

RP II 2015/16, seria VI
Łańcuchy Markowa II

1. (kontynuacja zadania 10 z poprzedniej kartki) Grę kończymy, gdy doczekamy się albo dwóch orłów, albo dwóch reszek. Jaki jest średni czas trwania gry?

2. Macierz przejścia łańcucha Markowa o trzech stanach $\{1, 2, 3\}$ dana jest wzorem

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

(a) Ile średnio kroków zajmie przejście ze stanu 1 do stanu 2?

(b) Jakie jest przybliżone prawdopodobieństwo tego, że po 1000 krokach będziemy się znajdować w stanie 1?

3. Pchła porusza się między człowiekiem, psem, kotem i podłogą, przeskakując z równymi prawdopodobieństwami do każdego kolejnego miejsca pobytu. Zaczyna na podłodze, na kocie i na psie żeruje, na człowieku ginie.

(a) Jaki jest średni czas życia pchły?

(b) Jaka jest średnia ilość posiłków pchły przed śmiercią?

4. Dla łańcucha Markowa o 4 stanach i macierzy przejścia

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

wyznaczyć wszystkie rozkłady stacjonarne i przedyskutować zachowanie prawdopodobieństw $p_{ij}^{(n)}$ gdy $n \rightarrow \infty$.

5. Pewien naukowiec ma r parasoli i przemieszcza się między domem a biurem, zabierając ze sobą parasol (jeżeli jest pod ręką) wtedy, gdy pada (prawdopodobieństwo p), ale nie przy bezdeszczowej pogodzie (prawdopodobieństwo $q = 1 - p$). Niech stanem łańcucha będzie liczba parasoli dostępnych w danej chwili, niezależnie od tego, czy naukowiec jest w domu, czy w pracy.

(a) Skonstruować macierz przejścia, wyznaczyć rozkład stacjonarny.

(b) Znaleźć prawdopodobieństwo zmoknięcia naukowca w danym (odległym) dniu.

(c) Wykazać, że 5 parasoli jest w stanie uchronić go przed zmoknięciem w 95% przypadków (dla dowolnego p).