

Wstęp do Analizy Stochastycznej 2016/2017l, X seria zadań

1. Niech $X \in \Lambda_T^2(M)$, $t_1 < t_2 < T$, oraz niech ξ będzie dowolną zmienną losową $\mathcal{F}_{t_1}$ -mierzalną. Pokazać, że wtedy $\xi X \mathbf{1}_{(t_1, t_2]}$ $\in \Lambda_T^2(M)$ oraz $\int_{t_1}^{t_2} \xi X dM = \xi \int_{t_1}^{t_2} X dM$.

Wskazówka. Rozpatrzyć

$$\sigma_n = \begin{cases} t_1 & \text{gdy } |\xi| > n, \\ T & \text{gdy } |\xi| \leq n. \end{cases}$$

2. Załóżmy, że $M, N \in \mathcal{M}_{T,loc}^c$ (martyngały lokalne, ciągłe). Pokazać, że:

- a) $M + N$ jest martyngałem lokalnym,
- b) jeżeli X_0 jest całkowalną zmienną losową $\mathcal{F}_0$ -mierzalną, to $M + X_0$ jest martyngałem lokalnym,
- c) jeżeli τ jest momentem zatrzymania, to M^τ jest martyngałem lokalnym,
- d) jeżeli M jest ograniczony, to M jest martyngałem,
- e) jeżeli M jest nieujemny oraz $\mathbb{E}|M_0| < \infty$, to M jest nadmartyngałem,
- f) jeżeli $M_0 = 0$ oraz $\mathbb{E}\langle M \rangle_t < \infty$ dla $t \geq 0$, to $M \in \mathcal{M}^{2,c}$,
- g) istnieje taki ciąg momentów zatrzymania $\tau_n \nearrow T$, że $M^{\tau_n} \mathbf{1}_{\{\tau_n > 0\}}$ jest martyngałem ograniczonym,
- h) jeżeli istnieje $\xi \in L^1(\Omega)$ takie, że $|M_t| \leq \xi$ dla każdego t , to M jest martyngałem.

3. Niech dla uproszczenia $T = \infty$. Wykazać, że $\mathcal{M}_{loc,loc}^c = \mathcal{M}_{loc}^c$ oraz $\mathcal{M}_{loc,loc}^{2,c} = \mathcal{M}_{loc}^{2,c}$ (tzn. wykazać, że jeżeli istnieje taki ciąg momentów zatrzymania $\tau_n \nearrow \infty$, że $M^{\tau_n} \in \mathcal{M}_{loc}^c$, to również $M \in \mathcal{M}_{loc}^c$; analogicznie dla $\mathcal{M}_{loc}^{2,c}$).

4. Niech $M \in \mathcal{M}^{2,c}$ będzie martyngałem ograniczonym. Wykazać, że

$$\int_0^t M_s dM_s = \frac{1}{2} (M_t^2 - \langle M \rangle_t).$$

5. Niech $M_t = \int_0^t W_s^3 dW_s$.

- (a) Opisać przestrzeń $\mathcal{L}_\infty^2(M)$ oraz $\Lambda_\infty^2(M)$.
- (b) Niech $X_t = \int_0^t \frac{1}{W_s} dM_s$. Uzasadnić, że proces X jest dobrze określony; wyznaczyć wartość oczekiwaną i funkcję kowariancji X .

6. Wykazać, że jeżeli $M \in \mathcal{M}_{T,loc}^c$, $M_0 = 0$ oraz τ jest takim momentem zatrzymania, że $\mathbb{E}\langle M \rangle_\tau < \infty$, to M^τ jest martyngałem.