wskazówka: dla danego $t > 0$ rozważyć procesy schodkowe:

$$X_s^{(n)}(\omega) = \begin{cases} X_0(\omega) & \text{dla } s = 0, \\ X_{k/2^n}(\omega) & \text{dla } s \in (\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}], \quad k = 1, 2, \dots, [2^n t], \\ X_t(\omega) & \text{dla } s \in (\frac{[2^n t]}{2^n}, t]. \end{cases}$$

Jakich procesów schodkowych użyć w przypadku lewostronnie ciągłym?

4. Niech $(M_t, \mathcal{F}_t)_{t \in T}$ będzie martyngałem całkowalnym z kwadratem (tzn. dla każdego $t \in T$ mamy $\mathbb{E}M_t^2 < \infty$). Pokazać, że (M_t) ma nieskorelowane przyrosty.

5. X i Y są dwoma niezależnymi procesami Wienera (tzn. $Z = (X, Y)$ jest procesem Wienera w $\mathbb{R}^2$). Pokazać, że następujące procesy są martyngałami względem $(\mathcal{F}_t^Z)_{t \geq 0}$:

- (a) $X_t^2 - Y_t^2$,
- (b) $X_t Y_t$,
- (c) $tX_t - \int_0^t X_s ds$ (jest to zwyczajna całka Riemanna funkcji ciągłej).

6. Wykazać, że dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}$ proces $M_t = e^{\lambda W_t - \frac{\lambda^2}{2} t}$ jest martyngałem względem $(\mathcal{F}_t^W)_{t \geq 0}$.

7. Niech $T = \mathbb{R}_+$ lub $T = \mathbb{Z}_+$, a $(X_t)_{t \in T}$ jest procesem adaptowanym do $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$, prawostronnie ciągłym w przypadku czasu ciągłego. Pokazać, że

(a) $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t \in T}$ jest martyngałem względem $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $t \in T$ i dla każdego ograniczonego momentu zatrzymania τ takiego, że $\tau \geq t$ zachodzi $\mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_t$;

(b) $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t \in T}$ jest nadmartyngałem względem $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $t \in T$ i dla każdego momentu zatrzymania τ przyjmującego skończenie wiele wartości i takiego, że $\tau \geq t$ zachodzi $\mathbb{E}X_\tau \leq \mathbb{E}X_t$.