

RP II 2015/16
Zadania na trzecią kartkówkę

1. Zmienne losowe X_n są i.i.d., $\mathbb{E}X_n = a > 0$, $\text{Var } X_n = \sigma^2 > 0$. Pokazać, że ciąg zmiennych losowych

$$\eta_n = \frac{2\sqrt{a}}{\sigma} \left(\sqrt{|S_n|} - \sqrt{na} \right)$$

zbiega według rozkładu do standardowej zmiennej normalnej.

2. Dla $n = 1, 2, \dots$ zmienna losowa X_n ma rozkład $\Gamma(1, n)$ – czyli rozkład o gęstości

$$g_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-x} \mathbf{1}_{[0, \infty)}(x).$$

Wykazać, że ciąg

$$\frac{X_n - n}{\sqrt{n}}$$

jest zbieżny według rozkładu i wyznaczyć rozkład graniczny.

3. Rzucamy symetryczną kostką tak długo, aż suma oczek przekroczy 350. Jakie jest (przybliżone) prawdopodobieństwo tego, że będziemy rzucać więcej niż 120 razy?

4. Zmienne losowe X_n są wspólnie ograniczone oraz $\sum_{k=1}^n \text{Var } X_k \rightarrow \infty$. Wykazać, że dla tych zmiennych losowych zachodzi warunek Lindeberga.

5. Zmienne losowe X_n są i.i.d. o wspólnym rozkładzie jednostajnym na $(0, 1)$. Zbadać zbieżność według rozkładu zmiennych losowych $Y_n = \sqrt{X_1 + \dots + X_n} - \sqrt{\frac{n}{2}}$.

6. Obliczyć

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}.$$

7. Niech X_λ będzie zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem λ . Wyznaczyć słabą granicę, gdy $\lambda \rightarrow \infty$, rozkładów zmiennych losowych $S_\lambda = \frac{X_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$.

8. Rozważmy następujący *schemat urnowy Polya*: W urnie początkowo jest b kul białych i c kul czarnych, $b, c \geq 1$. Losujemy 1 kulę z urny, po czym ją do urny zwracamy, i dokładamy jeszcze l kul tego samego koloru, co kula wylosowana ($l \geq 1$). Następnie doświadczenie powtarzamy, itd. Niech X_n oznacza proporcję kul białych w urnie po n -tym doświadczeniu, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$. Wykazać, że $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ jest martyngałem.

9. $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ jest martyngałem całkowalnym z kwadratem. Wykazać, że ma on nieskorelowane przyrosty (przyrosty martyngału X_n to zmienne losowe $D_n := X_n - X_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$; przyjmujemy $D_0 = X_0$).