

RP II 2015/16, seria V

Martyngały

1. Niech ϵ_n będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie dwupunktowym: $\mathbb{P}(\epsilon_n = 1) = p$, $\mathbb{P}(\epsilon_n = -1) = q = 1 - p$, przy czym $p \neq 1/2$. Oznaczmy $S_n = \epsilon_1 + \dots + \epsilon_n$, oraz $M_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$. Wykazać, że ciąg M_n jest martyngałem względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_n = (\sigma(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n))_n$.

2. $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n=0,1,\dots}$ jest martyngałem, natomiast W_n , $n = 1, 2, \dots$ jest takim ciągiem ograniczonych zmiennych losowych, że W_n jest $\mathcal{F}_{n-1}$ mierzalna, $n = 1, 2, \dots$. Oznaczamy $\Delta_n = X_n - X_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$. Wykazać, że ciąg $M_n = X_0 + W_1\Delta_1 + \dots + W_n\Delta_n$ tworzy martyngał względem tej samej filtracji.

3. $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ jest takim martyngałem całkowalnym z kwadratem, że $\mathbb{E}X_n^2 = \mathbb{E}X_{n+1}^2$, $n = 0, 1, \dots$. Wykazać, że $\mathbb{P}(X_n = X_{n+1}) = 1$.

4. Niech ϵ_n będzie ciągiem niezależnych zmiennych Bernoulliego tzn. $\mathbb{P}(\epsilon_n = 1) = \mathbb{P}(\epsilon_n = -1) = \frac{1}{2}$.

a) Wykazać, że dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$ ciąg $X_n = e^{a(\epsilon_1 + \dots + \epsilon_n) - \frac{na^2}{2}}$ tworzy nadmartyngał.

b) Wywnioskować stąd, że ciąg $Z_n = \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \exp\left(\frac{S_n^2}{2n}\right)$ również jest nadmartyngałem.

c) Udowodnić, że ciąg $\frac{S_n}{\sqrt{n \log n}}$ jest prawie na pewno ograniczony.

5. Zmienne losowe Y_n są i.i.d., o rozkładzie $\mathbb{P}(Y_n = \frac{1}{2}) = \mathbb{P}(Y_n = \frac{3}{2}) = \frac{1}{2}$. Pokazać, że $M_n = Y_1 \cdots Y_n$ tworzy martyngał względem swej naturalnej filtracji. Pokazać, że jest on zbieżny p.n., wyznaczyć granicę. Czy jest on zbieżny w L^1 ?

6. Udowodnić, że teza twierdzenia Dooba o stopowaniu (tzn. $\mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_0$) zachodzi w przypadku, gdy $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ jest takim martyngałem, że

$$\sup_{n=1,2,\dots} E(|X_n - X_{n-1}| | \mathcal{F}_{n-1}) < \infty$$

oraz $\mathbb{E}(\tau) < \infty$.

7. Udowodnić tożsamość Walda: X_n – ciąg niezależnych jednakowo rozłożonych zmiennych losowych o skończonej wartości oczekiwanej, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$, τ – całkowalny moment stopu względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_n$. Wtedy $\mathbb{E}(X_1 + \dots + X_\tau) = \mathbb{E}(\tau)\mathbb{E}(X_1)$.

8. X_n – ciąg jak w zadaniu poprzednim, a dodatkowo $\mathbb{E}(X_1^2) < \infty$, τ – całkowalny moment stopu. Połóżmy $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Wykazać, że

$$\mathbb{E}(S_\tau - \tau \cdot \mathbb{E}X_1)^2 = \mathbb{E}\tau \text{Var } X_1.$$

9. Rozpatrzmy symetryczne błądzenie przypadkowe po liczbach całkowitych startujące z 0, tzn. $S_0 = 0$, $S_n = r_1 + \dots + r_n$, gdzie $(r_n)_n$ jest ciągiem niezależnych symetrycznych zmiennych Bernoulliego. Ustalamy dwie liczby całkowite: $a < 0 < b$. Niech $\tau = \inf\{n \geq 0 : S_n = a \text{ lub } S_n = b\}$.

- a) Wyznaczyć $\mathbb{P}(S_\tau = a)$ oraz $\mathbb{P}(S_\tau = b)$.
- b) Czy $\mathbb{E}\tau < \infty$? Jeżeli tak, wyznaczyć tę wartość.

10. Rozwiązać analogiczne zadanie dla *niesymetrycznego* błądzenia przypadkowego po liczbach całkowitych.

11. Rzucamy kostką tak długo, aż wyrzucimy wszystkie oczka. Stosując tożsamość Walda wyznaczyć wartość oczekiwaną liczby rzutów.

12. $\xi_1, \xi_2, \dots$ są niezależnymi i jednakowo rozłożonymi zmiennymi losowymi, $P(\xi_i = 1) = p \in (0, 1)$, $P(\xi_i = -1) = 1 - p = q$. Ustalmy $r \in (0, 1)$, $r \neq p$. Niech $\rho(1) = r$, $\rho(0) = 1 - r$, $\pi(1) = p$, $\pi(0) = 1 - p$ i zdefiniujmy

$$X_n = \frac{\rho(\xi_1) \cdots \rho(\xi_n)}{\pi(\xi_1) \cdots \pi(\xi_n)}.$$

Pokazać, że X_n jest martyngałem względem swojej naturalnej filtracji, zbieżnym prawie na pewno do zera.

13. Zmienne losowe X_n są niezależne, X_n ma rozkład jednostajny na $[-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}]$. Niech $S_1 = 0$, $S_n = X_1 X_2 + \dots + X_{n-1} X_n$, $n = 2, 3, \dots$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$. Wykazać, że $(S_n, \mathcal{F}_n)$ jest martyngałem zbieżnym p.n.

14. Udowodnić ‘całkową’ wersję nierówności Dooba: jeżeli $(X_k)_{k=1}^n$ jest martyngałem, $p > 1$, to

$$\mathbb{E} \sup_{k \leq n} |X_k|^p \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \mathbb{E} |X_n|^p.$$