

RP II 2015/16, seria III

Ciasność rodzin rozkładów. Funkcje charakterystyczne.

1. Niech X_n będzie pierwszą współrzędną zmiennej losowej o rozkładzie jednostajnym na kuli jednostkowej w $\mathbb{R}^n$. Wykazać, że $\sqrt{n}X_n$ zbiega według rozkładu do zmiennej losowej o rozkładzie $\mathcal{N}(0, 1)$.

2. Przypuśćmy, że rzeczywiste zmienne losowe X_α , $\alpha \in A$ spełniają warunek

$$\sup_{\alpha \in A} \mathbb{E}|X_\alpha|^p < \infty,$$

dla pewnego $p > 0$. Wykazać, że rodzina rozkładów $(\mu_{X_\alpha})_{\alpha \in A}$ jest ciasna.

3. Jakie warunki musi spełniać zbiór A , aby rodzina rozkładów:

- a) jednostajnych na odcinku $[-a, a]$, $a \in A \subset (0, \infty)$,
 - b) wykładniczych z parametrem λ , $\lambda \in A \subset (0, \infty)$,
 - c) Bernoulliego z parametrami n, p , $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0, 1]$,
- była ciasna?

4. Niech $\mu_\alpha = \mathcal{N}(x_\alpha, \sigma_\alpha^2)$, $\alpha \in A$. Wykazać, że rodzina miar $\{\mu_\alpha, \alpha \in A\}$ jest ciasna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie $K > 0$, że $\sup_{\alpha \in A} |x_\alpha| \leq K$, $\sup_{\alpha \in A} \sigma_\alpha^2 \leq K$.

5. Wyznaczyć funkcje charakterystyczne dla rozkładów: geometrycznego, Poissona, wykładniczego.

6. Czy następujące funkcje są funkcjami charakterystycznymi jakiś rozkładów? Jakiego to rozkładu?

(a) $\cos t$, (b) $\cos^2 t$, (c) $\frac{1}{4} (1 + e^{it})^2$, (d) $\frac{1+\cos t}{2}$, (e) $(2 - e^{it})^{-1}$.

7. X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o standardowym rozkładzie normalnym. Wyznaczyć funkcje charakterystyczne zmiennych losowych $U = XY$, $V = X^2 + Y^2$.

8. X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na $(-1, 1)$. Wyznaczyć funkcję charakterystyczną zmiennej losowej

$$Z = \max(X, Y) - \min(X, Y).$$

9. Zmienne X, Y, ε są niezależne, X i Y mają rozkład wykładniczy z parametrem λ , a ε – rozkład dwupunktowy: $\mathbb{P}(\varepsilon = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon = -1) = 1/2$. Wykazać, że $X - Y$ ma taki sam rozkład, jak zmienna losowa εX .

10. Zmienne losowe X i Y są niezależne. Wiadomo, że X i $X + Y$ mają rozkłady normalne. Wykazać, że Y też ma rozkład normalny.

11. Zmienne losowe $X_1, X_2, \dots$ są niezależne i jednakowo rozłożone, a niezależna od nich zmienna losowa N ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda > 0$. Wyznaczyć funkcję charakterystyczną zmiennej losowej $Y = X_1 + \dots + X_N$ (przyjmujemy, że suma zerowej liczby składników jest zerem).

12. Wyznaczyć funkcję charakterystyczną dla rozkładu Cauchy'ego (tzn. rozkładu o gęstości $g(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$).

13. Udowodnić, że dla funkcji charakterystycznej φ_μ następujące warunki są równoważne:

- (1) $\varphi_\mu(T) = 1$ dla pewnego $T \neq 0$,
- (2) φ_μ ma okres T ,
- (3) rozkład μ jest skupiony na zbiorze punktów postaci $\frac{2\pi k}{T}$, $k \in \mathbb{Z}$.

14. Udowodnić, że jeżeli $\varphi_X''(0)$ istnieje, to $\mathbb{E}X^2 < \infty$.

15. Zmienna losowa X ma rozkład o gęstości $g(x) = \frac{C}{(1+x^2) \ln(e+x^2)}$. Pokazać, że φ_X jest różniczkowalna w zerze, ale $E|X| = \infty$.

16. Wykazać, że dla $\alpha > 2$ funkcja $\varphi(x) = e^{-|x|^\alpha}$ nie jest funkcją charakterystyczną żadnego rozkładu prawdopodobieństwa.