

Wstęp do Analizy Stochastycznej 2016/2017l, III seria zadań

1. (ułamkowy ruch Browna) Ułamkowym ruchem Browna nazywamy proces gaussowski, dla którego $m(t) = 0$ i $\mathbb{E}|X_t - X_s|^2 = |t - s|^{2H}$, gdzie ustalone $H \in (0, 1)$ to tzw. wykładnik Hursta (korzystając z ogólnej teorii procesów gaussowskich można wykazać, że taki proces istnieje). Udowodnić, że proces ten ma modyfikację o ciągłych trajektoriach. Dla jakich $\gamma > 0$ posiada on modyfikację o trajektoriach hölderowskich z wykładnikiem γ ?

2. W chwili początkowej $t_0 = 0$ cząstka rozpoczyna po osi x ruch jednostajny w prawo z prędkością 1. W momencie $t = 1$ rzucamy monetą. Jeżeli wypadnie reszka, to cząstka zawraca i porusza się od tego czasu w lewo (jeżeli wypadnie orzeł, to dalej porusza się w prawo). Oznaczmy przez X_t położenie cząstki w chwili t , a przez $(\mathcal{F}_t^X)_{t \geq 0}$ naturalną filtrację związaną z procesem X , tzn. $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_s : s \leq t\}$. Pokazać, że $(\mathcal{F}_t^X)_{t \geq 0} \neq (\mathcal{F}_{t+}^X)_{t \geq 0}$.

3. Pokazać, że dla procesu $(X_t)_{t \geq 0}$ o przyrostach niezależnych i prawostronnie ciągłych trajektoriach, dla $0 \leq s < t$ zmienna losowa $X_t - X_s$ jest niezależna od σ -ciała $\mathcal{F}_{s+}^X$. *Wskazówka:* najpierw pokazać, że dla każdej funkcji $f \in CB(\mathbb{R})$ oraz zbioru $A \in \mathcal{F}_{s+}^X$ zachodzi $\mathbb{E}(f(X_t - X_s)\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(f(X_t - X_s))\mathbb{P}(A)$.

4. $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ jest filtracją w pewnej przestrzeni probabilistycznej.
(a) Pokazać, że dla każdego $t \geq 0$

$$\overline{(\mathcal{F}_{t+})} = (\overline{\mathcal{F}_t})_+.$$

(b) Pokazać, że jeżeli dla dowolnych $t \geq 0$ i $A \in \mathcal{F}_\infty$ zachodzi $\mathbb{P}(A|\mathcal{F}_t) = \mathbb{P}(A|\mathcal{F}_{t+})$ p.n., to filtracja $(\overline{\mathcal{F}_t})_{t \geq 0}$ jest prawostronnie ciągła.

Wskazówka. Pokazać, że w tym przypadku $\mathcal{F}_{t+} \subset \overline{\mathcal{F}_t}$.

5. Niech X będzie procesem o przyrostach niezależnych i p.n. prawostronnie ciągłych trajektoriach. Pokazać, że filtracja $(\overline{\mathcal{F}_t^X})_{t \geq 0}$ jest prawostronnie ciągła.

6. Niech $T = [0, \infty)$, $A \in \mathcal{F}$ oraz $X_t \stackrel{\text{def}}{=} (t - 1)_+ \mathbf{1}_A$.

(a) Wyznaczyć $\mathcal{F}_t^X$.

(b) Niech $\tau = \inf\{t \geq 0 : X_t > 0\}$. Czy τ jest momentem zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_t^X)_t$? Czy jest momentem zatrzymania względem $(\mathcal{F}_{t+}^X)_t$?

7. $(X_t)_{t \geq 0}$ jest procesem o wartościach w $\mathbb{R}^d$, adaptowanym do filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, o ciągłych trajektoriach. Niech $A \subset \mathbb{R}^d$ będzie zbiorem otwartym. Pokazać, że $T_A = \inf\{t \geq 0 : X_t \in A\}$ jest momentem zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_{t+})_{t \geq 0}$.

Wskazówka: wystarczy rozpatrywać zbiory $\{T_A < t\}$.