

Wstęp do Analizy Stochastycznej 2016/2016l, I seria zadań

W poniższych zadaniach W_t oznacza ruch Browna w $\mathbb{R}$, określonym na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1. Udowodnić, że z prawdopodobieństwem 1:

- (a) trajektorie W_t są nieograniczone,
- (b) trajektorie W_t nie są jednostajnie ciągłe na $[0, \infty)$.

2. Wykaż, że dla $\beta > \frac{1}{2}$ prawie na pewno zachodzi $\frac{W_t}{t^\beta} \rightarrow 0$, gdy $t \rightarrow \infty$.

3. (**ważne!**) Niech $0 \leq a < b$ będą dwiema ustalonymi liczbami. Rozpatrzmy ciąg podziałów odcinka $[a, b]$:

$$\pi_n = \{a = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < t_2^{(n)} < \dots < t_{k_n}^{(n)} = b\}.$$

Przez $\|\pi_n\|$ oznaczamy średnicę podziału π_n , czyli liczbę $\max_{i=0, \dots, k_n-1} (t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)})$. Rozpatrzmy

$$S_n = \sum_{i=0}^{k_n-1} (W_{t_{i+1}^{(n)}} - W_{t_i^{(n)}})^2.$$

Pokazać, że

- (a) jeżeli $\|\pi_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, to $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (b-a)$ w $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$,
- (b) jeżeli $\sum_n \|\pi_n\| < \infty$, to zachodzi zbieżność prawie wszędzie.

Wskazówka do zbieżności p.n.: skorzystać z nierówności Czebyszewa i lematu Borela-Cantelli.

4. Udowodnić, że prawie wszystkie trajektorie procesu Wienera mają nieskończone wahanie na każdym skończonym przedziale.

5. Niech $(X_t)_{t \in [0,1]}$ będzie procesem Wienera (na odcinku $[0, 1]$). Pokazać, że $U_t = (1+t)X_{\frac{t}{1+t}} - tX_1$ jest procesem Wienera na $[0, \infty)$.

6. Wykazać, że prawie na pewno trajektorie ruchu Browna są nigdzie nieróżniczkowalne.

Wskazówki:

- (1) Twierdzenie wystarczy udowodnić dla $T = [0, 1]$.
- (2) Zaobserwować, że jeżeli $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $t_0 \in (0, 1)$, to dla pewnego $l > 0$ i dla s dostatecznie bliskiego t_0 zachodzi $|f(t_0) - f(s)| \leq l|t_0 - s|$.
- (3) Dla dostatecznie dużego n_0 rozważyć punkty postaci j/n_0 i wykazać, że jeżeli f jest różniczkowalna w pewnym punkcie t_0 , to dla pewnego j_0 i pewnego l będziemy mieli $|f((j_0+1)/n_0) - f(j_0/n_0)| \leq \frac{7l}{n_0}$, $|f((j_0+2)/n_0) - f((j_0+1)/n_0)| \leq \frac{7l}{n_0}$, $|f((j_0+3)/n_0) - f((j_0+2)/n_0)| \leq \frac{7l}{n_0}$.
- (4) Założyć, że $t \mapsto W_t$ jest różniczkowalna w pewnym punkcie $t_0 \in (0, 1)$, zastosować obserwację z punktu (3), a następnie użyć niezależności przyrostów dla oszacowania odpowiednich prawdopodobieństw.

7. Niech π_n będzie ciągiem podziałów odcinka $[a, b]$ (jak w zadaniu 3), dla którego $\|\pi_n\| \rightarrow 0$. Wykazać, że poniższe granice istnieją w L^2 i obliczyć je:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k_n} \frac{W_{t_i^{(n)}} + W_{t_{i-1}^{(n)}}}{2} (W_{t_i^{(n)}} - W_{t_{i-1}^{(n)}}), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k_n} W_{t_{i-1}^{(n)}} (W_{t_i^{(n)}} - W_{t_{i-1}^{(n)}}).$$