

RP II 2015/16

Zadania na drugą kartkówkę

1. Niech T_n będzie czasem oczekiwania na pierwszy sukces w schemacie Bernoulliego z parametrem p_n , $p_n \in (0, 1)$ (jeżeli pierwszy sukces pojawił się w i -tym doświadczeniu, to kładziemy $T_n = i$). Przypuśćmy ponadto, że $p_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ w taki sposób, że $n \cdot p_n \rightarrow \alpha > 0$. Wyznaczyć asymptotyczny rozkład zmiennych losowych $S_n = \frac{T_n}{n}$.

2. Czy prawdziwa jest następująca implikacja:

$$\{\xi_n \rightarrow \xi \text{ w/g rozkładu}, \eta_n \rightarrow \eta \text{ w/g prawd.}\} \Rightarrow \{\xi_n \cdot \eta_n \rightarrow \xi \cdot \eta \text{ w/g rozkładu}\}?$$

3. Niech X_n będzie dowolnym ciągiem zmiennych losowych. Dobrać taki ciąg niezależnych liczb a_n , żeby $a_n X_n$ dążyło według rozkładu do zera.

4. $\xi_1, \xi_2, \dots$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o wspólnym rozkładzie jednostajnym na $(0, 1)$. Dla każdego ustalonego $n > 1$ ustawiamy pierwsze n zmiennych losowych (tzn. zmienne $\xi_1, \dots, \xi_n$) w ciąg niemalejący $\xi_1^{(n)} \leq \xi_2^{(n)} \leq \dots \leq \xi_n^{(n)}$ (zmienną losową $\xi_k^{(n)}$ nazymawy *k-tą statystyką pozycyjną ciągu* $\xi_1, \dots, \xi_n$). Zbadać zachowanie asymptotyczne (tzn. zbieżność według rozkładu) ciągów zmiennych losowych $\zeta_n = n(1 - \xi_n^{(n)})$ oraz $\eta_n = n \cdot \xi_k^{(n)}$.

5. (a) Niech μ_α będzie rozkładem jednostajnym na $[0, a_\alpha]$ (wszystkie a_α są dodatnie). Udowodnić, że rodzina $\{\mu_\alpha\}$ jest ciasna wtedy i tylko wtedy, gdy $\sup_\alpha a_\alpha < \infty$.

(b) Niech μ_λ będzie rozkładem wykładniczym z parametrem $\lambda \in \Lambda \subset (0, \infty)$. Wyznaczyć warunki konieczne i dostateczne na to, by rodzina $\{\mu_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ była ciasna.

6. Wyznaczyć rozkłady (lub uzasadnić, że nie istnieją) o następujących funkcjach charakterystycznych:

(a) $\phi(t) = \frac{\sin t}{t}$,

(b) $\phi(t) = e^{-t^2} \cos t$,

(c) $\phi(t) = \frac{1}{1-it}$.

7. Zmienne losowe $X_1, X_2, \dots$ są niezależne i mają rozkład jednostajny na $[-1, 1]$. Niech $\tau = \inf\{n : X_n \geq 0\}$. Wyznaczyć funkcję charakterystyczną zmiennej X_τ .

8. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na $(-1, 1)$. Czy istnieje zmienna Y , niezależna od niej i taka, że $X + Y \sim 2Y$?