

Wstęp do Analizy Stochastycznej 2016/2017l, II seria zadań

1. Wykazać, że w przestrzeni $\mathcal{X} = \mathcal{C} = C([0, 1], \mathbb{R})$ z metryką

$$\|x - y\| = \sup_{t \in [0, 1]} |x(t) - y(t)|$$

σ –ciało zbiorów borelowskich i σ –ciało zbiorów cylindrycznych pokrywają się.

Wskazówka: przestrzeń $\mathcal{C}$ jest ośrodkowa.

2. Niech T będzie zbiorem nieprzeliczalnym. Udowodnić, że jeżeli $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$, to istnieje ciąg $t_1, t_2, \dots \subset T$ oraz zbiór $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{(t_1, t_2, \dots)})$ takie, że

$$A = \{x : (x(t_1), x(t_2), \dots) \in B\}.$$

- 3.(c.d.) Niech $T = [0, 1]$. Pokazać, że następujące zbiory nie należą do σ –ciała zbiorów cylindrycznych:

- (a) $A_1 = \{x : \sup_{0 < t < 1} x(t) < 4\}$,
- (b) $A_2 = \{x : \lim_{t \rightarrow 0} x(t) = 0\}$,
- (c) $A_3 = \{x : t \mapsto x(t) \text{ jest ciągle w punkcie } 1/2\}$.

4. Udowodnić, że istnieje proces startujący z 0, o przyrostach niezależnych i stacjonarnych, $X_0 = 0$, taki, że dla $t > s$ przyrost $X_t - X_s$ ma symetryczny rozkład Cauchy'ego z parametrem $(t - s)$. Proces ten nazywa się *procesem 1-stabilnym* lub *procesem Cauchy'ego*.

Przypomnienie. Symetryczny rozkład Cauchy'ego z parametrem $a > 0$ to rozkład o gęstości $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

5. Udowodnić, że nie istnieje proces startujący z 0, o przyrostach niezależnych i stacjonarnych, $X_0 = 0$, taki, że dla $t > s$ przyrosty $X_t - X_s$ mają rozkład $\exp(t - s)$.

6. Wykaż, że trajektorie ruchu Browna nie są $\frac{1}{2}$ –hölderowskie na żadnym odcinku, tzn.

$$\mathbb{P}[\exists [a, b] \subset \mathbb{R}_+ : W \text{ jest } \frac{1}{2}\text{--hölderowska na } [a, b]] = 0.$$

Wskazówka: dla ustalonego odcinka $[a, b]$ podzielić go na n równych części i rozważyć przyrosty.

7. Proces X jest modyfikacją procesu Wienera. Które z następujących własności są spełnione dla X :

- (a) niezależność przyrostów,
- (b) stacjonarność przyrostów,
- (c) ciągłość trajektorii,
- (d) $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{t} = 0$ p.n.,
- (e) $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{t} = 0$ według prawdopodobieństwa.