

RP II 2015/16
Zadania na 1 kartkówkę

1. Rzucamy kostką aż do momentu uzyskania pierwszej szóstki. Znaleźć wartość oczekiwaną liczby wyrzuconych wcześniej jedynek oraz wartość oczekiwaną sumy oczek.

2. Zmienne losowe r_1, r_2, r_3 są niezależne o rozkładzie Bernoulliego: $\mathbb{P}(r_i = 1) = \mathbb{P}(r_i = -1) = \frac{1}{2}$. Wyznaczyć $\mathbb{E}(r_1 | (r_1 + r_2 + r_3))$ oraz $\mathbb{E}(r_1 r_2 | r_1 + r_2 r_3)$.

3. Zmienne losowe X_1, X_2, X_3 są niezależne, jednakowo rozłożone i mają wspólny rozkład normalny $\mathcal{N}(0, 1)$. Niech $Y_1 = X_1$, $Y_2 = X_1 + X_2$, $Y_3 = X_1 + X_2 + X_3$. Wyznaczyć (a) $\mathbb{E}(Y_3 | Y_1)$, (b) $\mathbb{E}(Y_3 | Y_2)$, (c) $\mathbb{E}(Y_2 | Y_3)$.

Wskazówka do (c): może się przydać wyznaczenie takich $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dla których $\alpha Y_2 + \beta Y_3$ i Y_3 są zmiennymi niezależnymi.

4. X, Y – całkowalne zmienne losowe na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ – σ -ciało. Wykazać, że $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{G})Y) = \mathbb{E}(X \mathbb{E}(Y | \mathcal{G}))$.

5. Zmienne losowe ξ_1, ξ_2 są niezależne, o rozkładzie jednostajnym na $(0, 1)$. Wyznaczyć:

- a) $\mathbb{E}(\xi_1 | \xi_1 + \xi_2)$,
- b) $\mathbb{E}(\xi_1 - \xi_2 | \xi_1 + \xi_2)$,
- c) $\mathbb{E}(\xi_1 + \xi_2 | \xi_1 - \xi_2)$.

6. Zmienne losowe X, Y są niezależne i mają rozkłady geometryczne z parametrami, odpowiednio, $2/3$ i $1/3$. Wyznaczyć $\mathbb{E}(2^X | \min(X, Y))$.

7. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością

$$g(x, y) = \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{(x, y) : |y| \leq x \leq 2\}}.$$

Wyznaczyć $\mathbb{E}(X | Y)$ oraz $\mathbb{E}(X^2 | Y)$.