

RP II 2015/16, seria II
Słaba zbieżność rozkładów

1. Zmienne losowe $X, X_1, X_2, \dots$ są określone na wspólnej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, przy czym X jest prawie na pewno stała (tzn. dla pewnego a mamy $\mathbb{P}(X = a) = 1$). Wykazać, że $X_n \rightarrow X$ według rozkładu wtedy i tylko wtedy, gdy $X_n \rightarrow X$ według prawdopodobieństwa.

2. μ_n to rozkłady dwumianowe $B(n, p_n)$, przy czym $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda > 0$. Pokazać, że μ_n zbiega słabo do rozkładu Poissona z parametrem λ .

3. Dla $n \geq 1$ rozkłady zmiennych losowych X_n są następujące:

$$\mathbb{P}\left(X_n = \frac{j}{n}\right) = \frac{2j}{n(n+1)}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Udowodnić, że ciąg X_n jest zbieżny według rozkładu i wyznaczyć rozkład graniczny.

4. Zmienne losowe $X_1, X_2, \dots$ są niezależne, i wszystkie mają rozkład Cauchy'ego z parametrem $a > 0$, tzn. rozkład o gęstości

$$g(x) = \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)}.$$

Udowodnić, że ciąg zmiennych

$$Y_n = \frac{1}{n} \max_{1 \leq i \leq n} X_i$$

jest zbieżny według rozkładu do zmiennej $\frac{1}{T}$, gdzie T ma rozkład wykładniczy z pewnym parametrem.

5. $\xi_1, \xi_2, \dots$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o wspólnym rozkładzie jednostajnym na $(0, 1)$. Dla każdego ustalonego $n > 1$ ustawiamy pierwsze n zmiennych losowych (tzn. zmienne $\xi_1, \dots, \xi_n$) w ciąg niemalejący $\xi_1^{(n)} \leq \xi_2^{(n)} \leq \dots \leq \xi_n^{(n)}$ (zmienną losową $\xi_k^{(n)}$ nazymamy k -tą statystyką pozycyjną ciągu $\xi_1, \dots, \xi_n$). Zbadać zachowanie asymptotyczne ciągów zmiennych losowych $\zeta_n = n(1 - \xi_n^{(n)})$ oraz $\eta_n = n \cdot \xi_k^{(n)}$.

6. ξ_n, η_n — dwa ciągi zmiennych losowych rzeczywistych. Pokazać, że zachodzą następujące implikacje:

$$\begin{aligned} (\xi_n \xrightarrow{w.r.} \xi \text{ oraz } |\xi_n - \eta_n| \rightarrow 0) &\Rightarrow \eta_n \xrightarrow{w.r.} \xi; \\ (\xi_n \xrightarrow{w.r.} \xi \text{ oraz } \eta_n \xrightarrow{w.p.} C) &\Rightarrow \xi_n + \eta_n \xrightarrow{w.r.} \xi + C. \end{aligned}$$

7. X_n, Y_n są rzeczywistymi zmiennymi losowymi określonymi na wspólnej przestrzeni probabilistycznej. Wiadomo, że $X_n \rightarrow X$ oraz $Y_n \rightarrow Y$ według prawdopodobieństwa (według rozkładu). Czy wynika stąd, że $X_n + Y_n \rightarrow X + Y$ według prawdopodobieństwa (według rozkładu)?

8. Czy słaba granica miar posiadających gęstość musi posiadać gęstość?
Czy słaba granica rozkładów dyskretnych musi być rozkładem dyskretnym?

9. $X_1, X_2, \dots; X$ – ciąg zmiennych losowych rzeczywistych posiadających gęstości $f_1, f_2, \dots; f$. Czy prawdziwe są implikacje:
 $(f_n(x) \rightarrow f(x) \text{ prawie wszędzie}) \Rightarrow (X_n \rightarrow X \text{ według rozkładu})$?
 $(X_n \rightarrow X \text{ według rozkładu}) \Rightarrow (f_n(x) \rightarrow f(x) \text{ prawie wszędzie})$?

10. [ważne!] Twierdzenie Diniego. Wykazać, że jeżeli ciąg dystrybuant $\{F_n\}$ jest zbieżny punktowo do dystrybuanty ciągłej F , to zbieżność ta jest jednostajna.