

Wstęp do Analizy Stochastycznej 2016/2017
Zadania przygotowawcze przed kolokwium

Uwaga. We wszystkich zadaniach W_t oznacza proces Wienera.

1. Czy zbiory:

$$A_1 = \{x \in \mathbb{R}^{[0,1]} : \sup_{n=1,2,\dots} |x_{1/n}|^2 < \infty\},$$

$$A_2 = \{x \in \mathbb{R}^{[0,1]} : \sup_{t \in (0,1)} (1-t)|x_{1/t}|^2 < \infty\}$$

należą do σ -ciała $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,1]})$? Czy $A_1 \cap C[0,1]$, $A_2 \cap C[0,1]$ należą do σ -ciała $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,1]}) \cap C[0,1]$?

2. Wykaż, że zbiór $\mathcal{A} = \{\omega : (W_n(\omega))_{n=1,2,\dots} \text{ jest od pewnego miejsca malejący}\}$ ma prawdopodobieństwo zero.

3. Proces X_t jest gaussowski, scentrowany, ponadto $\text{Var}(X_t - X_s) \leq 2|t - s|^{1/3}$. Wykaż, że proces ten ma modyfikację ciągłą. Co można powiedzieć o holderowskości jej modyfikacji?

4. $(X_t)_{t \geq 0}$ jest procesem o ciągłych trajektoriach takim, że X_t^5 jest martyngałem, $X_0 = 0$, oraz $\limsup_{t \rightarrow \infty} |X_t| = \infty$ p.n. Niech

$$\tau_a = \inf\{t \geq 0 : X_t = a\}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Udowodnij, że dla $a, b > 0$ zachodzi $\mathbb{P}(\tau_a < \tau_{-b}) = \frac{b^5}{a^5 + b^5}$.

5. Proces (X_t) jest całkowalny z kwadratem, scentrowany (tzn. ma średnią zero), o przyrostach niezależnych. Wykaż, że proces $M_t = (X_t^2 + 3X_t - \text{Var } X_t)_{t \geq 0}$ jest martyngałem względem filtracji $\mathcal{F}_t^X$.

6. Niech $\tau = \inf\{t > 0 : |W_t| = \sqrt{t+2}\}$. Czy $\tau < \infty$? p.n. Czy $\mathbb{E}\tau < \infty$? W przypadku odpowiedzi twierdzącej wyznaczyć $\mathbb{E}\tau$.

7. Wykaż, że $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{W_{n+1} - W_n}{\sqrt{2 \log n}} = 1$ p.n.

8. Niech $\tau_1, \tau_2, \dots$ będzie ciągiem momentów zatrzymania względem pewnej filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Wykazać, że:

(a) $\sup_n \tau_n$ jest momentem zatrzymania względem $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$,

(b) $\limsup_{n \rightarrow \infty} \tau_n$ jest momentem zatrzymania względem $(\mathcal{F}_{t+})_{t \geq 0}$.

9. Niech τ będzie momentem zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_t^W)_{t \geq 0}$ skończonym p.n. Pokaż, że dla dowolnych $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ oraz $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k$ zachodzi

$$\mathbb{E} \left(e^{i \sum_{l=1}^k a_l (W_{\tau+t_l} - W_{\tau+t_{l-1}})} \mid \mathcal{F}_\tau \right) = e^{-\frac{1}{2} \sum_{l=1}^k a_l^2 (t_l - t_{l-1})} \quad \text{p.n..}$$

Wynioskuj stąd, że $(W_{t+\tau} - W_\tau)_{t \geq 0}$ jest procesem Wienera niezależnym od $\mathcal{F}_\tau$.

9. Dany jest martyngał $(X_t)_{t \geq 0}$ adaptowany do filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Czy $(X_t)_{t \geq 0}$ jest martyngałem względem:

(a) $(\mathcal{F}_{t+})_{t \geq 0}$,

(b) $(\overline{\mathcal{F}}_t)_{t \geq 0}$,

(c) $(\sigma(\mathcal{F}_t, \mathcal{G}_t))_{t \geq 0}$, gdzie $(\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ jest pewną filtracją niezależną od $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$?

10. Dana jest funkcja $h \in L^2([0, T])$, $T < \infty$. Niech $X_t := \int_0^t h(s) dW_s$ oraz $Y_t = \int_0^t h^2(s) ds$, $0 \leq t \leq T$. Wykaż, że proces

$$M_t = e^{X_t - \frac{1}{2} Y_t}, \quad 0 \leq t \leq T$$

jest martyngałem.

11. Niech $X_t = tW_t$, $t \geq 0$. Wykaż, że $\langle X \rangle_t = A_t = 2 \int_0^t s W_s^2 ds + \frac{1}{3} t^3$ (tzn. wykaż, że $X_t^2 - A_t$ jest martyngałem).

12. Niech $X_t = \int_0^t \sin s dW_s$. Wyznacz $\mathbb{E}(X_1 + X_3)^4$.