

RP II 2015/16
Zadania na IV kartkówkę

1. Zmienne losowe $X_1, X_2, \dots$ są niezależne i mają wszystkie ten sam rozkład $\mathcal{N}(0, 1)$. Dla danego $\lambda \neq 0$ znaleźć takie liczby $a_n, n = 1, 2, \dots$ by $Z_n^{(\lambda)} = e^{\lambda S_n - a_n}$ było martyngałem.

2. Ciąg (X_n) jest adaptowany do filtracji $(\mathcal{F}_n)$. Pokazać, że jest on martyngałem względem tej filtracji wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ograniczonego momentu zatrzymania zachodzi $\mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_0$.

3. (a) Zmienne losowe $X_1, X_2, \dots$ są niezależne i każda ma rozkład jednostajny na $[-1, 1]$.

Wyznacz liczbę $\rho \neq 0$ taką, że $M_n = \rho^n e^{(X_1 + \dots + X_n)}$ jest martyngałem.

(b) Wykaż że M_n jest zbieżny p.n. i że granica musi być równa zeru p.n.

(c) Czy martyngał M_n jest jednostajnie całkowalny? Czy jest on zbieżny w L^1 ?

4. Niech $X_1, X_2, \dots$ będą niezależne, o wspólnym rozkładzie $\mathbb{P}(X_k = 1) = \mathbb{P}(X_k = -1) = \frac{1}{2}$; $\tau = \inf\{n \geq 1 : X_1 + \dots + X_n \geq 2\}$. Dla $\rho \in (0, 1)$ wyznaczyć $\mathbb{E}\rho^\tau$. *Wskazówka. Skorzystać z punktu (a) zadania 3, zaadaptowanego do bieżącego przypadku, a potem z twierdzenia Dooba o stopowaniu.*

5. X_n, Y_n – dwa ciągi nieujemnych całkowalnych zmiennych losowych adaptowane do filtracji $(\mathcal{F})_n$, przy czym $\sum Y_n < +\infty$ p.n. Wiadomo, że

$$\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] \leq (1 + Y_n)X_n.$$

Udowodnij, że ciąg X_n jest zbieżny p.n. do granicy skończonej.

6. Niech X_k będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrem 1. Niech $N_m = \sup\{k \geq 1 : X_1 + \dots + X_k \leq m\}$ (przyjmujemy $\sup \emptyset = 0$). Pokazać, że $\tilde{N}_m = N_m - m$ jest martyngałem oraz $\mathbb{E}\tilde{N}_m = 0$.

7. Prawdopodobieństwa przejścia dla łańcucha Markowa na $\mathbb{Z}$ dane są przez:

$$\begin{aligned} p_{0,k} &= \frac{1}{3} \text{ dla } k = 0, 1, -1, \\ p_{k,k-1} &= q, p_{k,k+1} = p \text{ dla } k \leq -1, \\ p_{k,k-1} &= p, p_{k,k+1} = q \text{ dla } k \geq 1, \end{aligned}$$

$p \in (0, 1), p + q = 1$. Wykaż, że jest to łańcuch nieprzywiedlny. Dla jakich p jest on powracalny?

8. X_n jest błędzeniem losowym (symetrycznym) na liczbach całkowitych. Czy (a) $Y_n = X_n + 3$, (b) $Z_n = X_n^2$, (c) $U_n = X_n \pmod{3}$ (reszta z dzielenia X_n przez 3), (d) $V_n = X_n + X_{n+1}$ są łańcuchami Markowa? W przypadku odpowiedzi twierdzącej proszę podać macierz przejścia.

9. Wykaż, że każdy łańcuch Markowa o skończonej przestrzeni stanów ma przynajmniej 1 stan powracający.

10. Rzucamy symetryczną monetą do momentu uzyskania (a) 4 orłów, (b) serii 4 orłów pod rząd. Jaka jest wartość oczekiwana wykonanej ilości rzutów?

11. M_n jest martyngałem przyjmującym tylko dwie wartości: 0 i 1. Pokazać, że M_n jest łańcuchem Markowa i znaleźć jego macierz przejścia.