

Wstęp do Analizy Stochastycznej 2016/2017I, XII seria zadań

1. Za pomocą wzoru Itô (dwuwymiarowego) wykazać, że następujące procesy są martynałami:

- (a) $X_t = e^{\frac{1}{2}t} \cos(W_t)$,
- (b) $X_t = e^{\frac{1}{2}t} \sin(W_t)$,
- (c) $X_t = (W_t + t)e^{-W_t - \frac{1}{2}t}$.

2. Niech $\lambda \in \mathbb{R}$. Pokazać, że proces $X_t = e^{\lambda W_t - \frac{\lambda^2}{2}t}$ spełnia równanie

$$dX_t = \lambda X_t dW_t, \quad X_0 = 1$$

(tzn. $X_t = 1 + \int_0^t \lambda X_s dW_s$). Wykazać, że równanie to ma dokładnie jedno rozwiązanie. Wsk. Rozważyć Y – inne rozwiązanie tego równania. Za pomocą wzoru Ito obliczyć $\frac{Y_t}{X_t}$.

3. Uogólnienie. Załóżmy, że $Z \in \Lambda_\infty^2$. Pokazać, że proces

$$X_t = e^{\int_0^t Z_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t Z_s^2 ds}$$

spełnia równanie

$$dX_t = Z_t X_t dW_t, \quad X_0 = 1.$$

Analogicznie jak wyżej, pokazać że rozwiązanie to jest jedyne.

4. Niech $D \subset \mathbb{R}^d$ będzie niepustym obszarem ograniczonym, $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ – funkcją harmoniczną w D i taką, że $u \in C^2(\overline{D})$. Oznaczmy przez W proces Wienera w $\mathbb{R}^d$. Dla ustalonego $x \in D$ niech $\tau = \inf\{t : W_t + x \notin D\}$. Pokazać, że $(h(W_{t \wedge \tau} + x))_{t \geq 0}$ jest martynałem.

Wsk. Zastosować wzór Ito do $h(W_t + x)$.

5. [Martynał lokalny, który nie jest martynałem]. Niech W będzie procesem Wienera w $\mathbb{R}^3$, zaś $a \in \mathbb{R}^3$, $a \neq 0$ – ustalonym punktem.

a) Pokazać, że $\left(\frac{1}{|W_t - a|}\right)_{t \geq 0}$ jest jednostajnie całkowalnym martynałem lokalnym (jest więc nadmartynałem, bo jest nieujemny), ale nie jest martynałem (względem filtracji $(\mathcal{F}_t^W)_{t \geq 0}$).

b) Pokazać, że: $\mathbb{P}[\exists_t W_t = a] = 0$.

c) Pokazać, że $\lim_{t \rightarrow \infty} |W_t| = \infty$ p.n.

Wsk. Zdefiniować $\tau_n = \inf\{t : |W_t - a| = \frac{1}{n}\}$, $\sigma_n = \inf\{t : |W_t - a| = n\}$, skorzystać z tego, że funkcja $x \rightarrow \frac{1}{|x - a|}$ jest harmoniczną w $\mathbb{R}^3 \setminus \{a\}$, zadania 4, twierdzenia o stopowaniu martynałów.

6. [proces Bessela]. Niech $W_t = (W_t^{(1)}, \dots, W_t^{(d)})$ będzie d -wymiarowym procesem Wienera, $d \geq 2$, natomiast $R_t = \|W_t\| = \sqrt{(W_t^{(1)})^2 + \dots + (W_t^{(d)})^2}$. Proces R_t nazywamy d -wymiarowym procesem Bessela.

(a) Pokazać, że

$$B_t = \sum_{j=1}^d \int_0^t \frac{W_s^{(j)}}{R_s} dW_s^{(j)}$$

jest jednowymiarowym procesem Wienera.

(b) Wykazać, że R_t spełnia następujące równanie stochastyczne:

$$R_t = \int_0^t \frac{(d-1)}{2R_s} ds + B_t, \quad R_0 = 0.$$

7. Niech $(W^{(1)}, W^{(2)}, W^{(3)})$ będzie trójwymiarowym procesem Wienera oraz

$$X_t = \int_0^t \sin(W_s^{(3)}) dW_s^{(1)} + \int_0^t \cos(W_s^{(3)}) dW_s^{(2)}.$$

Wykazać, że X jest procesem Wienera.

8. Znaleźć jawną postać rozwiązania równania

$$dX_t = \left(\sqrt{1 + X_t^2} + \frac{1}{2} X_t \right) dt + \left(\sqrt{1 + X_t^2} \right) dW_t, \quad X_0 = 0.$$

Wsk.: Rozważyć $f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} + x)$, obliczyć $f'(x)$.

9. Wykazać, że rozwiązanie stochastycznego równania stochastycznego

$$dX_t = e^{-X_t} dW_t - \frac{1}{2} e^{-2X_t} dt$$

ekspłduje w skończonym czasie. Wsk. Rozważyć proces $Y_t = e^{X_t}$.