

Wstęp do Analizy Stochastycznej 2016/2017l, XI seria zadań

0. Zadania 5 i 6 z serii X.

1. Niech $M, N \in \mathcal{M}_{T, \text{loc}}^c$, $X \in \Lambda_T^2(M)$, $Y \in \Lambda_T^2(N)$.

(a) Pokazać, że dla $0 < t < T$

$$\left\langle \int X dM, \int Y dN \right\rangle_t = \int_0^t X_s Y_s d\langle M, N \rangle_s.$$

Wskazówka. Najpierw pokazać tę równość dla $M, N \in \mathcal{M}_T^{2,c}$, $X \in \mathcal{L}_T^2(M)$, $Y \in \mathcal{L}_T^2(N)$.

(b) Obliczyć $\mathbb{E} \left(\int_0^t s dW_s \cdot \int_0^t W_s^2 dW_s \right)$.

2. Niech τ będzie momentem zatrzymania. Obliczyć $\int_0^t s dW_{s \wedge \tau}$.

3. Załóżmy, że $(M_t)_{t \geq 0}$ jest ciągłym martyngałem lokalnym takim, że $M_0 = 0$ oraz $\limsup_{t \rightarrow \infty} |M_t| = \infty$. Definiujemy $\tau = \inf\{t : |M_t| = 5\}$. Wykazać, że $M^\tau \in \mathcal{M}_\infty^{2,c}$, $\mathbb{E}M_\tau = 0$ oraz $\mathbb{E}M_\tau^2 = \langle M \rangle_\tau = 25$.

4. Niech $M_t = \int_0^t e^{-s} W_s dW_s$. Czy granica $M_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} M_t$ istnieje? W jakim sensie? Obliczyć $\mathbb{E}M_\infty$ oraz $\text{Var } M_\infty$.

5. Niech $M_t = \int_0^t e^s W_s dW_s$. Czy jest to martyngał czy tylko martyngał lokalny? Obliczyć $\mathbb{E}M_t^2$.

6. Wyznaczyć granicę (w L^1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{2n-1} \left(\int_{k/n}^{(k+1)/n} W_s^4 dW_s \right)^2.$$

7. Korzystając ze wzoru na całkowanie przez części przedstawić $\int_0^t W_s^2 dW_s$ w postaci nie zawierającej całek stochastycznych.

8. Przez $\mathcal{V}_T^c$ oznaczamy klasę procesów ciągłych, adaptowanych, których trajektorie mają wahanie skończone na każdym przedziale $[0, t]$ dla $t \leq T$.

Niech $A, B \in \mathcal{V}_T^c$. Wykazać, że

$$A_t B_t - A_0 B_0 = \int_0^t A_s dB_s + \int_0^t B_s dA_s, \quad 0 < t < T.$$

W powyższym wzorze ałki są rozumiane punktowo (dla prawie każdego ω) jako całki Lebesgue'a-Stieltjesa.